

УДК ???

АППРОКСИМАЦИЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. Гуидетти, Б. Карасоцен, С. И. Пискарев

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	1
§ 2. Общая аппроксимационная схема	2
§ 3. Дискретизация полугрупп	9
§ 4. Обратная задача Коши	22
§ 5. Неравенства коэрцитивности	32
§ 6. Аппроксимации полулинейных уравнений	48
Литература	53

§ 1. Введение

Данная обзорная статья посвящена численному анализу абстрактных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Большинство конечно-разностных методов, методов конечных элементов и проекционных методов можно рассматривать с точки зрения общей аппроксимационной схемы (см., например, [206], [210], [209] по поводу такого их представления). Результаты, полученные для общей аппроксимационной схемы

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 01-01-00398). Авторы приносят благодарность NATO-CP Advanced Fellowship Programme of TÜBİTAK (Turkish Scientific Research Council), University of Antwerpen and University of Bologna. Они также благодарны профессору Е. Твицеллю за ценные замечания.

облегчают формулировку конкретных численных методов и дают представление о методах, пригодных для различных классов задач.

Качественная теория дифференциальных уравнений в банаховых пространствах представлена во многих превосходных статьях и учебниках. Можно сослаться на библиографию, приведенную в [216], содержащую примерно 2500 источников. К сожалению, за последние 20 лет не появилось ни книг, ни обзоров по теории аппроксимации дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах. Любую информацию о предмете можно почерпнуть лишь в оригинальных статьях. Представляется, что данный обзор может послужить первым шагом на пути описания полной картины методов дискретизации для абстрактных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

В §2 описывается общая аппроксимационная схема, различные типы сходимости операторов и связь различных видов сходимости с аппроксимацией спектров. Кроме того, такой анализ сходимости может быть использован при анализе эллиптических задач, т.е. задач, не зависящих от времени.

В §3 дается полная картина теории дискретизации полугрупп в банаховых пространствах. Она объединяет теоремы Троттера–Като и Лакса–Рихтмайера с общей точки зрения, а также смежные задачи.

Аппроксимация некорректных задач рассматривается в §4; она основана на теории аппроксимации локальных C -полугрупп. Поскольку обратная задача Коши очень важна в приложениях и допускает стохастический шум, рассматривается также и аппроксимация, использующая стохастическую регуляризацию. Насколько известно авторам, такой подход никогда не рассматривался в литературе.

В §5 приводятся дискретные неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений в пространствах $C_{\tau_n}([0, T]; E_n)$, $C_{\tau_n}^\alpha([0, T]; E_n)$, $L_{\tau_n}^p([0, T]; E_n)$ и $B_{\tau_n}([0, T]; C^\alpha(\Omega_h))$.

В последнем §6 рассматриваются полулинейные задачи. Описаны аппроксимации задачи Коши, а также задач с периодическими решениями. Приведен подход, основанный на теории вращения векторных полей и принципе компактной аппроксимации операторов.

§ 2. Общая аппроксимационная схема

Обозначим через $B(E)$ банахову алгебру всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве E . Множество всех замкнутых линейных плотно определенных операторов в E будет обозначаться через $\mathcal{C}(E)$. Обозначим через $\sigma(B)$ спектр оператора B , через $\rho(B)$

— резольвентное множество B , через $\mathcal{N}(B)$ — ядро B , а через $\mathcal{R}(B)$ — область значений B . Напомним, что $B \in B(E)$ называется фредгольмовым оператором, если $\mathcal{R}(B)$ замкнута, $\dim \mathcal{N}(B) < \infty$ и $\text{codim } \mathcal{R}(B) < \infty$; индекс B определяется как $\text{ind } B = \dim \mathcal{N}(B) - \text{codim } \mathcal{R}(B)$. Общая аппроксимационная схема [102]–[104], [187], [206], [209] может быть описана следующим образом. Пусть E_n и E — банаховы пространства, а $\{p_n\}$ — последовательность линейных ограниченных операторов $p_n : E \rightarrow E_n, p_n \in B(E, E_n), n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, обладающих следующим свойством:

$$\|p_n x\|_{E_n} \rightarrow \|x\|_E \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } x \in E.$$

Определение 2.1. Последовательность элементов $\{x_n\}, x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}$, называется \mathcal{P} -сходящейся к $x \in E$, если $\|x_n - p_n x\|_{E_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; это записывается как $x_n \rightarrow x$.

Определение 2.2. Последовательность элементов $\{x_n\}, x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}$, называется \mathcal{P} -компактной, если для любого $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, существуют $\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}'$ и $x \in E$ такие, что $x_n \rightarrow x$, при $n \rightarrow \infty$ в \mathbb{N}'' .

Определение 2.3. Последовательность ограниченных линейных операторов $B_n \in B(E_n), n \in \mathbb{N}$, называется \mathcal{PP} -сходящейся к ограниченному оператору $B \in B(E)$, если для любого $x \in E$ и для любой последовательности $\{x_n\}, x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n \rightarrow x$, имеем $B_n x_n \rightarrow Bx$. Это записывается в виде $B_n \rightarrow B$.

По поводу общих примеров понятий \mathcal{P} -сходимости см. [101], [187], [202], [210].

Замечание 2.1. Если положить $E_n = E$ и $p_n = I$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, где I — тождественный оператор в E , то определение 2.1 приводит к традиционной поточечной сходимости ограниченных линейных операторов, которая обозначается через $B_n \rightarrow B$.

Обозначим через E^+ положительный конус в банаховой решетке E . Оператор B называется положительным, если для любого $x^+ \in E^+$ справедливо соотношение $Bx^+ \in E^+$; это записывается как $0 \preceq B$.

Определение 2.4. Говорят, что система $\{p_n\}$ сохраняет порядок, если для всех последовательностей $\{x_n\}, x_n \in E_n$, и для любого элемента $x \in E$ справедлива следующая импликация: из $x_n \rightarrow x$ следует, что $x_n^+ \rightarrow x^+$.

Известно [118], что $\{p_n\}$ сохраняет порядок в том и только том случае, если $\|p_n x^+ - (p_n x)^+\|_{E_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $x \in E$.

В случае неограниченных операторов (как известно, инфинитезимальные генераторы, вообще говоря, не ограничены), рассматривается понятие *согласованности*.

Определение 2.5. Последовательность замкнутых линейных операторов $\{A_n\}, A_n \in \mathcal{C}(E_n), n \in \mathbb{N}$, называется согласованной с замкнутым линейным оператором $A \in \mathcal{C}(E)$, если для каждого $x \in D(A)$ существует последовательность $\{x_n\}, x_n \in D(A_n) \subseteq E_n, n \in \mathbb{N}$, такая, что $x_n \rightarrow x$ и $A_n x_n \rightarrow Ax$. Это записывается так: (A_n, A) — согласованы.

На практике банаховы пространства E_n обычно бесконечномерны, хотя, вообще говоря, скажем, в случае замкнутого оператора A имеем: $\dim E_n \rightarrow \infty$ и $\|A_n\|_{B(E_n)} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

2.1. Аппроксимация спектра линейных операторов.

Наиболее важную роль в аппроксимации уравнения $Bx = y$ и аппроксимациях спектра оператора B играют понятия *устойчивой* и *регулярной* сходимостей. Эти понятия используются в различных областях численного анализа (см. [34], [39], [100], [105]–[108], [209], [211], [206], [220]).

Определение 2.6. Последовательность операторов $\{B_n\}, B_n \in B(E_n), n \in \mathbb{N}$, называется устойчиво сходящейся к оператору $B \in B(E)$, если $B_n \rightarrow B$ и $\|B_n^{-1}\|_{B(E_n)} = O(1), n \rightarrow \infty$. Будем писать, что $B_n \rightarrow B$ устойчиво.

Определение 2.7. Последовательность операторов $\{B_n\}, B_n \in B(E_n)$, называется регулярно сходящейся к оператору $B \in B(E)$, если $B_n \rightarrow B$ и справедлива следующая импликация:

$\|x_n\|_{E_n} = O(1) \ \& \ \{B_n x_n\} \text{ — } \mathcal{P}\text{-компактна} \implies \{x_n\} \text{ — } \mathcal{P}\text{-компактна}.$

Это записывается так: $B_n \rightarrow B$ регулярно.

Теорема 2.1 ([209]). Пусть $B_n \in B(E_n)$ и $B \in B(E)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $B_n \rightarrow B$ регулярно, B_n — фредгольмовы операторы индекса 0 и $\mathcal{N}(B) = \{0\}$;
- (ii) $B_n \rightarrow B$ устойчиво и $\mathcal{R}(B) = E$;
- (iii) $B_n \rightarrow B$ устойчиво и регулярно;
- (iv) если выполняется одно из условий (i)–(iii), то существуют $B_n^{-1} \in B(E_n), B^{-1} \in B(E)$ и $B_n^{-1} \rightarrow B^{-1}$ регулярно и устойчиво.

Эта теорема допускает обобщение на случай замкнутых операторов $B \in \mathcal{C}(E), B_n \in \mathcal{C}(E_n)$ [4].

Пусть $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ — некоторое открытое связное множество и пусть $B \in B(E)$. Для изолированной точки $\lambda \in \sigma(B)$ соответствующее максимальное инвариантное подпространство (или обобщенное собственное подпространство) будет обозначаться

через $\mathcal{W}(\lambda; B) = P(\lambda)E$, где $P(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\lambda|=\delta} (\zeta I - B)^{-1} d\zeta$, а δ достаточно мало, так, что в диске $\{\zeta : |\zeta - \lambda| \leq \delta\}$ нет точек из $\sigma(B)$, отличных от λ . Изолированная точка $\lambda \in \sigma(B)$ называется *точкой Рисса* для B , если $\lambda I - B$ — фредгольмов оператор индекса нуль и $P(\lambda)$ имеет конечный ранг. Обозначим $\mathcal{W}(\lambda, \delta; B_n) = \bigcup_{|\lambda_n - \lambda| < \delta, \lambda_n \in \sigma(B_n)} \mathcal{W}(\lambda_n, B_n)$, где $\lambda_n \in \sigma(B_n)$ взяты из δ -окрестности λ . Ясно, что $\mathcal{W}(\lambda, \delta; B_n) = P_n(\lambda)E_n$, где $P_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\lambda|=\delta} (\zeta I - B_n)^{-1} d\zeta$. Следующие теоремы дают полную картину аппроксимации спектра.

Теорема 2.2 ([101], [207]–[208]). Пусть $L_n(\lambda) = \lambda I - B_n$ и $L(\lambda) = \lambda I - B$ — фредгольмовы операторы индекса нуль при любом $\lambda \in \Lambda$, а $L_n(\lambda) \rightarrow L(\lambda)$ устойчиво для любого $\lambda \in \rho(B) \cap \Lambda \neq \emptyset$. Тогда

- (i) для любого $\lambda_0 \in \sigma(B) \cap \Lambda$ существует последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \sigma(B_n)$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ при $n \rightarrow \infty$;
- (ii) если для некоторой последовательности $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \sigma(B_n)$, $n \in \mathbb{N}$, имеем $\lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in \Lambda$ при $n \rightarrow \infty$, то $\lambda_0 \in \sigma(B)$;
- (iii) для любого $x \in \mathcal{W}(\lambda_0, B)$ существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \mathcal{W}(\lambda_0, \delta; B_n)$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$;
- (iv) существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\dim \mathcal{W}(\lambda_0, \delta; B_n) \geq \dim \mathcal{W}(\lambda_0, B)$ для любого $n \geq n_0$.

Замечание 2.2. Как показано в [206], неравенство в (iv) может быть строгим при всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.3 ([209]). Предположим, что $L_n(\lambda)$, $L(\lambda)$ — фредгольмовы операторы индекса нуль при всех $\lambda \in \Lambda$. Допустим, что $L_n(\lambda) \rightarrow L(\lambda)$ регулярно для любого $\lambda \in \Lambda$ и что $\rho(B) \cap \Lambda \neq \emptyset$. Тогда выполнены утверждения (i)–(iii) теоремы 2.2, а также

- (iv) существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что $\dim \mathcal{W}(\lambda_0, \delta; B_n) = \dim \mathcal{W}(\lambda_0, B)$ for all $n \geq n_0$;
- (v) любая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \mathcal{W}(\lambda_0, \delta; B_n)$, $n \in \mathbb{N}$, с $\|x_n\|_{E_n} = 1$ является \mathcal{P} -компактной, а любая предельная точка этой последовательности принадлежит $\mathcal{W}(\lambda_0, B)$.

Замечание 2.3. Оценки $|\lambda_n - \lambda_0|$, раствора подпространств $(\mathcal{W}(\lambda_0, \delta; B_n), \mathcal{W}(\lambda_0, B))$ и $|\hat{\lambda}_n - \lambda_0|$ даны в [209], где $\hat{\lambda}_n$ — арифметическое среднее (считающее алгебраические кратности) спектральных значений $B_n B$ определяющих $\mathcal{W}(\lambda_0, \delta; B_n)$. По поводу понятия *раствора подпространств* и его свойств см. [123].

2.2. Области сходимости. Теоремы 2.2 и 2.3 были обобщены в [4] на случай замкнутых операторов с помощью следующих понятий, введенных Като в [123].

Определение 2.8. Область устойчивости $\Delta_s = \Delta_s(\{A_n\})$, $A_n \in \mathcal{C}(B_n)$, определяется как множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $\lambda \in \rho(A_n)$ для почти всех n , и таких, что последовательность $\{\|(\lambda I - A_n)^{-1}\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена. Область сходимости $\Delta_c = \Delta_c(\{A_n\})$, $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$, определяется как множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $\lambda \in \Delta_s(\{A_n\})$, и таких, что последовательность операторов $\{(\lambda I - A_n)^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ является \mathcal{PP} -сходящейся к некоторому оператору $S(\lambda) \in B(E)$.

Ясно, что $S(\cdot)$ — псевдорезольвента, а $S(\cdot)$ является резольventой некоторого оператора в том и только том случае, если $\mathcal{N}(S(\lambda)) = \{0\}$ для некоторого λ (см. [123]).

Определение 2.9. Последовательность операторов $\{K_n\}$, $K_n \in \mathcal{C}(E_n)$, называется регулярно согласованной с оператором $K \in \mathcal{C}(E)$, если (K_n, K) согласованы и для любой ограниченной последовательности $\|x_n\|_{E_n} = O(1)$ такой, что $x_n \in D(K_n)$, и такой, что $\{K_n x_n\}$ \mathcal{P} -компактна, следует, что $\{x_n\}$ \mathcal{P} -компактна, а $\{x_n\}$ \mathcal{P} -сходится к некоторому x и сходимость $\{K_n x_n\}$ к некоторому y при $n \rightarrow \infty$ в $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$ влекут $x \in D(K)$ и $Kx = y$.

Определение 2.10. Область регулярности $\Delta_r = \Delta_r(\{A_n\}, A)$, определяется как множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что (K_n, K) регулярно согласованы; здесь $K_n = \lambda I - A_n$ и $K = \lambda I - A$.

Связи между этими областями дает

Предложение 2.1. [4] Пусть $\Delta_c \neq \emptyset$ и $\mathcal{N}(S(\lambda)) = \{0\}$, по крайней мере, для одной точки $\lambda \in \Delta_c$, так что $S(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$. Тогда (A_n, A) совместимы и

$$\Delta_c = \Delta_s \cap \rho(A) = \Delta_s \cap \Delta_r = \Delta_r \cap \rho(A).$$

В [4] показано из условий: (A_n, A) согласованы, $\lambda I - A_n$ и $\lambda I - A$ — фредгольмовы операторы индекса нуль для любых $\lambda \in \Lambda$, а $\rho(A) \cap \Lambda \neq \emptyset$, следуют утверждения (i)–(iv) теоремы 2.2, как только $\rho(A) \cap \Lambda \subseteq \Delta_s$, и они влекут утверждения (i)–(iii) теоремы 2.2 и утверждения (iv)–(v) теоремы 2.3, когда $\Lambda \subseteq \Delta_r$.

Определение 2.11. Точка Рисса $\lambda_0 \in \sigma(A)$ называется сильно устойчивой в смысле Като, если

$$\dim \mathcal{W}(\lambda_0, \delta; B_n) \leq \dim \mathcal{W}(\lambda_0, B)$$

для всех $n \geq n_0$.

Теорема 2.4 ([4]). Точка Рисса $\lambda_0 \in \sigma(A)$ сильно устойчива в смысле Като в том и только том случае, если $\lambda_0 \in \Lambda \cap \Delta_r \cap \sigma(A)$.

Исследования аппроксимации спектра и типов сходимости (но не на общей аппроксимационной схеме) приведены в [37], [59], [71], [147], [148], [158], [161].

2.3. Сходимость в случае одного пространства. Всюду в этом пункте считаем, что $E_n = E$ и $p_n = I$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, символ \mathcal{P} будет опускаться во всех обозначениях этого пункта.

Напомним, что если $B_n \rightarrow B$ компактно (см. определение 2.12), то для любого $\lambda \neq 0$ имеем: $I - B_n \rightarrow \lambda I - B$ регулярно [206]. В случае, когда $B_n \rightarrow B$ компактно, а B — компактный оператор, Анселоне [34] доказал, что

$$\|(B_n - B)B_n\| \rightarrow 0, \|(B_n - B)B\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Рассматривая аппроксимацию слабо сингулярного компактного интегрального оператора, Эйхью [29] доказал, что эти свойства сходимости (2.1) достаточны для доказательства того, что точка Рисса сильно устойчива в смысле Като.

Теорема 2.5 ([32]). *Предположим, что $\hat{B} \in B(E)$ компактен и $B_n \rightarrow B$. Если $\|(B_n - B)B_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то для любого ненулевого $\lambda_0 \in \sigma(B)$ справедливы утверждения (i)–(iii) теоремы 2.2 и утверждения (iv)–(v) теоремы 2.3.*

Теорема 2.6 ([32]). *Предположим, что $B_n \rightarrow B$ и выполнено (2.1). Тогда для любой ненулевой точки Рисса $\lambda_0 \in \sigma(B)$ справедливы утверждения (i)–(iii) теоремы 2.2 и утверждения (iv)–(v) теоремы 2.5.*

Следствие 2.1 ([30]). *Предположим, что $B_n \rightarrow B$, $\lambda I - B_n$ — фредгольмовы операторы индекса нуль при $\lambda \in \{z : |z - \lambda_0| \leq \delta\}$, а $\|(B_n - B)B_n^k\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любой ненулевой точки Рисса $\lambda_0 \in \sigma(B)$ выполнены утверждения (i)–(iii) теоремы 2.2 и утверждения (iv)–(v) теоремы 2.3.*

Теорема 2.7 ([32]). *Предположим, что B компактен, $B_n \rightarrow B$, а $\|B_n(B_n - B)\| \rightarrow 0$. Тогда $\lambda_0 I - B_n \rightarrow \lambda_0 I - B$ регулярно для любого $\lambda_0 \neq 0$.*

Теорема 2.8 ([32]). *Предположим, что B компактен, $B_n \rightarrow B$, а $\|B_n^k(B_n - B)\| \rightarrow 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\lambda_0 I - B_n \rightarrow \lambda_0 I - B$ регулярно для любого $\lambda_0 \neq 0$.*

Пусть $r(B)$ — спектральный радиус оператора $B \in B(E)$.

Теорема 2.9 ([42]). *Пусть E — банахова решетка. Пусть $0 \leq B_n, B \in B(E)$, таков, что $B_n \rightarrow B$ и $\|(B_n - B)^+\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Допустим, что $r(B)$ — точка Рисса для $\sigma(B)$. Тогда $r(B_n)$ — точка Рисса для $\sigma(B_n)$ и $r(B_n) \rightarrow r(B)$ при $n \rightarrow \infty$.*

Заключение о порядке сходимости собственных векторов в теореме 2.9 было также получено в [41].

Приложение теорем 2.5 — 2.8 к численному решению математической модели, используемой в производстве лазерных принтеров рассматривается в [31], [136].

2.4. Компактная сходимостъ резольвент. Рассмотрим теперь важный класс операторов, имеющих компактную резольвенту. Это свойство будет использоваться как предположение относительно генератора в §6. В этом случае естественно рассматривать аппроксимативные операторы, сохраняющие это свойство.

Определение 2.12. Последовательность операторов $\{B_n\}$, $B_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, компактно сходится к оператору $B \in B(E)$, если $B_n \rightarrow B$ и выполнено следующее условие компактности:

$$\|x_n\|_{E_n} = O(1) \implies \{B_n x_n\} \text{ — } \mathcal{P}\text{-компактна.}$$

Определение 2.13. Область компактной сходимости резольвент $\Delta_{cc} = \Delta_{cc}(A_n, A)$, где $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$ и $A \in \mathcal{C}(E)$, определяется как множество всех $\lambda \in \Delta_c \cap \rho(A)$ таких, что $(\lambda I - A_n)^{-1} \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$ компактно.

Теорема 2.10. *Предположим, что $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Тогда для любого $\zeta \in \Delta_s$ справедлива следующая импликация:*

$$\|x_n\|_{E_n} = O(1) \ \& \ \|(\zeta I - A_n)x_n\|_{E_n} = O(1) \implies \{x_n\} \text{ — } \mathcal{P}\text{-компактна.} \quad (2.2)$$

Обратно, если для некоторого $\zeta \in \Delta_c \cap \rho(A)$ справедлива импликация (2.2), то $\Delta_{cc} \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $(\mu I - A_n)^{-1} \rightarrow (\mu I - A)^{-1}$ компактно для некоторого $\mu \in \Delta_{cc}$. Тогда при $\|x_n\|_{E_n} = O(1)$ и $\|(\zeta I - A_n)x_n\|_{E_n} = O(1)$, из тождества Гильберта

$$(\zeta I - A_n)^{-1} - (\mu I - A_n)^{-1} = (\mu - \zeta)(\zeta I - A_n)^{-1}(\mu I - A_n)^{-1}, \quad (2.3)$$

получаем, что $x_n = (\mu I - A_n)^{-1}(\zeta I - A_n)x_n - (\zeta - \mu)(\mu I - A_n)^{-1}x_n$, а значит $\{x_n\}$ \mathcal{P} -компактна. Обратно, пусть выполнена импликация (2.2) для некоторого $\zeta_0 \in \Delta_c \cap \rho(A)$. Покажем, что $\zeta_0 \in \Delta_{cc}$. Беря ограниченную последовательность $\{y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, получаем, что последовательность $\|(\zeta_0 I - A_n)^{-1}y_n\|_{E_n} = O(1)$ при $n \in \mathbb{N}$. Применим импликацию (2.2) к последовательности $x_n = (\zeta_0 I - A_n)^{-1}y_n$. Легко видеть, что $\{x_n\}$ \mathcal{P} -компактна. Следовательно, $\zeta_0 \in \Delta_{cc}$. \square

Следствие 2.2. *Предположим, что $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Тогда $\Delta_{cc} = \Delta_c \cap \rho(A)$.*

Доказательство. Ясно, что $\Delta_{cc} \subseteq \Delta_c \cap \rho(A)$. Чтобы доказать, что $\Delta_{cc} \supseteq \Delta_c \cap \rho(A)$, рассмотрим тождество Гильберта (2.3). Пусть теперь $\mu \in \Delta_{cc}$. Тогда $\mu \in \Delta_{cc} \cap \Delta_c \cap \rho(A)$. Следовательно, для любого $\zeta \in \Delta_c \cap \rho(A)$ и для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{(\zeta I - A_n)^{-1}x_n\}$ является \mathcal{P} -компактной. \square

Сравнивая определения 2.7, 2.8, 2.13 и импликацию (2.2), видим, что $\Delta_{cc} \subseteq \Delta_r$.

Теорема 2.11. Пусть $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Тогда $\Delta_r = \mathbb{C}$.

Доказательство. Возьмем любую точку $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Требуется доказать, что $(\lambda_1 I - A_n, \lambda_1 I - A)$ регулярно согласованы. Предположим, что $\|x_n\|_{E_n} = O(1)$, а $\{(\lambda_1 I - A_n)x_n\}$ \mathcal{P} -компактна. Для того, чтобы показать, что $\{x_n\}$ \mathcal{P} -компактна, возьмем $\mu \in \Delta_{cc}$. Используя (2.3) с $\zeta = \lambda_1$, получаем, что $x_n = (\mu I - A_n)^{-1}(\lambda_1 I - A_n)x_n + (\lambda_1 - \mu)(\mu I - A_n)^{-1}x_n$, а потому $\{x_n\}$ \mathcal{P} -компактна. Предположим теперь, что $x_n \rightarrow x$ и $(\lambda_1 I - A_n)^{-1}x_n \rightarrow y$, при $n \rightarrow \infty$ в $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$. Тогда $x = (\mu I - A)^{-1}y - (\lambda_1 - \mu)(\mu I - A)^{-1}x$, откуда $x \in D(A)$ и $(\lambda_1 I - A)x = y$. \square

§ 3. Дискретизация полугрупп

Рассмотрим следующую корректную задачу Коши в банаховом пространстве E с оператором $A \in \mathcal{C}(E)$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t), \quad t \in [0, \infty), \\ u(0) &= u^0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где оператор A порождает C_0 -полугруппу $\exp(\cdot A)$. Хорошо известно, что эта C_0 -полугруппа дает решение задачи (3.1) по формуле $u(t) = \exp(tA)u^0$ при $t \geq 0$. Теория корректных задач и их численный анализ хорошо разработаны, см., например, [94], [107], [123], [9], [11], [199], [5].

Рассмотрим общую аппроксимационную схему для полудискретной аппроксимации задачи (3.1) в банаховых пространствах E_n :

$$\begin{aligned} u'_n(t) &= A_n u_n(t), \quad t \in [0, \infty), \\ u_n(0) &= u_n^0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

с операторами $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$, порождающими C_0 -полугруппы, согласованные с оператором A и с $u_n^0 \rightarrow u^0$.

3.1. Простейшие схемы дискретизации. Справедлива следующая версия теоремы Троттера–Като об общей аппроксимационной схеме.

Теорема 3.1 ([202] (теорема ABC)). *Следующие условия (А) и (В) эквивалентны условию (С).*

(А) *Согласованность. Существует $\lambda \in \rho(A) \cap \cap_n \rho(A_n)$ такое, что имеет место сходимость резольвент:*

$$(\lambda I - A_n)^{-1} \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$$

при $n \rightarrow \infty$.

(В) *Устойчивость. Существуют некоторые постоянные $M \geq 1$ и ω , независимые от n , такие, что $\|\exp(tA_n)\| \leq M \exp(\omega t)$ при $t \geq 0$ и любом $n \in \mathbb{N}$.*

(С) *Сходимость. Для любого конечного $T > 0$ имеет место сходимость $\max_{t \in [0, T]} \|\exp(tA_n)u_n^0 - p_n \exp(tA)u^0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ как только $u_n^0 \rightarrow u^0$.*

Случай аналитической C_0 -полугруппы слегка отличается от общего случая, однако имеет то же условие (А).

Теорема 3.2 ([9]). *Пусть операторы A и A_n порождают аналитические C_0 -полугруппы. Следующие условия (А) и (B_1) эквивалентны условию (C_1) .*

(А) *Согласованность. Существует $\lambda \in \rho(A) \cap \cap_n \rho(A_n)$ такое, что имеет место сходимость резольвент:*

$$(\lambda I - A_n)^{-1} \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$$

при $n \rightarrow \infty$.

(B_1) *Устойчивость. Существуют постоянные $M_2 \geq 1$ и ω_2 такие, что*

$$\|(\lambda I - A_n)^{-1}\| \leq \frac{M_2}{|\lambda - \omega_2|}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_2, n \in \mathbb{N}.$$

(C_1) *Сходимость. Для любого конечного $\mu > 0$ и некоторого $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$*

$$\max_{\eta \in \Sigma(\theta, \mu)} \|\exp(\eta A_n)u_n^0 - p_n \exp(\eta A)u^0\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ как только $u_n^0 \rightarrow u^0$. Здесь

$$\Sigma(\theta, \mu) = \{z \in \Sigma(\theta) : |z| \leq \mu\},$$

и

$$\Sigma(\theta) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta\}.$$

Определение 3.1. Говорят, что линейный оператор $A : D(A) \subseteq E \rightarrow E$ обладает свойством положительности вне-диагональных элементов (POD), если $\langle Au, \phi \rangle \geq 0$ как только $0 \preceq u \in D(A)$ и $0 \preceq \phi \in E^*$ с $\langle u, \phi \rangle = 0$.

Определение 3.2. Говорят, что элемент $e \in E^+$ является порядковой единицей в E , если для любого $x \in E$ существует $0 \leq \lambda \in R$ такое, что $-\lambda e \preceq x \preceq \lambda e$. Для $e \in \text{int}E^+$ можно определить норму порядковой единицы как

$$\|x\|_e = \inf\{\lambda \geq 0 : -\lambda e \preceq x \preceq \lambda e\}.$$

Упорядоченное банахово пространство E называется пространством с порядковой единицей, если существует $e \in \text{int}E^+$ такой, что $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_e$.

Теперь можно сформулировать версию теоремы Троттера–Като для положительных полугрупп.

Теорема 3.3 ([17]). Пусть операторы A_n и A из (3.1) и (3.2) согласованы и пусть E и E_n — упорядоченные пространства с порядковой единицей, а

$$e_n \in D(A_n) \cap \int E_n^+.$$

Предположим, что операторы A_n обладают свойством POD и $A_n e_n \preceq 0$ для достаточно больших n . Тогда

$$\exp(tA_n) \rightarrow \exp(tA) \text{ равномерно по } t \in [0, T].$$

Не ограничивая общности, можно считать, что условия (A) и (B) выполняются для соответствующего полугруппового случая, когда рассматриваются произвольные процессы дискретизации. Если обозначить через $T_n(\cdot)$ семейство дискретных полугрупп, как и в [123], т.е. $\check{A}_n = \frac{1}{\tau_n}(T_n(\tau_n) - I) \in B(E_n)$ и $T_n(t) = T_n(\tau_n)^{k_n}$, где $k_n = \left\lceil \frac{t}{\tau_n} \right\rceil$, при $\tau_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то получаем следующее утверждение.

Теорема 3.4 ([202] (Теорема ABC-discr)). Следующие условия (A) и (B') эквивалентны условию (C').

(A) *Согласованность.* Существует $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(\check{A}_n)$ такое, что имеет место сходимость резольвент: $(\lambda I - \check{A}_n)^{-1} \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$;

(B') *Устойчивость.* Существуют некоторые постоянные $M_1 \geq 1$ и ω_1 такие, что

$$\|T_n(t)\| \leq M_1 \exp(\omega_1 t) \text{ при } t \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty), n \in \mathbb{N};$$

(C') Сходимость. Для любого конечного $T > 0$ имеем

$$\max_{t \in [0, T]} \|T_n(t)u_n^0 - p_n \exp(tA)u^0\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ как только $u_n^0 \rightarrow u^0$.

Теорема 3.5 ([202]). Предположим, что выполнены условия (A) и (B) теоремы 3.1. Тогда неявная разностная схема

$$\frac{\bar{U}_n(t + \tau_n) - \bar{U}_n(t)}{\tau_n} = A_n \bar{U}_n(t + \tau), \bar{U}_n(0) = u_n^0, \quad (3.3)$$

устойчива, т.е.

$$\|(I_n - \tau_n A_n)^{-k_n}\| \leq M_1 e^{\omega_1 t}, t = k_n \tau_n \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

и дает аппроксимацию решения задачи (3.1), т.е.

$$\bar{U}_n(t) \equiv (I_n - \tau_n A_n)^{-k_n} u_n^0 \rightarrow \exp(tA)u^0$$

\mathcal{P} -сходится равномерно по $t = k_n \tau_n \in [0, T]$ при $u_n^0 \rightarrow u^0$, $n \rightarrow \infty$, $k_n \rightarrow \infty$, $\tau_n \rightarrow 0$.

Здесь в теореме 3.5 $\check{A}_n = A_n(I_n - \tau_n A_n)^{-1}$ и, следовательно, $(I_n - \tau_n A_n)^{-k_n} = (I_n + \tau_n \check{A}_n)^{k_n}$.

Теорема 3.6 ([202]). Предположим, что выполнены условия (A) и (B) теоремы 3.1, а также справедливо условие

$$\tau_n \|A_n^2\| = O(1). \quad (3.4)$$

Тогда разностная схема

$$\frac{U_n(t + \tau_n) - U_n(t)}{\tau_n} = A_n U_n(t), U_n(0) = u_n^0, \quad (3.5)$$

устойчива, т.е. $\|(I_n + \tau_n A_n)^{k_n}\| \leq M e^{\omega t}$, $t = k_n \tau_n \in \overline{\mathbb{R}}_+$, и дает аппроксимацию решения задачи (3.1), т.е. $U_n(t) \equiv (I_n + \tau_n A_n)^{k_n} u_n^0 \rightarrow u(t)$ \mathcal{P} -сходится равномерно по $t = k_n \tau_n \in [0, T]$ при $n \rightarrow \infty$, $k_n \rightarrow \infty$, $\tau_n \rightarrow 0$.

Теорема 3.7 ([9]). Предположим, что выполнены условия (A) и (B₁) теоремы 3.2, а также справедливо условие

$$\tau_n \|A_n\| \leq 1/(M + 2), n \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Тогда разностная схема (3.5) устойчива и дает аппроксимацию решения задачи (3.1), т.е.

$$U_n(t) \equiv (I_n + \tau_n A_n)^{k_n} u_n^0 \rightarrow u(t)$$

дискретно \mathcal{P} -сходятся равномерно по $t = k_n \tau_n \in [0, T]$ при $u_n^0 \rightarrow u^0$, $n \rightarrow \infty$, $k_n \rightarrow \infty$, $\tau_n \rightarrow 0$.

Введем следующие условия.

(B'_1) Устойчивость. Существуют постоянные M', ω' такие, что

$$\|\exp(tA_n)\| \leq M' e^{\omega' t}, \quad \|A_n \exp(tA_n)\| \leq \frac{M'}{t} e^{\omega' t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(B''_1) Устойчивость. Существуют постоянные M'', ω'' и $\tau^* > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \|(I - \tau_n A_n)^{-k}\| &\leq M'' e^{\omega'' k \tau_n}, \\ \|k \tau_n A_n (I - \tau_n A_n)^{-1}\| &\leq M'' e^{\omega'' k \tau_n}, \\ 0 < \tau_n < \tau^*, n, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Предложение 3.1 ([22]). Условия (B_1) , (B'_1) , (B''_1) эквивалентны.

Теорема 3.8. Условия (A) и (B''_1) эквивалентны условию (C_1) .

Теорема 3.9 ([12]). Пусть выполнены предположения теоремы 3.7 и справедливо (3.4). Тогда

$$tA_n(I + \tau_n A_n)^{k_n} \rightarrow tA \exp(tA) \text{ равномерно по } t = k_n \tau_n \in [0, T]. \quad (3.7)$$

Обратно, если $(I + \tau_n A_n)^{k_n} \rightarrow \exp(tA)$ равномерно по $t = k_n \tau_n \in [0, T]$ и выполнено (3.7), то выполнено условие (C_1) .

Теорема 3.10 ([12]). Пусть выполнено условие (B_1) . Тогда

$$\|\exp(tA_n) - (I - \tau_n A_n)^{-k_n}\| \leq c \frac{\tau_n}{t} e^{\omega t}.$$

Если, кроме того, выполнено условие устойчивости (3.6), то

$$\begin{aligned} \|\exp(tA_n) - (I + \tau_n A_n)^{k_n}\| &\leq c \frac{\tau_n}{t} e^{\omega t}, \\ \|(\exp(tA_n) - (I + \tau_n A_n)^{k_n})x_n\| &\leq c \tau_n e^{\omega t} \|A_n x_n\|, \\ \|A_n(\exp(tA_n) - (I + \tau_n A_n)^{k_n})x_n\| &\leq c \frac{\tau_n}{t} e^{\omega t} \|A_n x_n\|, \quad t = k_n \tau_n. \end{aligned}$$

В случае аналитических C_0 -полугрупп для явной схемы, как было видно ранее, имеем следующее условие устойчивости: $\tau_n \|A_n\| < 1/(M + 2)$, которое неуплучшаемо даже для самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах. В случае почти периодических C_0 -полугрупп и прямой схемы для дифференциальных уравнений первого порядка по времени (3.1), получается необходимое и достаточное условие устойчивости $\tau_n \|A_n\| < 1$ [11]. Было обнаружено, что условие устойчивости

явной схемы типа (3.5) для положительных C_0 -полугрупп также может быть записано в виде $\tau_n \|A_n\| < 1$, см. [16].

Устойчивость разностных схем для дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах в энергетической норме исследуется в [183], [21], где также рассматриваются и схемы с весами. Полудискретные аппроксимации изучаются в [21].

3.2. Рациональная аппроксимация. Обозначим через $P_p(z)$ элемент множества всех вещественных полиномов степени не более чем p , а через $\pi_{p,q}$ — множество рациональных функций $r_{p,q}(z) = \frac{P_p(z)}{P_q(z)}$ и $P_q(0) = 1$. Тогда (p, q) -аппроксимация Паде для e^{-z} определяется как элемент $R_{p,q}(z) \in \pi_{p,q}$ такой, что

$$|e^{-z} - R_{p,q}(z)| = O(|z|^{p+q+1}) \text{ при } |z| \rightarrow 0.$$

Хорошо известно, что аппроксимация Паде для e^{-z} существует, единственна и представима по формуле $R_{p,q}(z) = P_{p,q}(z)/Q_{p,q}(z)$, где

$$P_{p,q}(z) = \sum_{j=0}^p \frac{(p+q-j)!p!(-z)^j}{(p+q)!j!(p-j)!},$$

$$Q_{p,q}(z) = \sum_{j=0}^q \frac{(p+q-j)!q!z^j}{(p+q)!j!(q-j)!}.$$

В [178]–[179] содержатся подробные сведения о расположении полюсов и порядке сходимости аппроксимаций в различных областях.

Определение 3.3. Рациональная аппроксимация $r_{p,q}(\cdot) \in \pi_{p,q}$ для e^{-z} называется

- а) A -приемлемой, если $|r_{p,q}(z)| < 1$ при $Re(z) > 0$;
- б) $A(\theta)$ -приемлемой, если $|r_{p,q}(z)| < 1$ при $z \in \Sigma(\theta) = \{z : -\theta < \arg(z) < \theta, z \neq 0\}$.

Хорошо известно, что $R_{q,q}(z)$, $R_{q-1,q}(z)$ и $R_{q-2,q}(z)$ являются A -приемлемыми. Но при $q \geq 3$ и $p = q - 3$ дроби Паде не являются A -приемлемыми.

Теорема 3.11 ([179]). Для любых $q \geq 2$ и $p \geq 0$ аппроксимация Паде для e^{-z} не имеет полюсов в секторе

$$S_{p,q} = \{z : |\arg(z)| < \cos^{-1} \left(\frac{q-p-2}{p+q} \right)\};$$

в частности, при $p \leq q \leq p+4$ все полюса лежат в левой полуплоскости.

Так как $r(\cdot) \in \pi_{p,q}$ — аппроксимация e^{-z} , то естественно построить оператор-функцию $r(\tau_n A_n)^k$, которую можно рассматривать как аппроксимацию $\exp(tA_n)$ при $t = k\tau_n$. Для простоты всюду в этом разделе считаем, что $\|\exp(tA_n)\| \leq M, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Теорема 3.12 ([63]). *Пусть выполнено условие (B). Тогда существует постоянная C , зависящая от r , такая, что если $r(\cdot)$ A -допустима, то*

$$\|r(\tau_n A_n)^k\| \leq CM\sqrt{k} \text{ при } \tau_n > 0, k \in \mathbb{N}.$$

Замечание 3.1. Множитель \sqrt{k} в теореме 3.12, вообще говоря, нельзя отбросить; более того, имеются примеры (см. [74], [116]), показывающие, что справедливо неравенство $\|r(\tau_n A_n)^k\| \geq c\sqrt{k}, k \in \mathbb{N}$.

Говорят, что $r(\cdot) \in \pi_{p,q}$ точная порядка $1 \leq d \leq p + q$, если $|e^{-z} - r(z)| = O(|z|^{d+1})$ при $|z| \rightarrow 0$.

Теорема 3.13 ([63]). *Пусть выполнено условие (B). Тогда существует постоянная C , зависящая от r , такая, что если $r(\cdot)$ A -приемлема и точная порядка d , то*

$$\begin{aligned} \|r(\tau_n A_n)^k u_n^0 - \exp(tA_n) u_n^0\| &\leq CM\tau_n^d \|A_n^{d+1} u_n^0\| \\ \text{при } \tau_n > 0, k \in \mathbb{N}, u_n^0 &\in D(A_n^{d+1}). \end{aligned}$$

Теорема 3.14 ([63]). *Пусть выполнено условие (B_1) . Тогда существует постоянная C , зависящая от $r(\cdot)$, такая, что если $r(\cdot)$ A -приемлема и точная порядка d , то*

$$\begin{aligned} \|r(\tau_n A_n)^k u_n^0 - \exp(tA_n) u_n^0\| &\leq CM\tau_n^d \|A_n^d u_n^0\| \\ \text{при } \tau_n > 0, k \in \mathbb{N}, u_n^0 &\in D(A_n^d). \end{aligned}$$

Теорема 3.15 ([24], [10]). *Пусть выполнено условие (B_1) . Тогда существует постоянная C , зависящая от $r(\cdot)$, такая, что если $r(\cdot)$ A -приемлема и точная порядка d с $|r(\infty)| < 1$ или выполнено условие (3.6), то*

$$\begin{aligned} \|r(\tau_n A_n)^k u_n^0 - \exp(tA_n) u_n^0\| &\leq CM \frac{\tau_n^\gamma}{t^{d-\gamma}} \|A_n^\gamma u_n^0\| \\ \text{при } \tau_n > 0, 0 \leq \gamma \leq d, t = k\tau_n, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В [73], [168], [170] доказаны аналоги теорем 3.13–3.15 для многошаговых методов.

Напомним, что постоянная M_2 из условия (B_1) определяет α , $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, из условия $M_2 \sin \alpha < 1$ [128], такую, что

$$\|(\lambda I - A_n)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \text{ для любого } \lambda \in \Sigma(\pi/2 + \alpha). \quad (3.8)$$

Теорема 3.16 ([74], [166]). Пусть выполнено условие (B_1) . Тогда существует постоянная C , зависящая от $r(\cdot)$, такая, что если $r(\cdot)$ $A(\theta)$ -приемлема, точная порядка d и $\theta \in (\pi/2 - \alpha, \pi/2]$ для α из условия (3.8), то

$$\|r(\tau_n A_n)^k\| \leq CM \text{ при } \tau_n > 0, k \in \mathbb{N}$$

и

$$\begin{aligned} \|r(\tau_n A_n)^k - \exp(t A_n) - \gamma^k \exp(-\tau_n^{-b} a k_n (-A_n)^{-b})\| &\leq \\ &\leq CM(k_n^{-d} + k_n^{-1/b}), t = k_n \tau_n, \end{aligned}$$

где $\gamma = r(\infty)$, a, b — некоторые положительные постоянные.

Можно показать [167], что $\Pi_{j=1}^k r(\tau_{n,j} A_n)$ — устойчивая аппроксимация $\exp(\sum_{j=1}^k \tau_{n,j} A)$ с переменным размером шага, но при условии $0 < c \leq \tau_i / \tau_j \leq C < \infty$, $i, j \in \mathbb{N}$.

3.3. Метод экстраполяции Ричардсона. Рассмотрим схемы (3.3) и (3.5), имеющие порядок сходимости $O(\tau_n)$ и обозначим $\mathcal{U}_n^{\tau_n}(k_n) = U_n(t)u_n^0$ и $\bar{\mathcal{U}}_n^{\tau_n}(k_n) = \bar{U}_n(t)u_n^0, t = k_n \tau_n$. Возможен следующий вариант подхода Ричардсона:

Теорема 3.17 ([15]). Пусть выполнено условие (B). Тогда при $\bar{V}_n(t) = 2\bar{\mathcal{U}}_n^{\tau_n}(k_n) - \bar{\mathcal{U}}_n^{\tau_n/2}(2k_n)$,

$$\|\bar{V}_n(t) - u_n(t)\| \leq \tau_n^2 M e^{\omega t} t^2 \|A_n^3 u_n^0\|, t = k_n \tau_n.$$

Если, кроме того, схема (3.5) устойчива, то при $V_n(t) = 2\mathcal{U}_n^{\tau_n}(k_n) - \mathcal{U}_n^{\tau_n/2}(2k_n)$, $t = k_n \tau_n$,

$$\|V_n(t) - u_n(t)\| \leq \tau_n^2 M e^{\omega t} t^2 \|A_n^3 u_n^0\|, t = k_n \tau_n.$$

Рассмотрим схему Кранка–Николсона

$$\frac{\tilde{U}_n(k\tau_n + \tau_n) - \tilde{U}_n(k\tau_n)}{\tau_n} = A_n \frac{\tilde{U}_n(k\tau_n + \tau_n) + \tilde{U}_n(k\tau_n)}{2}, \quad (3.9)$$

$$\tilde{U}_n(0) = I_n, k \in \mathbb{N}_0,$$

Теорема 3.18 ([15]). Предположим, что выполнено условие (B), а схема (3.9) устойчива. Тогда

$$\psi_n(t) = \frac{4}{3} \tilde{\mathcal{U}}_n^{\tau_n/2}(2k_n) - \frac{1}{3} \tilde{\mathcal{U}}_n^{\tau_n}(k_n)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\psi_n(t) - u_n(t)\| \leq c\tau_n^4 e^{\omega t} t^2 \|A_n^6 u_n^0\|, \quad t = k_n \tau_n.$$

Вообще, положим $\mathcal{V}_n^{\tau_n}(t) = R_{p,q}(\tau_n A_n)^{k_n} u_n^0$, $t = k_n \tau_n$.

Теорема 3.19 ([15]). *Предположим, что выполнено условие (B), $p = q$, а схема, соответствующая $\mathcal{V}_n^{\tau_n}$ устойчива. Тогда при*

$$\psi_n(t) = -\frac{1}{2^{2q}-1} \mathcal{V}_n^{\tau_n}(t) + \frac{2^{2q}}{2^{2q}-1} \mathcal{V}_n^{\tau_n/2}(t)$$

имеем

$$\begin{aligned} \|\psi_n(t) - u_n(t)\| &\leq \\ &\leq c\tau_n^{2q+2} e^{\omega t} \left(\frac{t^{3/2}}{\sqrt{\tau_n}} \|A_n^{2q+3} u_n^0\| + t^3 \tau_n^{2q-3} \|A_n^{4q+2} u_n^0\| \right), \\ &\quad t = k_n \tau_n. \end{aligned}$$

Теорема 3.20 ([15]). *Пусть выполнено условие (B_1) , $p = q$ и $\tau_n \|A_n\| \leq \text{const}$. Тогда при $0 \leq \gamma \leq 2q$ и*

$$\psi_n(t) = -\frac{1}{2^{2q}-1} \mathcal{V}_n^{\tau_n}(t) + \frac{2^{2q}}{2^{2q}-1} \mathcal{V}_n^{\tau_n/2}(t)$$

имеем

$$\|\psi_n(t) - u_n(t)\| \leq c \frac{\tau_n^{2q+2}}{t^{2q+2-\gamma}} e^{\omega t} \|A_n^\gamma u_n^0\|, \quad t = k_n \tau_n.$$

3.4. Теоремы типа Лакса об эквивалентности с порядками. Теорема эквивалентности Лакса о сходимости решения задачи аппроксимации к решению данной корректной задачи Коши утверждает, что устойчивость метода — необходимое и достаточное условие сходимости в предположении, что имеется согласованность. Недавно была получена теорема Лакса с порядками, дающая возможность рассматривать “неустойчивые” аппроксимации.

Определение 3.4. Две C_0 -полугруппы $\exp(tA_n)$ и $\exp(tA)$ называются согласованными порядка $O(\varphi(\tau_n))$ на линейном многообразии $\mathcal{U} \subset E$ относительно полугруппы $\exp(\cdot A)$, если $\exp(tA)\mathcal{U} \subseteq D(A)$ и существует постоянная C такая, что

$$\|(A_n p_n - p_n A) \exp(tA)x\| \leq C \tau_n \varphi(\tau_n) e^{\omega t} |x|_{\mathcal{U}} \quad \text{для любого } x \in \mathcal{U}, \quad (3.10)$$

где $|\cdot|_{\mathcal{U}}$ обозначает полунорму на \mathcal{U} .

Определение 3.5. C_0 -полугруппы $\exp(tA_n)$ называются устойчивыми порядка $O(M_n e^{\omega_n t})$, если существуют постоянные M_n and ω_n такие, что

$$\|\exp(tA_n)\| \leq M_n e^{\omega_n t} \text{ для любого } t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (3.11)$$

Следующее утверждение является небольшой модификацией утверждений из [66]–[69] и [85]–[87], доказанной в [12].

Теорема 3.21. Пусть C_0 -полугруппа $\exp(\cdot A_n)$ согласована на порядка $O(\varphi(\tau_n))$ на линейном многообразии $\mathcal{U} \subset E$ относительно полугруппы $\exp(\cdot A)$, $\exp(tA)\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ и пусть $|\exp(tA)x|_{\mathcal{U}} \leq M|x|_{\mathcal{U}}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\|(\exp(tA_n)p_n - p_n \exp(tA))x\| \leq 2M_n e^{\omega_n t} K\left(\frac{C_n}{2}t\varphi(\tau_n), x; E, \mathcal{U}\right);$
- (ii)

$$\begin{aligned} & \|(\exp(tA_n)p_n - p_n \exp(tA))x\| \leq \\ & \leq M_n e^{\omega_n t} \begin{cases} M_x, & x \in E, \\ \frac{C_n}{2}t\varphi(\tau_n)|x|_{\mathcal{U}}, & t = k_n\tau_n \in [0, T], x \in \mathcal{U}; \end{cases} \end{aligned}$$

- (iii) $\|\exp(tA_n)\| \leq M_n e^{\omega_n t},$

$$\|(A_n p_n - p_n A) \exp(tA)x\| \leq C_n \tau_n \varphi(\tau_n) e^{\omega t} |x|_{\mathcal{U}}$$

для любых $x \in \mathcal{U}$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, где M_x — постоянная, зависящая только от x , а

$$K(t, x; E, \mathcal{U}) = \inf_{y \in \mathcal{U}} \{\|x - y\|_E + t|y|_{\mathcal{U}}\}$$

— функционал Петре.

Определение 3.6. Семейство дискретных полугрупп $\{U_n(k_n\tau_n)\}$ называется совместимым порядка $O(\varphi(\tau_n))$ на линейном многообразии $\mathcal{U} \subset E$ относительно полугруппы $\exp(\cdot A)$, если $\overline{\mathcal{U}} = E$ и

$$\|(U_n(\tau_n)p_n - p_n \exp(\tau_n A)) \exp(tA)x\| \leq C \tau_n \varphi(\tau_n) |x|_{\mathcal{U}} \quad (3.12)$$

для любого $x \in \mathcal{U}$.

Теорема 3.22. Пусть $\exp(tA_n)\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_n$, выполнено условие (B) и $|\exp(tA_n)x|_{\mathcal{U}_n} \leq C e^{\omega t} |x_n|_{\mathcal{U}_n}$ для любых $x_n \in \mathcal{U}_n$ и $t > 0$. Тогда эквивалентны следующие условия:

- (a)

$$\begin{aligned} & \|(U_n(k_n\tau_n) - \exp(k_n\tau_n A_n))x_n\| \leq \\ & \leq M_n K\left(\frac{C_n k_n \tau_n}{2} \varphi(\tau_n), x_n, E_n, \mathcal{U}_n\right), n, k_n \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & \| (U_n(k_n \tau_n) - \exp(k_n \tau_n A_n)) x_n \| \leq \\ & \leq M_n \begin{cases} M_{x_n}, & x_n \in E_n, \\ \frac{C_n}{2} t e^{t\omega} \varphi(\tau_n) |x_n|_{\mathcal{U}_n}, & x_n \in \mathcal{U}_n; \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \|U_n(k_n \tau_n)\|_{B(E_n)} & \leq M_n, \| (U_n(\tau_n) - \exp(\tau_n A)) \exp(t A_n) x_n \| \leq \\ & l e \frac{C_n M_n}{2} \tau_n e^{\omega t} \varphi(\tau_n) |x_n|_{\mathcal{U}_n}, \end{aligned}$$

где $k_n \tau_n = t \in [0, T]$.

Определение 3.7. Семейство дискретных полугрупп $\{U(k_n \tau_n)\}$ называется устойчивым порядка $O(1/\psi(n^{-1}))$, если

$$\begin{aligned} \|U_n(k_n \tau_n)\|_{B(E_n)} & \leq C/\psi(n^{-1}), \\ \text{при } n, k_n \in \mathbb{N}, 0 < \tau_n & \leq \tau^*, \tau_n k_n \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Теорема 3.23. Пусть дискретная полугруппа $\{U(k_n \tau_n)\}$ совместима порядка $O(\varphi(\tau_n))$ на линейном многообразии $\mathcal{U} \subset E$ относительно полугруппы $\exp(\cdot A)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\|U_n(k_n \tau_n)\|_{B(E_n)} \leq C/\psi(n^{-1});$
- (ii)

$$\begin{aligned} & \| (U_n(k_n \tau_n) p_n - p_n \exp(k_n \tau_n A)) x \| \leq \\ & \leq \frac{C}{\psi(n^{-1})} K(k_n \tau_n \varphi(\tau_n), x; E, \mathcal{U}), n, k_n \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} & \| (U_n(k_n \tau_n) p_n - p_n \exp(k_n \tau_n A)) x \| \leq \\ & \leq \frac{C}{\psi(n^{-1})} \begin{cases} M_x, & x \in E, \\ k_n \tau_n \varphi(\tau_n) |x|_{\mathcal{U}}, & k_n \tau_n \in [0, T], x \in \mathcal{U}, \end{cases} \end{aligned}$$

где M_x — постоянная, зависящая только от x .

Теорема 3.24. Пусть $|\exp(tA)x|_{\mathcal{U}} \leq C|x|_{\mathcal{U}}$ для любых $x \in \mathcal{U}$ и $t \in [0, T]$. Тогда эквивалентны следующие условия:

- (i) Семейство операторов $\{U(k_n \tau_n)\}$ совместимо порядка $O(\varphi(\tau_n))$ на линейном многообразии $\mathcal{U} \subset E$ относительно полугруппы $\exp(\cdot A)$ и устойчиво порядка $O(1/\phi(n^{-1}))$;

(ii)

$$\begin{aligned} & \| (U_n(k_n \tau_n) p_n - p_n \exp(k_n \tau_n A)) x \| \leq \\ & \leq \frac{C}{\psi(n^{-1})} K(k_n \tau_n \varphi(\tau_n), x; E, \mathcal{U}), n, k_n \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} & \| (U_n(k_n \tau_n) p_n - p_n \exp(tA)) x \| \leq \\ & \leq \frac{C}{\psi(n^{-1})} \begin{cases} M_x, & x \in E, \\ k_n \tau_n \varphi(\tau_n) |x|_{\mathcal{U}}, & t = k_n \tau_n \in [0, T], x \in \mathcal{U}. \end{cases} \end{aligned}$$

По поводу обобщения теории Лакса–Рихтмейера см. [173], [184].

Для частного случая, когда $E = L^p(\mathbb{R}^d)$, а оператор $A \equiv P(D) = \sum_{|\alpha| \leq r} p_\alpha D^\alpha$ в E , можно рассмотреть задачу Коши

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P(D)u(x, t), \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (3.14)$$

с оператором $P(D)$ таким, что (3.14) корректна в смысле

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c \|u^0(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Обозначим $\hat{P}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq r} p_\alpha (i\xi)^\alpha$. Хорошо известно, что (3.14) корректна в том и только том случае, если $\|\exp(t\hat{P})\|_{M_p} \leq C$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, где M_p — пространство мультипликаторов Фурье.

Полудискретная аппроксимация (3.14) задается как

$$\frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = P_h(D)u_n(x, t), \quad u_n(x, 0) = u_n^0(x), \quad x \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (3.15)$$

где

$$P_h(D_h) = h^{-r} \sum_{|\alpha| \leq r} p_\alpha(h) \sum_{\beta \in I_\alpha} b_\beta u_n(x + \beta h, t)$$

и

$$\hat{P}_h(\xi) = h^{-r} \sum_{|\alpha| \leq r} p_\alpha(h) \sum_{\beta \in I_\alpha} b_\beta e^{i\langle \xi, h\beta \rangle}.$$

Оператор $P_h(D_h)$ называется согласованным с оператором $P(D)$ с порядком μ , если $\hat{P}_h(\xi) - \hat{P}(\xi) = h^\mu |\xi|^{r+\mu} Q(h\xi)$, $r = \deg \hat{P}_h(\xi)$, Q — бесконечно дифференцируемая функция, а $|Q(\eta)| \geq Q_0 > 0$ при $0 < |\eta| \leq \epsilon_0$.

Теорема 3.25 ([62]). Пусть $P(D)$ и $P_h(D_h)$ совместимы порядка μ а (3.14) и (3.15) корректно поставлены. Тогда для каждого $T > 0$ существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|(e^{tP_h(D_h)} - \exp(tP(D)))u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq ch^\mu \|u^0\|_{W^{2, r+\mu}(\mathbb{R}^d)},$$

а при $0 < s < r + \mu$,

$$\begin{aligned} \|(e^{tP_h(D_h)} - \exp(tP(D)))u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq ch^{\frac{s\mu}{\mu+r}}\|u^0\|_{B_2^s}, \\ \|(e^{tP_h(D_h)} - \exp(tP(D)))u_n^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq ch^{\frac{s\mu}{\mu+r}}\|u^0\|_{B_2^{d/2+s}}, \end{aligned}$$

где $B_p^\theta = B_{p,\infty}^\theta$ — пространство Бесова.

В [51] отмечено, что для достаточно общего случая $B_{p,q}^\theta = (L^p(\mathbb{R}), D(A))_{\theta,q}$.

Если рассмотреть полную схему дискретизации для (3.14) в виде $L_h U_n^{k+1} = B_h U_n^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где

$$L_h v = \Sigma_\beta a_\beta(h) v(x + \beta h), B_h v = \Sigma_\beta b_\beta(h) v(x + \beta h),$$

то дискретную полугруппу можно рассматривать как

$$\begin{aligned} U_n(k\tau_n)u_n^0 &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{U}_n^k(\xi)\hat{u}_n^0), \\ \hat{U}_n(\xi) &= \hat{B}_n(\xi)/\hat{L}_n(\xi), \\ \hat{B}_n(\xi) &= \Sigma_\beta a_\beta(h)e^{\langle \xi, \beta h \rangle} \end{aligned}$$

(временной шаг τ_n связан с h условием $\tau_n/h^r = \text{const}$). Такой конечно-разностный оператор $U_n(k\tau_n)$ аппроксимирует (3.14) с порядком μ , если

$$\hat{U}_n(\xi) = e^{\tau_n \hat{P}(\xi)} + O(h^{r+\mu} + |\xi|^{r+\mu})$$

при $\xi, h \rightarrow 0$.

Теорема 3.26 ([62]). Пусть (3.14) корректно поставлена, а $U_n(k\tau_n)$ устойчива в $E = L^2(\mathbb{R}^d)$ и аппроксимирует (3.14) с порядком $\mu > 0$. Тогда для любого $T > 0$ существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|(U_n(t) - \exp(tP(D)))u_n^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq ch^\mu \|u_n^0\|_{W^{2,r+\mu}(\mathbb{R}^d)},$$

а при $0 < s < r + \mu$,

$$\begin{aligned} \|(U_n(t) - \exp(tP(D)))u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq ch^{\frac{s\mu}{\mu+r}}\|u^0\|_{B_2^s}, \\ \|(U_n(t) - \exp(tP(D)))u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq ch^\mu \|u^0\|_{B_{2,1}^{d/2+\mu+r}}, \\ \|(U_n(t) - \exp(tP(D)))u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq ch^{\frac{s\mu}{\mu+r}}\|u^0\|_{B_2^{d/2+s}}, \quad t = k\tau_n \in [0, T]. \end{aligned}$$

Обратно, порядок сходимости влечет гладкость u_n^0 , см. [51], [62].

Дискретизация по времени параболических задач с памятью рассматривалась [46] на основе неявного метода Эйлера. Устойчивость и оценки погрешности имеют место в банаховом пространстве, и результаты используются для получения оценок погрешности в L_2 и тах-нормах для кусочно конечноэлементной дискретизации в случае пространства размерности 2.

§ 4. Обратная задача Коши

Рассмотрим следующую обратную задачу Коши в банаховом пространстве E :

$$\begin{aligned} v'(t) &= Av(t), \quad t \in [0, T], \\ v(T) &= v^T, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где элемент $v(0)$ неизвестен. По крайней мере в двух важных случаях эта задача не является корректной; именно, если A не ограничен и порождает аналитическую C_0 -полугруппу, или полугруппа $\exp(\cdot A)$ компактна. В самом деле, в этих ситуациях задача $\exp(TA)x = v^T$ не корректна [70], [6], [195] в том смысле, что оператор $\exp(-TA)$ не ограничен на E и, кроме того, вообще говоря, $D(\exp(-TA)) \neq E$. Это означает, вообще говоря, что задача Коши (4.1) имеет решение только для некоторых (а не для всех) начальных данных v^T , причем решение $v(0)$ (если оно существует) не может непрерывно зависеть от начальных данных. После замены переменных, полагая $v(\eta) = u(T - \eta)$, можно переписать задачу (4.1) в виде

$$\begin{aligned} u'(t) &= -Au(t), \quad t \in [0, T], \\ u(0) &= u^0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $u^0 = v^T$ задано, а $u(T)$ — элемент, подлежащий определению. В этом параграфе рассматривается аппроксимация (4.2) с оператором A , порождающим аналитическую C_0 -полугруппу.

Определение 4.1. Ограниченный линейный оператор $R_{\epsilon, T}$, действующий в пространстве E , называется регуляризатором задачи Коши (4.2), если для любого $\delta > 0$ и любого $u^0 \in E$, для которого существует решение (4.2), найдется $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$ такое, что $\epsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и

$$\sup_{\|u^\delta - u^0\| \leq \delta} \|R_{\epsilon(\delta), T} u^\delta - \exp(-TA) u^0\| \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$.

В [8] доказано, что для существования линейного регуляризатора задачи (4.2), коммутирующего с оператором A , необходимо и достаточно, чтобы $-A$ порождал C_ϵ -полугруппы $\mathcal{S}_\epsilon(t)$,

$0 \leq t \leq T$, такие, что C_ϵ сильно сходится к тождественному оператору I при $\epsilon \rightarrow 0$.

Существует много регуляризаторов, которые можно рассматривать для задачи (4.2). Например, в [13] показано, что если $-A_n^2$ порождает косинус-операторную функцию, то метод квазиобращения, заданный задачей Коши

$$u'_{n,\alpha}(t) = -A_n u_{n,\alpha}(t) - \alpha A_n^2 u_{n,\alpha}(t), \quad u_{n,\alpha}(0) = u_n^0,$$

является методом регуляризации для (4.2), а

$$\|u_{n,\alpha}(T) - p_n u(T)\| \leq C\alpha \left(\|u_n^0 - p_n u^0\|/\delta + \rho \right),$$

где

$$\alpha = \alpha(\delta) = 1/\left(\ln(1/\delta) - \ln \ln(1/\delta) - o(\ln^{-1}(1/\delta)) \right).$$

В этом случае $\mathcal{S}_\alpha(t) \equiv \exp(-tA) \exp(-\alpha T A^2)$ является C_α -полугруппой с $C_\alpha = \exp(-\alpha T A^2)$ и $C_\alpha \rightarrow I$ при $\alpha \rightarrow 0$. Кроме того, генератором этой C_α -полугруппы служит $-A$.

В [79] показано, что стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} du_\alpha(t) &= -A u_\alpha(t) dt - \alpha A u_\alpha(t) dw(t), \\ u(0) &= u^0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $w(\cdot)$ — стандартный одномерный винеровский процесс, доставляет стохастическую регуляризацию (4.2). В явной форме операторная функция

$$U_\alpha(t) u^0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-t\lambda - \alpha \left(w(t) - w(0) \right) \lambda - \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda^2 |t|} (\lambda - A)^{-1} u^0 d\lambda, \quad t > 0,$$

представляющая решение (4.3) для любого $u^0 \in \mathfrak{A}_c(A)$, обладает следующими свойствами:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|U_\alpha(T) u^0 - \exp(-TA) u^0\| = 0, \tag{4.4}$$

$$\|U_\alpha(t)\| \leq \frac{c_1}{\alpha \sqrt{|t|}} \exp \left(c_2 \frac{\sqrt{|t|}}{\alpha} + c_3 |t|^{-\mu} \right) + b(\alpha, |t|) \quad \text{для любого } \alpha > 0. \tag{4.5}$$

Здесь функция $b(\alpha, t)$ ограничена по параметрам α и t , а $\mathfrak{A}_c(A)$ — множество целых векторов оператора A . В силу неравенства

$$\begin{aligned} &\|U_\alpha(T) u^\delta - \exp(-TA) u^0\| \leq \\ &\leq \|U_\alpha(T)\| \|u^\delta - u^0\| + \|U_\alpha(T) u^0 - \exp(-TA) u^0\|, \end{aligned} \tag{4.6}$$

это означает непрерывную зависимость от $\alpha = \alpha(\delta)$, так что $U_\alpha(T)$ становится регуляризатором. Операторная функция $t \mapsto \exp((T-t)A)U_\alpha(T)$, $0 \leq t \leq T$, есть C_α -полугруппа с $C_\alpha = \exp(TA)U_\alpha(T)$. Можно убедиться, что $C_\alpha \rightarrow I$ при $\alpha \rightarrow 0$ и что генератор этой C_α -полугруппы есть $-A$.

4.1. C -полугруппы и некорректные задачи. Пусть C — ограниченный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E , т.е. $C \in B(E)$, и пусть $T > 0$ — некоторое конечное число.

Определение 4.2 ([191]). Семейство неограниченных операторов $\{\mathcal{S}(t) : 0 \leq t < T\}$ называется *локальной C -полугруппой* на E , если

- (i) $\mathcal{S}(t+s)C = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s)$ при $t, s, t+s \in [0, T)$,
- (ii) $\mathcal{S}(0) = C$,
- (iii) $\mathcal{S}(\cdot)$ сильно непрерывно на $[0, T)$.

Ясно, что $\mathcal{S}(\cdot)$ — коммутативное семейство. Локальная C -полугруппа называется невырожденной, если из условия $\mathcal{S}(t)x = 0$ для всех $t \in (0, T)$ следует, что $x = 0$. Из определения 4.2 видим, что локальная C -полугруппа не вырождена [82] в том и только том случае, если C инъективен, т.е. $\mathcal{N}(C) = \{0\}$. По поводу построений с $\mathcal{N} \neq \{0\}$ см. [130], [131]. Интересен вопрос о применении случая неинъективных C -полугрупп к некорректным задачам, однако этот переход в деталях пока не отработан. Начиная с этого момента, будет рассматриваться ситуация, когда $C \in B(E)$ — инъективный оператор.

Определение 4.3. Генератор $\{\mathcal{S}(t) : 0 \leq t < T\}$ определяется как предел

$$-Gx := C^{-1} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} (\mathcal{S}(h)x - Cx), \quad x \in D(G),$$

с естественной областью определения

$$D(G) := \left\{ x \in E : \exists \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} (\mathcal{S}(h)x - Cx) \in R(C) \right\}.$$

Предложение 4.1 ([185]). Оператор G замкнут, $R(C) \subseteq \overline{D(G)}$ и $C^{-1}GC = G$.

Обозначим C -полугруппу $\mathcal{S}(\cdot)$ с генератором $-G$ через $\mathcal{S}(\cdot G)$. Далее, пусть $\tau \in (0, T)$. Положим

$$L_\tau(\lambda)x := \int_0^\tau e^{-\lambda t} \mathcal{S}(tG)x dt, \quad x \in E, \lambda > 0. \quad (4.7)$$

Это есть так называемое *локальное преобразование Лапласа* для $\mathcal{S}(\cdot G)$.

Предложение 4.2. Пусть $\mathcal{S}(\cdot G)$ — локальная C -полугруппа и пусть $L_\tau(\cdot)$ — локальное преобразование Лапласа для $\mathcal{S}(\cdot G)$. Тогда для любого $x \in E$, имеем $L_\tau(\lambda)x \in D(G)$ и

$$(\lambda + G)L_\tau(\lambda)x = Cx - e^{-\lambda\tau}\mathcal{S}(\tau G)x \text{ при всех } \tau \in [0, T] \text{ и } \lambda > 0. \quad (4.8)$$

В случае локальной C -полугруппы спектр $\sigma(-G)$ может лежать на полупрямой $[0, \infty)$. Поэтому в этом случае, преобразование Лапласа локальной C -полугруппы, вообще говоря, не существует и мы следуем идеям работ [49], [185], [191]. Функция $L_\tau(\lambda)$ со свойством (4.8) называется асимптотической резольвентой.

Теорема 4.1 ([185]). Пусть A — ограниченный линейный оператор в E и пусть $C \in B(E)$ инъективен.

(i) Если оператор A является генератором локальной C -полугруппы $\{S(t) : 0 \leq t < T\}$ на E , то существует асимптотическая C -резольвента $L_\tau(\lambda)$ оператора $-A$ такая, что

$$\left\| \frac{d^m}{d\lambda^m} L_\tau(\lambda)x \right\| \leq M_\tau \frac{m!}{\lambda^{m+1}} \|x\|, \quad x \in E, \quad (4.9)$$

с $0 \leq m/\lambda \leq \tau, \lambda > a, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а оператор A удовлетворяет соотношению $C^{-1}AC = A$.

(ii) Если $-A$ допускает асимптотическую резольвенту, удовлетворяющую (4.9), а $CD(A)$ плотно в $D(A)$, $D(C^{-1}AC) \subset D(A)$, т.е. из $Cx \in D(A)$ и $ACx \in R(C)$ следует, что $x \in D(A)$, то часть A_0 оператора A в $E_0 := \overline{D(A)}$ порождает локальную C -полугруппу на E_0 , причем C равен $C_0 := C|_{E_0}$.

В частности, при условии, что $\overline{CD(A)} = E$, генератор $-A$ порождает локальную C -полугруппу на E в том и только том случае, если $C^{-1}AC = A$ и существует асимптотическая C -резольвента, удовлетворяющая (4.9). В этом случае A плотно определен.

Замечание 4.1. Асимптотическая C -резольвента $L_\tau(\lambda)$ оператора $-A$ компактна для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ (а значит и для любого достаточно большого λ) в том и только том случае, если $\mathcal{S}(\cdot A)$ компактен и равномерно непрерывен на t . В самом деле, если $\mathcal{S}(\cdot A)$ компактен, то по (4.7) и [217], $L_\tau(\lambda)$ компактен. Обратно, беря производную $L_\tau(\lambda)$ по τ и используя то, что $\mathcal{S}(\cdot A)$ равномерно непрерывен по t , имеем, что $\mathcal{S}(\cdot A)$ компактен как равномерный предел компактных операторов. Это обстоятельство может быть использовано для аппроксимации полулинейных уравнений в случае C -полугруппового подхода (см. §6).

Рассмотрим абстрактную задачу Коши, заданную в (3.2).

Определение 4.4. Функция $u(\cdot)$ называется решением $(ACP; T, y)$, если $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема по $t \in [0, T)$, $u(t) \in D(A)$ для всех $0 \leq t < T$ и $u(\cdot)$ удовлетворяет (3.2). Обозначим $(ACP; T, y)$ с $y \in CD(A)$ также через $(ACP; T, CD(A))$.

Определение 4.5. Задача Коши $(ACP; T, CD(A))$ называется обобщенно корректной, если для всякого $y \in CD(A)$ существует единственное решение $u(\cdot; y)$ задачи $(ACP; T, y)$ такое, что $\|u(t; y)\| \leq M(t)\|C^{-1}y\|$ при $0 \leq t < T$ и $y \in CD(A)$, где функция $M(t)$ ограничена на каждом компактном подынтервале $[0, T)$.

Здесь следует подчеркнуть, что обобщенная корректность в смысле определения 4.5 является более общей, чем в случае задачи из (3.1). Кроме того, можно утверждать, что эта обобщенная корректность есть условие разрешимости для задачи (3.2), в которой существует регуляризатор.

Теорема 4.2 ([185]). Пусть C — ограниченная линейная инъекция на E , а A — замкнутый линейный оператор. Тогда эквивалентны следующие условия:

(I) Оператор $-A$ есть генератор локальной C -полугруппы;
 (II) $C^{-1}AC = A$ и задача $v'(t) = -Av(t) + Cx$, $t \in [0, T)$, $v(0) = 0$, имеет единственное решение для всякого $x \in X$. Если либо $\rho(A) \neq \emptyset$, либо A плотно определен, то (I) и (II) также эквивалентны условию

(III) $C^{-1}AC = A$ и задача $(ACP; T, CD(A))$ обобщенно корректна. Кроме того, $u(t; y) = C^{-1}\mathcal{S}(tA)y$, $t \in [0, T)$, — единственное решение для любого начального значения $y \in CD(A)$.

Так как локальные C -полугруппы являются регуляризаторами некорректной задачи (3.2), то очень важно иметь теорию аппроксимации локальных C -полугрупп.

4.2. Теорема о полудискретной аппроксимации. Рассмотрим в рамках общей схемы дискретизации полудискретную аппроксимацию задачи (3.2) в банаховых пространствах E_n :

$$\begin{aligned} u'_n(t) &= -A_n u_n(t), \quad t \in [0, T), \\ u_n(0) &= u_n^0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где операторы $-A_n$ являются генераторами локальных C_n -полугрупп, согласованных с оператором $-A$ и $u_n^0 \rightarrow u^0$. Согласованность понимается в смысле общей схемы аппроксимации как \mathcal{PP} -сходимость $C_n \rightarrow C$ и \mathcal{PP} -сходимость резольвент $(\tilde{\lambda} - A_n)^{-1} \rightarrow (\tilde{\lambda} - A)^{-1}$ для некоторого $\tilde{\lambda} \in \rho(A) \cap \rho(A_n)$. Напомним, что в нашем общем случае (4.1) такое $\tilde{\lambda}$ существует,

поскольку естественно предполагается, что выполнены условия (А) и (В) теоремы 3.1.

Теорема 4.3 ([212] (Теорема ABC-C)). *При условии $\overline{CD(A^2)} = E$ следующие условия (A_c) вместе с (B_c) эквивалентны условию (C_c) .*

(A_c) Согласованность. $C_n \rightarrow C$ и операторы A_n и A согласованы;

(B_c) Устойчивость. Для любого $0 < \tau < T$ существует некоторая постоянная M_τ , не зависящая от n , такая, что

$$\|S(tA_n)\| \leq M_\tau \text{ при } 0 \leq t \leq \tau \text{ и } n \in \mathbb{N};$$

(C_c) Сходимость. Для любого $0 < \tau < T$ имеем

$$\max_{t \in [0, \tau]} \|S(tA_n)x_n^0 - p_n S(tA)x^0\| = 0$$

при $n \rightarrow \infty$, как только $x_n^0 \rightarrow x^0$.

Замечание 4.2. В случае экспоненциально ограниченных C -полугрупп [83], [84] тривиальным образом можно заменить условие (A_c) на условие

(A') $C_n \rightarrow C$ и $(\tilde{\lambda} - A_n)^{-1}C_n \rightarrow (\tilde{\lambda} - A)^{-1}C$ для некоторого $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$; см. [222] по поводу деталей. Поскольку конструкция может быть проведена теперь с условием (A') , в этом случае не нужно предполагать что $(\tilde{\lambda} - A_n)^{-1} \rightarrow (\tilde{\lambda} - A)^{-1}$ для некоторого $\tilde{\lambda}$.

Замечание 4.3. Условие $\overline{CD(A^2)} = E$ было наложено для простоты. В общем случае получается сходимость на множестве $\overline{CD(A^2)}$. В случае интегрированной полугруппы такие ситуации хорошо исследованы, см., например, [52], [54]. На самом деле статья [52] посвящена следующему эффекту, обнаруженному при изучении сходимости полугрупп. Предположим, что задана последовательность равномерно ограниченных полугрупп $\{\exp(tA_n), t \geq 0\}$, $n \geq 1$ ($\|\exp(tA_n)\| \leq M$, $t \in \mathbb{R}_+$), действующих в банаховом пространстве E . Допустим далее, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - A_n)^{-1}x = S(\lambda)x$$

существует для любого $x \in E$. Если

$$\overline{\mathcal{R}(S(\lambda))} = E \tag{4.11}$$

($\mathcal{R}(S(\lambda))$ — общий для всех $\lambda > 0$), то рассматриваемые полугруппы сильно сходятся по теореме Троттера–Като. Можно также показать, что если ослабить условие (4.11), то предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(tA_n)x \tag{4.12}$$

будет существовать для всех $x \in \overline{\mathcal{R}(S(\lambda))}$ (см., например, [133], [89] с. 34, или [52], [54]). Как было замечено Т. Г. Курцем [133], для любого $x \in E$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \exp(sA_n) x ds. \quad (4.13)$$

В общем случае, тем не менее, нельзя ожидать выполнения (4.12) при $x \notin \overline{\mathcal{R}(S(\lambda))}$. Этот эффект конечно связан с теоремой Арендта или скорее с теоремой порождения для абсолютно непрерывных интегрированных полугрупп, приведенной в [56].

Рассмотрим полудискретизацию задачи (4.3) в банаховых пространствах E_n :

$$\begin{aligned} du_{n,\alpha}(t) &= -A_n u_{n,\alpha}(t) dt - \alpha A_n u_{n,\alpha}(t) dw(t), \\ u_{n,\alpha}(0) &= u_n^0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $u_n^0 \rightarrow u^0$, операторы A_n порождают аналитические полугруппы и $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), w(t)\}$ — стандартный одномерный винеровский процесс (броуновское движение). Как обычно, символ $\mathbb{E}[\cdot]$ обозначает математическое ожидание.

Подчеркнем, что рассматривается ситуация, в которой $\sigma(A_n), \sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma\left(\frac{3}{4}\pi\right)$.

Теорема 4.4 ([212]). *Пусть выполнены условия (A) и (B_1) теоремы 3.2 и пусть $\delta_n > 0$ — последовательность, сходящаяся к 0 при $n \rightarrow \infty$. Тогда существует последовательность α_n такая, что $u_{n,\alpha_n}(t) \rightarrow u(t)$ для любого $t \in [0, T]$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь $u_{n,\alpha_n}(\cdot)$ — решение (4.14), а $u(\cdot)$ — решение (4.2) с $u^0 \in \mathfrak{A}_c(A)$. Сходимость понимается в следующем смысле:*

$$\sup_{\|u_n^0 - p_n u^0\| \leq \delta_n} \|u_{n,\alpha_n}(t) - p_n u(t)\| \rightarrow 0, \quad \mathbb{P}\text{-почти наверное при } \delta_n \rightarrow 0.$$

4.3. Аппроксимация дискретными C -полугруппами. Следуя §3, обозначим через $\{T_n(\cdot)\}$ семейство дискретных полугрупп на E_n соответственно, т.е. $T_n(t) = T_n(\tau_n)^{k_n}$, где $k_n = [t/\tau_n]$. Определим генератор для $T_n(\cdot)$ по формуле $-A_n = \frac{1}{\tau_n}(T_n(\tau_n) - I)$ и рассмотрим процесс $\tau_n \rightarrow 0, k_n, n \rightarrow \infty$. Предположим, что $C_n \in B(E_n)$ — инъективный оператор такой, что $T_n C_n = C_n T_n$. Дискретная C_n -полугруппа $U_n(\cdot)$ определяется как $U_n(t) = T_n(t) C_n$. В этом пункте считаем также, что размерность каждого из пространств E_n конечна, но $\dim(E_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 4.5 ([212] (теорема ABC-C-discr)). При условии (A) теоремы 3.1 и в предположении, что $\overline{CD(A^2)} = E$, следующие условия (A_{cd}) и (B_{cd}) вместе взятые эквивалентны условию (C_{cd}) .

(A_{cd}) *Согласованность.* $C_n \rightarrow C$, операторы A_n и A согласованы и $A_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$;

(B_{cd}) *Устойчивость.* Для любого $0 < \tau < T$ существует некоторая постоянная M_τ , не зависящая от n , такая, что

$$\|U_n(t)\| \leq M_\tau \text{ при всех } 0 \leq t \leq \tau < T \text{ и } n \in \mathbb{N}$$

равномерно при любом выборе $\{\tau_n\}$ и $\{k_n\}$ как только $\tau_n \rightarrow 0$, и $k_n = \lfloor t/\tau_n \rfloor$;

(C_{cd}) *Сходимость.* Для любого $0 < \tau < T$,

$$\max_{t \in [0, \tau]} \|U_n(t)x_n^0 - p_n \mathcal{S}(tA)x^0\| \rightarrow 0$$

при $\tau_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ как только $x_n^0 \rightarrow x^0$.

Теорема 4.6 ([212]). Пусть выполнены условия (A_c) и (B_c) . Предположим, что выполнены условие (A) теоремы 3.1 и предположение $\overline{CD(A^2)} = E$, а также, что

$$\tau_n \|A_n^2 C_n^{-1}\| \leq \frac{q}{M_\tau T}$$

с $q < 1$. Тогда

$$\|U_n(t)\| \leq M_\tau (1 - q)^{-1} \text{ при } 0 \leq t \leq \tau < T \text{ и любом } n \in \mathbb{N}$$

равномерно для любого выбора $\{\tau_n\}$ и $\{k_n\}$ с $\tau_n \rightarrow 0$ как

только $k_n = \left\lfloor \frac{t}{\tau_n} \right\rfloor$. Кроме того, для любого $0 < \tau < T$,

$\max_{t \in [0, \tau]} \|U_n(t)x_n^0 - p_n \mathcal{S}(tA)x^0\| \rightarrow 0$ при $\tau_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ как только $x_n^0 \rightarrow x^0$.

Замечание 4.4. На самом деле схему $\overline{U}_n(t) \equiv (I + \tau_n A_n)^{-k_n} C_n$ в $t = k_n \tau_n$ можно построить даже при условии (3.4). В самом деле, $\tau_n A_n = \tau_n \lambda A_n (\lambda - A_n)^{-1} - \tau_n A_n^2 (\lambda - A_n)^{-1}$, а по выбору λ , можно сделать второй член меньшим, чем ϵ , и тогда, выбирая подходящим образом τ_n при фиксированном λ , получаем $\|\tau_n A_n\| \leq 2\epsilon$, так что схема $\overline{U}_n(\cdot)$ корректно определена.

Замечание 4.5. В отличие от корректного случая, для некорректных задач представляется, что явные и неявные методы дискретизации по времени не так уж и различаются в смысле выигрыша в устойчивости (ср. с теоремами 3.5, 3.6). Кроме того, при условии (3.4) из тождества

$$(I - \tau_n A_n)^{k_n} C_n = (I - \tau_n^2 A_n^2)^{k_n} (I + \tau_n A_n)^{-k_n} C_n$$

и неравенства $\|(I \pm \tau_n^2 A_n^2)^{k_n}\| \leq C e^{t \tau_n \|A_n^2\|}$, $t = k_n \tau_n$, вытекает, что свойства устойчивости явных и неявных методов одинаковы для некорректных задач.

Имеется множество стохастических конечно-разностных схем, которые можно написать для задачи (4.14). Например, некоторые наиболее простейшие из них — это

$$U_{n,\alpha}(t + \tau_n) - U_{n,\alpha}(t) = -\tau_n A_n U_{n,\alpha}(t) - \alpha \Delta w(t) A_n U_{n,\alpha}(t), \quad (4.15)$$

$$\bar{U}_{n,\alpha}(t + \tau_n) - \bar{U}_{n,\alpha}(t) = -\tau_n A_n \bar{U}_{n,\alpha}(t + \tau_n) - \alpha \Delta w(t) A_n \bar{U}_{n,\alpha}(t), \quad (4.16)$$

где $\Delta w(t) = (w(t) - w(t - \tau_n))$, $t = k_n \tau_n$, а $U_{n,\alpha}(0) = \bar{U}_{n,\alpha}(0) = I_n$.

Теорема 4.7 ([212]). Пусть выполнены условия (A) и (B_1) теоремы 3.2. Предположим, что условия устойчивости (3.4) и

$$\tau_n \|A_n^2\| e^{c\|A_n\|} = O(1)$$

выполняются для некоторой постоянной $c > 0$. Тогда при $\alpha_n = \sqrt{\tau_n}$ схема (4.15) устойчиво ведет себя в следующем смысле:

$$\eta_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup \left\{ \mathbb{E} \left[\left\| U_{n,\alpha_n}(t) u_n^0 - \exp(-t A_n + \alpha_n (w(t) - w(0)) A_n - \frac{t}{2} \alpha_n^2 A_n^2) u_n^0 \right\| \right] : \|u_n^0\| \leq 1 \right\} \rightarrow 0,$$

и сходится в следующем смысле:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\|U_{n,\alpha_n}(t) u_n^0 - p_n u(t)\| \right] \leq \\ & \leq C \left(\sqrt{\tau_n} \|A \exp(-TA) u^0\| + \|u_{n,\alpha_n}(t) - p_n u_{\alpha_n}(t)\| + \eta_n \|u_n^0\| \right), \\ & 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Для схемы $\bar{U}_{n,\alpha_n}(\cdot)$ применяются аналогичные понятия.

Можно также изучить сходимость более сложных численных методов. Например, в [64] для аппроксимации (4.14) рассматривалась следующая схема Рунге–Кутты:

$$\begin{aligned} Y_1 &= U_{n,\alpha}(t) + \sqrt{\tau_n} \alpha A_n U_{n,\alpha}(t), \\ U_{n,\alpha}(t + \tau_n) - U_{n,\alpha}(t) &= -\tau_n A_n U_{n,\alpha}(t) + \alpha \Delta w(t) A_n U_{n,\alpha}(t) + \\ &+ \frac{\sqrt{\tau_n}}{2} \left(\frac{(\Delta w(t))^2}{\sqrt{\tau_n}} - 1 \right) \left(\alpha_n A_n Y_1 - \alpha A_n U_{n,\alpha}(t) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Поэтому решение можно записать в виде

$$U_{n,\alpha}(t + \tau_n) = (I_n - \tau_n A_n - \frac{\alpha^2 \tau_n}{2} A_n^2)^{k_n} \times \\ \times \prod_{k=1}^{k_n} \left(I_n + Z_n^{-1} \alpha \Delta w(t) A_n + (Z_n^{-1}/2) \alpha^2 \Delta w(t)^2 A_n^2 \right) U_{n,\alpha}(0), \quad (4.18)$$

где

$$Z_n = \left(I_n - \tau_n A_n - \frac{\alpha^2 \tau_n}{2} A_n^2 \right).$$

Теорема 4.8 ([64]). Пусть выполнены условия (А) и (В) теоремы 3.2. Предположим, что условия устойчивости (3.4) и

$$\tau_n \|A_n^2\| e^{c\|A_n\|} = O(1)$$

выполняются для некоторой постоянной $c > 0$. Тогда при $\alpha_n = \sqrt{\tau_n}$ схема (4.18) ведет себя устойчиво в следующем смысле:

$$\eta_n := \sup \{ \mathbb{E} [\|U_{n,\alpha_n}(t) u_n^0 - e^{(-tA_n + \alpha_n(w(t) - w(0))A_n - \frac{t}{2} \alpha_n^2 A_n^2)} u_n^0\|] : \\ \|u_n^0\| \leq 1 \} \rightarrow 0,$$

и сходится в следующем смысле:

$$\mathbb{E} [\|U_{n,\alpha_n}(t) u_n^0 - p_n u(t)\|] \leq \\ \leq C \sqrt{\tau_n} \|A \exp(-TA) u^0\| + \|u_{n,\alpha_n}(t) - p_n u_{\alpha_n}(t)\| + C \eta_n \|u_n^0\|, \\ 0 < t \leq T.$$

В случае корректной задачи

$$\begin{cases} du_\alpha(t) = Au_\alpha(t)dt + \alpha Au_\alpha(t)dw(t), \\ u(0) = u^0, \end{cases} \quad (4.19)$$

где оператор A порождает аналитическую C_0 -полугруппу, полудискретная и полностью дискретная схемы не нуждаются в дополнительных предположениях об устойчивости и порядок сходимости определяется в точности условием совместимости схемы. Точнее, член $e^{\lambda t}$, стоящий под знаком интеграла, приводит к абсолютной сходимости интеграла независимо от поведения α на любом компактном множестве. Например, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.9 ([64]). Пусть выполнены условия (А) и (В'') теоремы 3.2. Предположим, что выполняются условия устойчивости (3.4) для некоторой постоянной $C > 0$. Тогда для лю-

бого $\alpha_n \in [0, \alpha']$ схема типа (4.18) устойчиво ведет себя в следующем смысле:

$$\sup\{\mathbb{E}[\|U_{n,\alpha_n}(t)u_n^0 - e^{(tA_n + \alpha_n(w(t) - w(0))A_n - \frac{t}{2}\alpha_n^2 A_n^2)}u_n^0\|] : \|u_n^0\| \leq 1\} \leq \tau_n,$$

и сходится в следующем смысле:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\|U_{n,\alpha_n}(t)u_n^0 - p_n \exp(tA)u^0\|] \leq \\ & \leq C\alpha_n \|A \exp(tA)u^0\| + \|u_{n,\alpha_n}(t) - p_n u_{\alpha_n}(t)\| + C\tau_n \|u_n^0\|, \\ & 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

§ 5. Неравенства коэрцитивности

Рассмотрим следующую неоднородную задачу Коши в банаховом пространстве E :

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

с оператором A , порождающим C_0 -полугруппу, и с некоторой функцией $f(\cdot)$ из $[0, T]$ в E . Задачу (5.1) можно рассматривать в различных функциональных пространствах. Наиболее популярные ситуации — это следующие постановки: корректность в пространствах $C([0, T]; E)$, $C^{\alpha,0}([0, T]; E)$ и $L^p([0, T]; E)$ (см. [33], [45], [156], [214]).

Говорят, что задача (5.1) корректна, скажем, в $C([0, T]; E)$, если для любого $f(\cdot) \in C([0, T]; E)$ и любого $u_0 \in D(A)$

i) задача (5.1) однозначно разрешима, т.е. $u(\cdot)$ удовлетворяет уравнению и краевому условию (5.1), $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, $u(t) \in D(A)$ при любом $t \in [0, T]$, а $Au(\cdot)$ непрерывна на $[0, T]$;

ii) оператор $(f(\cdot), u^0) \rightarrow u(\cdot)$, рассматриваемый как оператор из $C([0, T]; E) \times D(A)$ в $C([0, T]; E)$, непрерывен.

В случае $u^0 \equiv 0$, коэрцитивная корректность в $C([0, T]; E)$ означает, что $\|Au(\cdot)\|_{C([0, T]; E)} \leq c\|f(\cdot)\|_{C([0, T]; E)}$. В общем случае, коэрцитивная корректность в пространстве $\Upsilon([0, T]; E)$ для задачи (5.1) означает, что она корректна в пространстве $\Upsilon([0, T]; E)$ и

$$\|u'(\cdot)\|_{\Upsilon([0, T]; E)} + \|Au(\cdot)\|_{\Upsilon([0, T]; E)} \leq C(\|f(\cdot)\|_{\Upsilon([0, T]; E)} + \|u^0\|_F),$$

где F — некоторое подпространство в E . По поводу результатов о коэрцитивной корректности см. [33], [45], [156].

Полудискретная аппроксимация (5.1) — это следующие задачи Коши в банаховых пространствах E_n :

$$\begin{aligned} u'_n(t) &= A_n u_n(t) + f_n(t), \quad t \in [0, T], \\ u_n(0) &= u_n^0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

с операторами A_n , порождающими C_0 -полугруппы, причем A_n и A согласованы, $u_n^0 \rightarrow u^0$ и $f_n \rightarrow f$ в подходящем смысле. Следуя разделу 3, естественно считать, что выполнены условия (A) и (B_1) .

Опишем здесь дискретизацию по времени для (5.2). Простая разностная схема (схема Рунге) — это схема

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_n^k - \bar{U}_n^{k-1}}{\tau_n} &= A_n \bar{U}_n^k + \varphi_n^k, \quad k \in \left\{1, \dots, \left[\frac{T}{\tau_n}\right]\right\}, \\ \bar{U}_n^0 &= u_n^0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где, например, в случае $f_n(\cdot) \in C([0, T]; E_n)$ можно положить

$$\varphi_n^k = f_n(k\tau_n), \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad K = \left[\frac{T}{\tau_n}\right],$$

а в случае $f_n \in L^1([0, T]; E_n)$, — положить

$$\varphi_n^k = \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_n(s) ds, \quad t_k = k\tau_n, \quad k \in \{1, \dots, K\}.$$

5.1. Неравенство коэрцитивности в пространствах $C_{\tau_n}([0, T]; E_n)$. Обозначим через $C_{\tau_n}([0, T]; E_n)$ пространство элементов $\bar{\varphi}_n = \{\varphi_n^k\}_{k=0}^K$ таких, что $\varphi_n^k \in E_n, k \in \{0, \dots, K\}$, снабженное нормой $\|\bar{\varphi}_n\|_{C_{\tau_n}([0, T]; E_n)} = \max_{0 \leq k \leq K} \|\varphi_n^k\|_{E_n}$.

Напомним, что коэрцитивная корректность в $C([0, T]; E)$ влечет, что [45] A порождает аналитическую C_0 -полугруппу.

Теорема 5.1 ([45]). Пусть выполнено условие (B_1) . Тогда задача (5.3) устойчива в пространстве $C_{\tau_n}([0, T]; E_n)$, т.е..

$$\|\bar{U}_n\|_{C_{\tau_n}([0, T]; E_n)} \leq C \left(\|\bar{\varphi}_n\|_{C_{\tau_n}([0, T]; E_n)} + \|u_n^0\| \right).$$

Теорема 5.2 ([45]). Пусть выполнено условие (B_1) . Тогда задача (5.3) почти коэрцитивно устойчива в пространстве $C_{\tau_n}([0, T]; E_n)$, т.е.

$$\begin{aligned} \|A_n \bar{U}_n\|_{C_{\tau_n}([0, T]; E_n)} &\leq M \left(\|A_n u_n^0\|_{E_n} + \right. \\ &\left. + \min \left(\ln(1/\tau_n), 1 + \left| \ln \|A_n\| \right| \right) \|\bar{\varphi}_n\|_{C_{\tau_n}([0, T]; E_n)} \right). \end{aligned}$$

Следует отметить, что если (5.1) коэрцитивно корректно поставлена в пространстве $C([0, T]; E)$, то [88] оператор A должен быть ограничен либо пространство E содержит подпространство, изоморфное c_0 . Вообще говоря, это означает, что задача (5.3) не коэрцитивно корректна в пространстве $C_{\tau_n}([0, T]; E_n)$.

Для явной схемы

$$\begin{aligned} \frac{U_n^k - U_n^{k-1}}{\tau} &= A_n U_n^{k-1} + \varphi_n^k, \quad k \in \{1, \dots, K\}, \\ U_n^0 &= u_n^0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

теорема 5.2 может быть передоказана, однако, при выполнении условия устойчивости.

Теорема 5.3 ([45]). Пусть выполнено условие (B_1) и пусть $\tau_n \ln \left(\frac{1}{\tau_n} \right) \|A_n\| \leq \epsilon$ для достаточно малого $\epsilon > 0$. Тогда задача (5.4) почти коэрцитивно устойчива в пространстве $C_{\tau_n}([0, T]; E_n)$, т.е.

$$\begin{aligned} \|A_n U_n\|_{C_{\tau_n}([0, T]; E_n)} + \|U_n\|_{C_{\tau_n}([0, T]; E_n), 1 - \frac{1}{\ln \frac{1}{\tau_n}}} &\leq \\ &\leq M \left(\|A_n u_n^0\|_{E_n, 1 - \frac{1}{\ln \frac{1}{\tau_n}}} + \right. \\ &\left. + \min \left(\ln(1/\tau_n), 1 + \left| \ln \|A_n\| \right| \right) \|\bar{\varphi}_n\|_{C_{\tau_n}([0, T]; E_n)} \right), \end{aligned}$$

где

$$\|u_n\|_{E_{n, \alpha}} = \left(\int_0^\infty \|A_n \exp(tA_n) u_n\|_{E_n}^{\frac{1}{1-\alpha}} dt \right)^{1-\alpha}.$$

Замечание 5.1. Пространство $E_{n, \alpha}$ с эквивалентной нормой совпадает с вещественным интерполяционным пространством $(E_n, D(A_n))_{1-1/p, p}$, см. [156].

5.2. Неравенства коэрцитивности в пространствах $C_{\tau_n}^{\alpha, 0}([0, T]; E_n)$. Обозначим через $C_{\tau_n}^{\alpha, 0}([0, T]; E_n)$, $0 < \alpha < 1$, пространство элементов $\bar{\varphi}_n$ с нормой

$$\begin{aligned} \|\bar{\varphi}_n\|_{C_{\tau_n}^{\alpha, 0}([0, T]; E_n)} &= \max_{0 \leq k \leq K} \|\varphi_n^k\|_{E_n} + \\ &+ \max_{1 \leq k < k+l \leq K} \|\varphi_n^{k+l} - \varphi_n^k\|_{E_n} (\tau_n k)^\alpha (l\tau_n)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Теорема 5.4 ([22]). Пусть выполнено условие (B_1) . Тогда схема (5.3) коэрцитивно корректна в $C_{\tau_n}^{\alpha, 0}([0, T]; E_n)$ с $0 < \alpha < 1$.

1, т.е.

$$\|A_n \bar{U}_n\|_{C_{\tau_n}^{\alpha,0}([0,T];E_n)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \left(\|A_n u_n^0\|_{E_n} + \|\bar{\varphi}_n\|_{C_{\tau_n}^{\alpha,0}([0,T];E_n)} \right).$$

Грубо говоря, предположение (B_1) необходимо и достаточно для коэрцитивной корректности в пространстве $C_{\tau_n}^{\alpha,0}([0,T];E_n)$.

5.3. Неравенство коэрцитивности в пространствах $L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)$. Обозначим через $L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)$, $1 \leq p < \infty$, пространство элементов $\bar{\varphi}_n$ с нормой

$$\|\bar{\varphi}_n\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)} = \left(\sum_{j=0}^K \|\varphi_n^j\|_{E_n}^p \tau_n \right)^{1/p}.$$

Теорема 5.5 ([22]). Пусть выполнено условие (B_1) . Предположим, что разностная схема (5.3) коэрцитивно корректна для некоторого $1 < p_0 < \infty$ в пространстве $L_{\tau_n}^{p_0}([0,T];E_n)$. Тогда она коэрцитивно корректна в $L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)$ для любого $1 < p < \infty$ и

$$\begin{aligned} \|A_n \bar{U}_n\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)} + \max_{0 \leq k \leq K} \|\bar{U}_n^k\|_{E_{n,1-1/p}} &\leq \\ &\leq \frac{Mp^2}{p-1} \left(\|\bar{\varphi}_n\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)} + \|\bar{U}_n^0\|_{1-1/p} \right). \end{aligned}$$

Следует отметить, что, в отличие от случая пространства $C^{\alpha,0}$, одной только аналитичности полугруппы $\exp(\cdot A)$ не достаточно для коэрцитивной корректности в пространстве L^p [144], так что для установления коэрцитивной корректности в L^p нужны дополнительные предположения.

Теорема 5.6 ([22]). Пусть $1 < p, q < \infty$, $0 < \alpha < 1$, и пусть выполнено условие (B_1) . Тогда разностная схема (5.3) коэрцитивно корректна в $L_{\tau_n}^p([0,T];E_{n,\alpha,q})$, т.е.

$$\begin{aligned} \|A_n \bar{U}_n\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_{n,\alpha,q})} + \max_{0 \leq k \leq K} \|U_n^k\|_{E_{n,1-1/p}} &\leq \\ &\leq \frac{Mp^2}{(p-1)\alpha(1-\alpha)} \left(\|\bar{\varphi}_n\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_{n,\alpha,q})} + \|U_n^0\|_{1-1/p} \right), \end{aligned}$$

где $E_{n,\alpha,q}$ — интерполяционное пространство $(E_n, D(A_n))_{\alpha,q}$ с нормой

$$\|u_n\|_{E_{n,\alpha,q}} = \left(\int_0^\infty \|\lambda^\alpha A_n (\lambda - A_n)^{-1}\|_{E_n}^q \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{1/q}.$$

Для общего банахова пространства E справедливы следующие результаты. Пусть A — генератор аналитической полугруппы $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}_+$, линейных ограниченных операторов с

экспоненциально убывающей нормой при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что выполнено условие устойчивости (B_1'') с $\omega'' \leq 0$.

Теорема 5.7 ([44]). Пусть выполнено условие (B_1) . Тогда решение разностной схемы (5.3) почти коэрцитивно устойчиво, т.е. неравенство

$$\|A_n \bar{U}_n\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)} \leq M \left(\|A_n \bar{U}_n^0\|_{E_n} + \min \left\{ \ln \frac{1}{\tau_n}, 1 + |\ln \|A_n\|_{B(E_n)}| \right\} \|\varphi_n\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)} \right)$$

выполняется для любого $p \geq 1$, где M не зависит от τ_n, u_n^0 и φ_n .

Конечно, для схем типа

$$\frac{U_n^k - U_n^{k-1}}{\tau_n} = A_n \left(\frac{U_n^k + U_n^{k-1}}{2} \right) + \varphi_n^k, \quad n \in \{1, \dots, K\}, \quad (5.5)$$

$$U_n^0 = u_n^0.$$

можно рассматривать коэрцитивную корректность.

Теорема 5.8 ([44]). Пусть выполнено условие (B_1) . Тогда решение разностной схемы (5.5) почти коэрцитивно устойчиво, т.е. оценка

$$\left\| \left\{ A_n \frac{U_n^j + U_n^{j-1}}{2} \right\} \right\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)} \leq M \left(\|A_n u_n^0\|_{E_n} + \min \left\{ \ln \frac{1}{\tau_n}, 1 + |\ln \|A_n\|_{E_n \mapsto E_n}| \right\} \|\varphi_n\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)} \right)$$

выполняется для любого $p \geq 1$, где M не зависит от τ_n, u_n^0 , and φ_n .

Теорема 5.9 ([44]). Пусть выполнено условие (B_1) и пусть справедливо условие (3.6). Тогда решение разностной схемы (5.5) почти коэрцитивно устойчиво, т.е. оценка

$$\|A_n U_n\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)} \leq M \left(\|A_n u_n^0\|_{E_n} + \min \left\{ \ln \frac{1}{\tau_n}, 1 + |\ln \|A_n\|_{E_n \mapsto E_n}| \right\} \|\varphi_n\|_{L_{\tau_n}^p([0,T];E_n)} \right)$$

выполняется для любого $p \geq 1$, где M не зависит от τ_n, u_n^0 и φ_n .

Необходимое и достаточное условие коэрцитивной корректности задачи (5.1) в $L^p([0,T];E)$ было получено в [219], [218],

[119]. Более точно, скажем, что банахово пространство E обладает UMD-свойством, если преобразование Гильберта

$$Hf(t) = \frac{1}{\pi}PV - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-s} f(s)ds$$

продолжается до ограниченного оператора в $L^p(\mathbb{R}; E)$ для некоторого (для всех) $p \in (1, \infty)$. Хорошо известно, что все пространства $L^q(\Omega, \mu)$ (и их факторпространства) с $1 < q < \infty$ обладают этим свойством.

Полугруппа Пуассона на $L^1(\mathbb{R})$ и на $L^p(\mathbb{R}; E)$ не коэрцитивно корректна на пространстве $L^p(\mathbb{R}, E)$, если E не является UMD-пространством (см. [144]). Следовательно, требование, что E — UMD-пространство, является необходимым в некотором смысле условием.

Однако нерешенной задачей оставался вопрос о том, каждый ли генератор аналитической полугруппы на $L^q(\Omega, \mu)$, $1 < q < \infty$, дает коэрцитивную корректность в $L^p(\mathbb{R}; E)$. Недавно Калтон и Ласен [121] получили строго отрицательный ответ на этот вопрос. Если каждая ограниченная аналитическая полугруппа на банаховом пространстве E такова, что задача (5.1) коэрцитивно корректна, то E изоморфно гильбертовому пространству.

Если A порождает ограниченную аналитическую полугруппу $\{\exp(zA) : |\arg(z)| \leq \delta\}$ на банаховом пространстве E , то следующие три множества ограничены в операторной норме:

- i) $\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in i\mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$;
- ii) $\{\exp(tA), tA \exp(tA) : t > 0\}$;
- iii) $\{\exp(zA) : |\arg z| \leq \delta\}$.

В гильбертовых пространствах отсюда всегда следует коэрцитивная корректность в $L^p(\mathbb{R}_+; E)$, но и только в гильбертовых пространствах E . Дополнительное предположение, необходимое нам для более общих банаховых пространств E , — это R -ограниченность.

Множество $\mathcal{T} \subset B(E)$ называется R -ограниченным, если существует постоянная $C < \infty$ такая, что для всех $Z_1, \dots, Z_k \in \mathcal{T}$ и $x_1, \dots, x_k \in E$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=0}^k r_j(u) Z_j(x_j) \right\| du \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{j=0}^k r_j(u) x_j \right\| du, \quad (5.6)$$

где $\{r_j\}$ — последовательность независимых симметричных $\{-1, 1\}$ -значных случайных величин, например, функции Радемахера $r_j(t) = \text{sign}(\sin(2^j \pi t))$ на $[0, 1]$. Наименьшее C такое, что выполнено (5.6) называется постоянной R -ограниченности \mathcal{T} и обозначается через $R(\mathcal{T})$.

Теорема 5.10 ([219]). Пусть A порождает ограниченную аналитическую полугруппу $\exp(tA)$ на UMD-пространстве E . Тогда задача (5.1) коэрцитивно корректна в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+; E)$ в том и только том случае, если одно из приведенных выше множеств (i), (ii) или (iii) R -ограничено.

Интерпретация дискретного неравенства коэрцитивности и дискретной полугруппы определяет оператор свертки как

$$\check{A}_n \Sigma_{j=0}^k T_n^{k-j} Q_n \varphi_n \tau_n$$

с некоторым ограниченным оператором $Q_n \in B(E_n)$, имеющим обычно свойство гладкости, как это видно из доказательств теорем 5.7 и 5.8. Здесь $T_n(\tau_n)^k$ — дискретная полугруппа, скажем, как в п. 3.1. Ограниченность оператора свертки в пространстве $L_{\tau_n}^p(\mathbb{Z}_+; E_n)$ влечет дискретную коэрцитивную корректность в $L_{\tau_n}^p(\mathbb{Z}_+; E_n)$.

Предположим также, что банаховы пространства E_n в этом пункте удовлетворяют совместному UMD-свойству, т.е. считаем, что преобразования Гильберта

$$H_n f_n(t) = \frac{1}{\pi} PV - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-s} f_n(s) ds$$

продолжаются до ограниченных операторов в $L^p(\mathbb{R}; E_n)$ при некотором (при всех) $p \in (1, \infty)$ таких, что все они ограничены постоянной, не зависящей от n . Это предположение выполнено, например, если все E_n вкладываются в фиксированное пространство $L^p(\Omega)$ с $1 < p < \infty$.

Определение 5.1. Дискретная полугруппа $T_n(\cdot)$ с генератором \check{A}_n порождает коэрцитивную корректность на пространстве $L_{\tau_n}^p(\mathbb{Z}_+; E_n)$, если соответствующий оператор свертки

$$\varphi_n \mapsto \{\check{A}_n \Sigma_{j=0}^k T_n^{k-j} Q_n \varphi_n^j \tau_n\}$$

непрерывен на пространстве $L_{\tau_n}^p(\mathbb{Z}_+; E_n)$.

Теорема 5.11 ([44]). Предположим, что для оператора свертки $\varphi_n \mapsto \{\check{A}_n \Sigma_{j=0}^k T_n^{k-j} Q_n \varphi_n^j \tau_n\}$ выполняются следующие условия:

1⁰. Множество $\{\check{A}_n(\lambda - T_n)^{-1} Q_n \tau_n : |\lambda| = 1, \lambda \neq 1, \lambda \neq -1\}$ R -ограничено;

2⁰. Множество $\{(\lambda - 1)(\lambda + 1) \check{A}_n(\lambda - T_n)^{-2} Q_n \tau_n : |\lambda| = 1, \lambda \neq -1\}$ R -ограничено.

Тогда дискретная полугруппа $T_n(\cdot)$ порождает коэрцитивную корректность на пространстве $L_{\tau_n}^p(\mathbb{Z}_+; E_n)$.

Теорема 5.12 ([44]). Пусть E_n — UMD банаховы пространства. Предположим, что множество

$$\{\lambda(\lambda - A_n)^{-1} : \lambda \in i\mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$$

R -ограничено с постоянной R -ограниченности, не зависящей от n . Тогда решение разностной схемы (5.3) коэрцитивно устойчиво, т.е.

$$\|\check{A}_n \bar{U}_n\|_{L_{\tau_n}^p(\mathbb{Z}_+; E_n)} \leq M \|\varphi_n\|_{L_{\tau_n}^p(\mathbb{Z}_+; E_n)} \quad (5.7)$$

выполняется для всех $p \geq 1$, где M не зависит от τ_n, u_n^0 и φ_n .

Замечание 5.2. Следует отметить, что теорема 3.2 может быть переформулирована в терминах R -ограниченности с заменой условия (B_1) на следующее условие: существует $0 < \theta < \pi/2$ такое, что множество

$$\{\lambda(\lambda - A_n)^{-1} : \lambda \in \Sigma(\theta + \pi/2)\}$$

R -ограничено с постоянной R -ограниченности не зависящей от n . Условие (C_1) можно записать в следующем виде (согласно [219, теорема 4.2]): $\exp(tA_n) \rightarrow \exp(tA)$ сходится для любого $t \in \mathbb{R}$ и существует $0 < \theta < \pi/2$ такое, что множество $\{\exp(zA_n) : z \in \Sigma(\theta)\}$ R -ограничено с постоянной R -ограниченности, не зависящей от n . Значит, одно из предположений теорем 5.12 и 5.13 — это в некотором смысле условие (B_1) измененное для условия R -ограниченности.

Теорема 5.13 ([44]). Пусть E_n — UMD банаховы пространства. Предположим также, что множество

$$\{\lambda(\lambda - A_n)^{-1} : \lambda \in i\mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$$

R -ограничено с постоянной R -ограниченности не зависящей от n . Тогда решение разностной схемы (5.5) коэрцитивно устойчиво, т.е.

$$\left\| \left\{ \check{A}_n \frac{U_n^k + U_n^{k-1}}{2} \right\} \right\|_{L_{\tau_n}^p([0, T]; E_n)} \leq M \|\varphi_n\|_{L_{\tau_n}^p([0, T]; E_n)} \quad (5.8)$$

выполняется для любого $p \geq 1$, где M не зависит от τ_n, u_n^0 и φ_n .

Замечание 5.3. Анализируя доказательства теорем 5.12 и 5.13, легко увидеть, что можно положить $\check{A}_n = A_n$ в утверждениях (5.7) и (5.8). Кроме того, утверждение (5.8) можно записать в виде

$$\|\check{A}_n U_n\|_{L_{\tau_n}^p([0, T]; E_n)} \leq M \|\varphi_n\|_{L_{\tau_n}^p([0, T]; E_n)}.$$

Доказательство этого факта основано на равенстве

$$\check{A}_n = A_n(I_n - \frac{\tau_n}{2}A_n)^{-1}.$$

Можно рассмотреть более общие разностные схемы Паде [45] при $p = q - 1$ или при $p = q - 2$. В этом случае разностная схема записывается в виде

$$\frac{U_n^k - U_n^{k-1}}{\tau_n} = (\check{A}_n U_n)^{k-1} + \varphi_n^{p,q,k}, \quad U_n^0 = u_n^0, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (5.9)$$

где $(\check{A}_n U_n)^k = \left(\frac{R_{p,q}(\tau_n A_n) - I}{\tau_n} U_n \right)^{k-1}$ и $\|\varphi_n^k - \varphi_n^{p,q,k}\|_{E_n} \leq M \tau_n^{p+q}$. Для формулировки утверждений о коэрцитивности пп. 5.1–5.3 теперь нужно изменить оператор A_n на \check{A}_n . Из теоремы 3.16 следует, что при условии (B_1) с $p = q$ аппроксимация Паде устойчива, но, вообще говоря, не коэрцитивно устойчива. Для того, чтобы получить неравенство коэрцитивности, нужно условие (3.6). Пространства, в которых рассматривается задача, могут быть также весьма различными [45].

5.4. Неравенство коэрцитивности в $B_{\tau_n}([0, T]; C_h^\theta(\Omega_h)) \cap C_h([0, T]; C_h(\bar{\Omega}_h))$. С точки зрения численного анализа весьма интересным бы было рассмотреть задачу (5.1) в пространстве $\Upsilon([0, T]; E)$ таком, что E более гладко, чем $C(\Omega)$ (элементы такого пространства должны хорошо аппроксимироваться), а $\Upsilon([0, T]; E)$ должно быть пространством типа $C([0, T]; E)$ или пространством ограниченных функций. Интересно, что такая ситуация действительно возможна, по крайней мере, для эллиптического оператора второго порядка с коэффициентами класса $C^\theta(\bar{\Omega})$. Поскольку в таком пространстве E оператор $(p_n v)_i = v(ih)$ весьма конкретен, т.е. принимает значения в точках сетки, то в этом разделе обозначение p_n опускается

Теорема 5.14 ([58]). *Пусть Ω — открытое ограниченное подмножество \mathbb{R}^d , лежащее по одну сторону от его топологической границы $\partial\Omega$, являющейся подмногообразием в \mathbb{R}^d размерности $d - 1$ и класса $C^{2+\theta}$ для некоторого $\theta \in (0, 2) \setminus \{1\}$. Пусть*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

— *сильно эллиптический оператор второго порядка (значит,*

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \xi^\alpha \geq \nu |\xi|^2$$

для некоторого $\nu > 0$ и для любого $(x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^d$ с коэффициентами класса $C^\theta(\overline{\Omega})$. Тогда существуют $\mu \geq 0$, $\phi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ такие, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| \geq \mu$ и $|\operatorname{Arg} \lambda| \leq \phi_0$ задача

$$\begin{aligned}\lambda v - \mathcal{A}v &= y, \\ \gamma_0 v &= 0,\end{aligned}$$

имеет единственное решение v принадлежащее $C^{2+\theta}(\overline{\Omega})$ для любого $y \in C^\theta(\overline{\Omega})$ и для некоторого $M > 0$,

$$\begin{aligned}|\lambda|^{1+\frac{\theta}{2}}\|v\|_{C(\overline{\Omega})} + |\lambda|\|v\|_{C^\theta(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C^{2+\theta}(\overline{\Omega})} &\leq \\ &\leq M\left(\|y\|_{C^\theta(\overline{\Omega})} + |\lambda|^{\frac{\theta}{2}}\|\gamma_0 y\|_{C(\partial\Omega)}\right),\end{aligned}\tag{5.10}$$

где γ_0 — оператор следа на $\partial\Omega$.

Из (5.10) ясно, что оператор \mathcal{A} , вообще говоря, не порождает C_0 -полугруппу в пространстве $E = C^\theta(\overline{\Omega})$, но, следуя, скажем, [156], можно построить аналитическую полугруппу $\exp(t\mathcal{A})$, $t \geq 0$.

Пусть $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$, а E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Для сеточной функции $U : \mathcal{I} \rightarrow E$, записывая U_j или $(U)_j$ вместо $U(j)$ для любого $j \in \mathcal{I}$, положим

$$B(\mathcal{I}; E) := \{U : \mathcal{I} \rightarrow E : \sup_{j \in \mathcal{I}} \|U_j\| < +\infty\}, \quad \|U\|_{B(\mathcal{I}; E)} := \sup_{j \in \mathcal{I}} \|U_j\|.$$

Легко видеть, что $B(\mathcal{I}; E)$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{B(\mathcal{I}; E)}$. Если множество \mathcal{I} — некоторый интервал, скажем, $\mathcal{I} = (a, \infty)$, то обозначим через $B(\mathcal{I}; E)$ множество всех ограниченных функций из \mathcal{I} в E .

Для сеточной функции $U : \mathcal{I} \rightarrow E$ и для $h > 0$ определим оператор ∂_h по формуле

$$(\partial_h U)_j := h^{-1}(U_{j+1} - U_j).$$

Для любого $m \in \mathbb{Z}$ положим

$$(\partial_h^m U)_j := h^{-m} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^{m-i} U_{j+i}.$$

Если $U \in B(\mathcal{I}; E)$, то полагаем

$$\|U\|_{C_h^m(\mathcal{I}; E)} := \max \left\{ \|\partial_h^r U\|_{B(\mathcal{I}; E)} : 0 \leq r \leq m \right\}.$$

Наконец, пусть $\theta \in (0, 1)$. Определим

$$[U]_{C_h^\theta(\mathcal{I}; E)} := \sup \left\{ \left((k-j)h \right)^{-\theta} \|U_k - U_j\| : j, k \in \mathcal{I}, j < k \right\}$$

и, если $m \in \mathbb{N}_0$, то

$$\|U\|_{C_h^{m+\theta}(\mathcal{I};E)} := \max \left\{ \|U\|_{C_h^m(\mathcal{I};E)}, [\partial_h^m U]_{C_h^\theta(\mathcal{I},E)} \right\}.$$

В этом контексте $B(\mathcal{I}; E)$ обозначаем как $C_h^0(\mathcal{I}; E)$. Если $E = \mathbb{C}$, то пишем просто $B(\mathcal{I})$ от $C_h^0(\mathcal{I})$.

Пусть $f \in B(\mathbb{N}; E)$. обозначим через \tilde{f} прдложение f на \mathbb{N}_0 такое, что $\tilde{f}_0 = 0$. Для неотрицательного вещественного числа ω определим

$$\|f\|_{C_{h,0}^\omega(\mathbb{N};E)} := \|\tilde{f}\|_{C_h^\omega(\mathbb{N}_0;E)}. \quad (5.11)$$

Пусть теперь $L > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, а $h = \frac{L}{n}$. При $j \in \mathcal{I} := \{1, \dots, n-1\}$ пусть заданы комплексные числа a_j, b_j, b'_j, c_j , удовлетворяющие следующим условиям (ι) :

$(\iota 1)$: существует $\nu > 0$ такое, что $\operatorname{Re}(a_j) \geq \nu$ для любого $j \in \mathcal{I}$;

$(\iota 2)$: $\max \left\{ |a_j|, |b_j|, |b'_j|, |c_j| \right\} \leq Q$ для любого $j \in \mathcal{I}$ с $Q > \nu$;

$(\iota 3)$: существует $\omega : [0, L] \rightarrow [0, +\infty)$ такое, что $\omega(0) = 0$, а ω непрерывно в 0 так, что для $j, k \in \mathcal{I}$ с $j \leq k$,

$$|a_k - a_j| \leq \omega((k-j)h).$$

При $\lambda \in \mathbb{C}$ изучим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \lambda U_j - a_j(\partial_h^2 U)_{j-1} - b_j(\partial_h U)_j - b'_j(\partial_h U)_{j-1} - c_j U_j &= f_j \\ \text{при } j &= 1, \dots, n-1, \\ U_0 &= U_n = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

С этой целью положим $\overline{\mathcal{I}} := \{0, 1, \dots, n-1, n\}$ и для $U \in B(\mathcal{I}; E)$, определим

$$\tilde{U}_j = \begin{cases} U_j, & \text{если } j \in \mathcal{I}, \\ 0, & \text{если } j \in \{0, n\}. \end{cases}$$

Введем оператор A_h в $B(\mathcal{I}; E)$, определяемый следующим образом:

$$(A_h U)_j := a_j(\partial_h^2 \tilde{U})_{j-1} + b_j(\partial_h \tilde{U})_j + b'_j(\partial_h \tilde{U})_{j-1} + c_j \tilde{U}_j \quad (5.13)$$

при $j \in \mathcal{I}$.

Предположим далее, что

$(\iota_\theta 1)$: существует $\nu > 0$ такое, что $\operatorname{Re}(a_j) \geq \nu$ для всякого $j \in \overline{\mathcal{I}}$;

$$(\iota_\theta 2): \max \left\{ \|a\|_{C_h^\theta(\bar{\mathcal{I}})}, \|b\|_{C_h^\theta(\bar{\mathcal{I}})}, \|b'\|_{C_h^\theta(\bar{\mathcal{I}})}, \|b\|_{C_h^\theta(\bar{\mathcal{I}})} \right\} \leq Q \text{ с } Q > \nu.$$

Предложение 5.1 ([114]). *Предположим, что условия (ι_θ) выполняются для некоторого $\theta \in (0, 2) \setminus \{1\}$. Фиксируем $\phi_0 \in \left[0, \pi - \arccos\left(\frac{\nu}{Q}\right)\right)$. Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \mu_0, |\operatorname{Arg}(\lambda)| \leq \phi_0\} \subseteq \rho(A_h),$$

где A_h — оператор, определенный в (5.13). Кроме того, для любого $r \in [0, 2]$ существует $c > 0$, зависящее только от L, ν, Q, r такое, что для всякого $f \in B(\mathcal{I}; E)$ и любого $F \in B(\bar{\mathcal{I}}; E)$ с $F|_{\mathcal{I}} = f$, имеем

$$\begin{aligned} & \|(\lambda - A_h)^{-1}f\|_{C_{h,0}^{\theta+r}(\mathcal{I}; E)} \leq \\ & \leq c|\lambda|^{\frac{r}{2}-1} \left(\|F\|_{C_h^\theta(\bar{\mathcal{I}}; E)} + |\lambda|^{\frac{\theta}{2}} \max\{\|F_0\|, \|F_n\|\} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую параболическую смешанную задачу Коши–Дирихле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \mathcal{A}u(t, x) + f(t, x), & t \in [0, T], x \in [0, L], \\ u(t, x') &= 0, & t \in [0, T], x' \in \{0, L\}, \\ u(0, x) &= 0, & x \in [0, L], \end{aligned} \quad (5.14)$$

где \mathcal{A} — дифференциальный оператор второго порядка и $L > 0$. Говорят, что задача (5.14) имеет строгое решение, если существует непрерывная функция $u(t, x)$, имеющая первую производную по t и производные до второго порядка включительно по x , которые непрерывны вплоть до границы $[0, T] \times [0, L]$, т.е. $u \in C^1([0, T]; C(\bar{\Omega})) \cap C([0, T]; C^2(\bar{\Omega}))$, и u удовлетворяет (5.14).

Теорема 5.15 ([110]). *Рассмотрим задачу (5.14) при следующих предположениях:*

- (I) T и L — положительные вещественные числа;
- (II) $\theta \in (0, 1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$;
- (III) $\mathcal{A}u(x) = a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + b(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + c(x)u(t, x)$, с $a, b, c \in C^{2\theta}([0, L])$;
- (IV) a вещественнозначна и $\min a = \nu > 0$;
- (V)

$$f \in C([0, T] \times [0, L]),$$

$$t \rightarrow f(t, \cdot) \in B([0, T]; C^{2\theta}([0, L])),$$

$t \rightarrow f(t, 0)$ и $t \rightarrow f(t, L)$ принадлежат $C^\theta([0, T])$, $f(0, 0) = f(0, L) = 0$.

Тогда существует единственное строгое решение $u(\cdot)$ задачи (5.14). Такое решение принадлежит $B([0, T]; C^{2+2\theta}([0, L]))$ и

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in B([0, T]; C^{2\theta}([0, L])).$$

Пусть теперь \mathcal{I} — множество, которое может зависеть от положительного параметра h и банахова пространства $X_h = B(\mathcal{I})$. Введем далее линейный оператор A_h в X_h , зависящий от h . В каждом случае $\rho(A_h)$ содержит $\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\lambda| \geq R \text{ и } |\operatorname{Arg}(\lambda)| \leq \phi_0\}$, где $R > 0$ и $\phi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, а также существует $M > 0$ такое, что для λ из этого подмножества,

$$\mathbb{C}, \|(\lambda - A_h)^{-1}\|_{L(X_h)} \leq M|\lambda|^{-1}.$$

Здесь R, ϕ_0 и M не зависят от h . Тогда рассмотрим другое множество $\tilde{\mathcal{I}}$ такое, что $\mathcal{I} \subseteq \tilde{\mathcal{I}}$, положим $\tilde{X}_h := B(\tilde{\mathcal{I}})$. Определим оператор продолжения \mathcal{E}_h из X_h на \tilde{X}_h : в каждом конкретном случае этот оператор — продолжение нудем. Далее, для $\theta \in (0, 1)$, введем нормы $\|\cdot\|_{2\theta, h}$ и $\|\cdot\|_{2+2\theta, h}$ в \tilde{X}_h . Первая из этих норм связана с $\|\cdot\|_X$ и оператором A_h следующим свойством: существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , не зависящие от h такие, что для любого $U \in X_h$,

$$c_1 \|\mathcal{E}_h U\|_{2\theta, h} \leq \|U\|_{(X_h, D(A_h))_\theta} \leq c_2 \|\mathcal{E}_h U\|_{2\theta, h}.$$

Тогда для любого h рассмотрим оператор ограничения $\mathcal{R}_h \in L(\tilde{X}_h, X_h)$ такой, что $\mathcal{R}_h \mathcal{E}_h = I_{X_h}$. Введем также полуному p_h в \tilde{X}_h : в конкретных случаях имеем $p_h(U) = \|U|_{\tilde{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{I}}\|_{B(\tilde{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{I})}$. Предположим, что если $|\lambda| \geq R$ и $|\operatorname{Arg}(\lambda)| \leq \phi_0$, для любого $G \in \tilde{X}_h$, то

$$\begin{aligned} |\lambda| \|\mathcal{E}_h(\lambda - A_h)^{-1} \mathcal{R}_h G\|_{2\theta, h} + \|\mathcal{E}_h(\lambda - A_h)^{-1} \mathcal{R}_h G\|_{2+2\theta, h} &\leq \\ &\leq M \left(\|G\|_{2\theta, h} + |\lambda|^\theta p_h(G) \right). \end{aligned}$$

Наложим еще следующее условие. Если $|\lambda| \geq R$, $|\operatorname{Arg}(\lambda)| \leq \phi_0$ and $G \in \tilde{X}_h$, то

$$\|A_h(\lambda - A_h)^{-1} \mathcal{R}_h G\|_{X_h} \leq M|\lambda|^{-\theta} \left(\|G\|_{2\theta, h} + |\lambda|^\theta p_h(G) \right).$$

Такое неравенство легко вывести в каждом из наших примеров. В нижеследующей формулировке мы опускаем в обозначениях параметр h . В случае обратной схемы Эйлера (см. (5.3)) получаем следующее утверждение.

Теорема 5.16 ([114]). Пусть X и \tilde{X} — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_{\tilde{X}}$, соответственно, $A \in B(X)$, $\mathcal{E} \in B(X, \tilde{X})$, $\mathcal{R} \in B(\tilde{X}, X)$ таковы, что $\mathcal{R}\mathcal{E} = I_X$. Предположим, кроме того, что $\theta \in (0, 1)$ и $\|\cdot\|_{2\theta}$ и $\|\cdot\|_{2+2\theta}$ — нормы в \tilde{X} , тогда как p — полунорма в этом же пространстве. Наконец, предположим, что существуют

$$R > 0, \phi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), M > 0,$$

такие, что выполняются следующие условия:

(а) $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq R, |\operatorname{Arg}(\lambda)| \leq \phi_0\} \subseteq \rho(A)$ и для λ из этого множества,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{B(X)} \leq M(1 + |\lambda|)^{-1};$$

(b) для любого $F \in X$,

$$\|\mathcal{E}F\|_{2\theta} \leq M\|F\|_{(X, D(A))_\theta};$$

(c) для любого $V \in \tilde{X}, \lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| \geq R$ и $|\operatorname{Arg}(\lambda)| \leq \phi_0$,

$$(1 + |\lambda|)^{-1} \|\mathcal{E}(\lambda - A)^{-1} \mathcal{R}V\|_{2\theta} + \|\mathcal{E}(\lambda - A)^{-1} \mathcal{R}V\|_{2+2\theta} + (1 + |\lambda|)^\theta \|A(\lambda - A)^{-1} \mathcal{R}V\|_X \leq M \left(\|V\|_{2\theta} + (1 + |\lambda|)^\theta p(V) \right);$$

(d) $p(V) \leq \|V\|_{2\theta}$ для любого $V \in \tilde{X}$ и $p(\mathcal{E}F) = 0$ для любого $F \in X$;

(e) $\|\mathcal{R}V\|_X \leq \|V\|_{2\theta}$ для любого $V \in \tilde{X}$.

Пусть $T > 0$, $K \in \mathbb{N}, K \geq 2$, $\tau = \frac{T}{K}$. Предположим, что $\tau R < 1$.

Пусть $\overline{G} \in B(\{0, 1, \dots, K\}; \tilde{X})$ таковы, что $G^0 = 0$; рассмотрим задачу (5.3) с $\varphi^k = \mathcal{R}G^k$ при $k = 1, \dots, K$ и $U^0 = 0$. Тогда для $\overline{U} \in B(\{0, 1, \dots, K\}; X)$ решающего задачу (5.3) имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{E}\overline{U}^k\|_{2+2\theta} \leq \\ & \leq c \left(\max_{0 \leq k \leq K} \|G^k\|_{2\theta} + \max_{0 \leq k_1 < k_2 \leq K} ((k_2 - k_1)\tau)^{-\theta} p(G^{k_2} - G^{k_1}) \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

при $k = 0, 1, \dots, K$, где c — положительная постоянная, зависящая только от θ, R, ϕ_0, M, T и независящая от τ_n и \overline{G} .

Рассмотрим теперь схему Кранка–Никольсона: заменим (5.3) на (5.5). Теорема 5.16 имеет следующий аналог:

Теорема 5.17 ([113]). Пусть выполнены все предположения теоремы 5.16 и, кроме того,

(f) $\|\tau A\|_{B(X)} \leq S$ с некоторым $S > 0$;

(g) если $|\lambda| \geq 2S$, то

$$\|\mathcal{E}(\lambda - \tau A)^{-1} \mathcal{R}V\|_{2\theta} \leq M \left(\|V\|_{2\theta} + \tau^{-\theta} p(V) \right) \text{ для любого } V \in \tilde{X};$$

$$(h) \|\mathcal{E} \mathcal{R}V\|_{2\theta} \leq M \left(\|V\|_{2\theta} + \tau^{-\theta} p(V) \right) \text{ для любого } V \in \tilde{X};$$

$$(i) 2\tau R < 1.$$

Пусть $\overline{G} \in B(\{0, 1, \dots, K\}; \tilde{X})$ таковы, что $G^0 = 0$; рассмотрим задачу (5.5) с $\varphi^k = \mathcal{R}G^k$ при $k = 1, \dots, K$ и $U^0 = 0$. Если $U \in B(\{0, 1, \dots, K\}; X)$ решает (5.5) при $k = 0, 1, \dots, K$, то

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}U^k\|_{2+2\theta} &\leq c \left(\max_{0 \leq k \leq K} \|G^k\|_{2\theta} + \right. \\ &\quad \left. + \max_{0 \leq k_1 < k_2 \leq K} ((k_2 - k_1)\tau)^{-\theta} p(G^{k_2} - G^{k_1}) \right), \end{aligned} \quad (5.16)$$

где c — положительная постоянная, зависящая только от $\theta, R, \phi_0, M, S, T$ и независящая от τ_n и \overline{G} .

Приложение теорем 5.16 и 5.17 к дискретизации задачи (5.14) состоит в следующем. Пусть $K, n \in \mathbb{N}$. Положим $\tau := \frac{T}{K}$, $h := \frac{L}{n}$. Предположим, что $K \geq 2, n \geq 3$. При $j = 0, 1, \dots, n$ положим $a_j := a(jh)$, $b_j := \frac{1}{2}b(jh)$, $c_j := c(jh)$, $\mathbf{N}_{n-1} := \{1, \dots, n-1\}$, $\overline{\mathbf{N}}_n := \{0, 1, \dots, n-1, n\}$,

$$X := B(\mathbf{N}_{n-1}), \tilde{X} := B(\overline{\mathbf{N}}_n). \quad (5.17)$$

Если $V \in X$, то, как и выше, при $i \in \mathbf{N}_{n-1}$, положим

$$(A_h V)_i := a_i \frac{\tilde{V}_{i+1} - 2\tilde{V}_i + \tilde{V}_{i-1}}{h^2} + b_i \frac{\tilde{V}_{i+1} - \tilde{V}_{i-1}}{2h} + c_i \tilde{V}_i, \quad (5.18)$$

где

$$\tilde{V}_i = (\mathcal{E}V)_i = \begin{cases} V_i, & \text{если } 1 \leq i \leq n-1, \\ 0, & \text{если } i \in \{0, n\}. \end{cases}$$

Далее определим

$$\mathcal{R} \in B(\tilde{X}, X), \mathcal{R}V := V|_{\mathbf{N}_{n-1}} \quad (5.19)$$

при любом $V \in \tilde{X}$. Тогда снова при $V \in \tilde{X}$, для $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, положим

$$\|V\|_{2\theta} := \max\{\|V\|_{\tilde{X}}, \max_{0 \leq i_1 < i_2 \leq n} ((i_2 - i_1)h)^{-2\theta} |V_{i_2} - V_{i_1}|\},$$

$$\|V\|_{2+2\theta} := \max\{\|V\|_{\tilde{X}}, \max_{0 \leq i \leq n-1} |(\partial_h V)_i|, \max_{0 \leq i \leq n-2} |(\partial_h^2 V)_i|\}, \quad (5.20)$$

$$\max_{0 \leq i_1 < i_2 \leq n-2} ((i_2 - i_1)h)^{-2\theta} |(\partial_h^2 V)_{i_2} - (\partial_h^2 V)_{i_1}|, \quad (5.21)$$

с

$$(\partial_h V)_i := \frac{V_{i+1} - V_i}{h} \text{ при } 0 \leq i \leq n-1,$$

$$(\partial_h^2 V)_i := \frac{V_{i+2} - 2V_{i+1} + V_i}{h} \text{ при } 0 \leq i \leq n-2, \quad (5.22)$$

$$p(V) := \max\{|V_0|, |V_n|\}.$$

Имеем следующий результат:

Теорема 5.18 ([113]). *В обозначениях (5.17), (5.18), (5.19) и (5.20) выполнены предположения (a) – (e) теоремы 5.16 с R, ϕ_0, M не зависящими от h . Если наложить дополнительное условие*

$$\tau_n \leq \alpha h^2, \quad (5.23)$$

то это же будет выполнено при условиях (f)–(h) теоремы 5.17 (даже с S , не зависящей от n).

В качестве следствия получаем следующую теорему.

Теорема 5.19 ([114]). *Рассмотрим задачу (5.14) в предположениях теоремы 5.15. При соглашениях (5.17), (5.18), (5.19), (5.20), положим $G_j^k := f(k\tau_n, jh)$ при $k \in \{1, \dots, K\}, j = 0, \dots, n$. Положим $\varphi^k := \mathcal{R}G^k$ и обозначим через G^0 нуль в $B(\overline{\mathbf{N}}_n)$.*

Тогда если τ_n достаточно мало, то задача

$$\frac{\tilde{U}_j^k - \tilde{U}_j^{k-1}}{\tau_n} = a_i \frac{\tilde{U}_{i+1}^k - 2\tilde{U}_i^k + \tilde{U}_{i-1}^k}{h^2} + b_i \frac{\tilde{U}_{i+1}^k - \tilde{U}_{i-1}^k}{2h} + c_i \tilde{U}_i^k + \varphi_j^k,$$

$$\tilde{U}_j^0 = 0, \quad (5.24)$$

при $j \in 1, \dots, n-1, k \in \{1, \dots, K\}$ имеет единственное решение

такое, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}^k\|_{C_h^{2+2\theta}(\overline{\mathbf{N}}_n)} &\leq c\left(\|f\|_{B([0,T];C^{2\theta}([0,L]))} + \right. \\ &\left. + \max\{\|f(\cdot, 0)\|_{C^\theta([0,T])}, \|f(\cdot, L)\|_{C^\theta([0,T])}\}\right), \end{aligned} \quad (5.25)$$

с c , не зависящей от h и τ_n .

Аналогичный результат справедлив и для схемы Кранка–Николсона (5.5). Тогда положим $G_j^k := f\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\tau_n, jh\right)$ при выполнении условия (5.23).

Замечание 5.4. Из теоремы 5.18 следует, что для схемы (5.5) с $u_n^0 = 0$ при условии (5.23)

$$\begin{aligned} \|A_h U\|_{C_h^{2\theta}(\mathbf{N}_{n-1})} &\leq c\left(\|f\|_{B([0,T];C^{2\theta}([0,L]))} + \right. \\ &\left. + \max\{\|f_n(\cdot, 0)\|_{C^\theta([0,T])}, \|f(\cdot, L)\|_{C^\theta([0,T])}\}\right), \end{aligned} \quad (5.26)$$

с c , не зависящей от h и τ_n . В приведенных статьях теоремы 5.16 и 5.17 также применяются к дискретизации уравнения теплопроводности в квадрате.

Контрпример в [113] и [112] показывает, что, вобще говоря, условие (5.23) опустить нельзя. Наконец, оценки скорости сходимости даны в [112].

§ 6. Аппроксимации полулинейных уравнений

В банаховом пространстве E рассмотрим полулинейную задачу Коши

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad u(0) = u^0, \quad (6.1)$$

с оператором A , порождающим аналитическую C_0 -полугруппу типа $\omega(A) < 0$ и достаточно гладкой функцией f . Существование и единственность решения задачи (6.1) обсуждались, например, в [33], [50], [115], [117], [156].

6.1. Аппроксимация задачи Коши. Под полудискретной аппроксимацией задачи (6.1) будем понимать следующие задачи Коши в банаховом пространстве E_n :

$$u'_n(t) = A_n u_n(t) + f_n(t, u_n(t)), \quad u_n(0) = u_n^0, \quad (6.2)$$

где операторы A_n порождают аналитические полугруппы в E_n , A_n и A совместимы, функции f_n аппроксимируют f и $u_n^0 \rightarrow u^0$.

Пусть Ω — открытое множество в банаховом пространстве F , а $\mathcal{B} : \bar{\Omega} \rightarrow F$ — компактный оператор, не имеющий неподвижных точек на границе Ω . Тогда для векторного поля

$\mathcal{F}(x) = x - \mathcal{B}x$ определено вращение $\gamma(I - \mathcal{B}; \partial\Omega)$ — целочисленная характеристика этого поля. Пусть x^* — единственная изолированная неподвижная точка оператора \mathcal{B} в шаре S_{r_0} радиуса r_0 с центром в x^* . Тогда $\gamma(I - \mathcal{B}; \partial S_r) = \gamma(I - \mathcal{B}; \partial S_{r_0})$ при $0 < r \leq r_0$; это общее значение вращений называется индексом неподвижной точки x^* и обозначается через $\text{ind } x^*$.

Теорема 6.1 ([14]). Пусть выполнены условия (A) и (B_1) и компактные резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$, $(\lambda I - A_n)^{-1}$ сходятся: $(\lambda I - A_n)^{-1} \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$ компактно для некоторых $\lambda \in \rho(A)$ и $u_n^0 \rightarrow u^0$. Предположим, что

- (i) функции f_n, f ограничены и достаточно гладки, так что существует единственное слабое решение $u^*(\cdot)$ задачи (6.1) на $[0, T]$ (в этой ситуации $\text{ind } u^*(\cdot) = 1$);
- (ii) $f_n(t, x_n) \rightarrow f(t, x)$ равномерно по $t \in [0, T]$ при $x_n \rightarrow x$;
- (iii) пространство E сепарабельно.

Тогда для почти всех n задачи (6.2) имеют слабые решения $u_n^*(t), t \in [0, T]$, в окрестности $p_n u^*(\cdot)$. Каждая последовательность $\{u_n^*(t)\}$ \mathcal{P} -компактна и $u_n^*(t) \rightarrow u^*(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Рассмотрим дискретизацию по времени по относительно явной разностной схеме

$$\frac{U_n(t + \tau_n) - U_n(t)}{\tau_n} = A_n U_n(t) + f_n(t, U_n(t)), \quad (6.3)$$

$$U_n(0) = u_n^0, \quad t = k\tau_n, k = \{0, \dots, K\}.$$

Теорема 6.2 ([14]). Предположим, что выполнены условия теоремы 6.1 и условие (3.6). Тогда функции $U_n(t)$ из (6.3) дают аппроксимацию слабого решения $u^*(\cdot)$ задачи (6.1) и, кроме того, $U_n(t) \rightarrow u^*(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Определим оператор

$$\mathfrak{R}(u_n)(t) = u_n(t) - \int_0^t \exp((t-s)A_n) f(s, u_n(s)) ds.$$

Замечание 6.1. Если предположить, что выполнены условия теоремы 6.1, а функции $f(\cdot), f_n(\cdot)$ имеют производные Фреше в некоторых шарах, содержащих решения u^* и u_n^* , и, кроме того, $f'_{u_n}(t, p_n u^*(t))$ равномерно непрерывны по первому и второму аргументам, а $f'_{u_n}(t, u_n(t)) \rightarrow f'_u(t, u^*(t))$ равномерно по $t \in [0, T]$ при $u_n \rightarrow u^*$, то [14] при почти всех n задачи (6.2) имеют слабые решения $u_n^*(t), t \in [0, T]$ в окрестности $p_n u^*(\cdot)$. Каждая последовательность $\{u_n^*(\cdot)\}$ \mathcal{P} -компактна и $u_n^*(t) \rightarrow u^*(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$; кроме того, для достаточно большого

$n \geq n_0$ и некоторого $T^* \leq T$ имеем

$$c_1 \epsilon_n(u^*, u_n^0) \leq \|u_n^* - p_n u^*\|_{F_n} \leq c_2 \epsilon_n(u^*, u_n^0),$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от n , $F_n = C([0, T]; E_n)$, тогда как

$$\epsilon_n(u^*, u_n^0) = \max_{t \in [0, T^*]} \|\Re(p_n u^*)(t) - \exp(t A_n) u_n^0\|_{E_n}.$$

Пусть

$$\mathcal{U}_n(t) = (I_n + \tau_n A_n)^k,$$

$$\mathfrak{S}_n(u_n)(t) = u_n(t) - \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{U}_n((k-l)\tau_n) f_n(l\tau_n, u_n(l\tau_n)) \tau_n.$$

Замечание 6.2. Если предположить, что выполнены условия теоремы 6.2, а функции $f(\cdot), f_n(\cdot)$ имеют производные Фреше в некоторых шарах, содержащих решения $u^*(\cdot)$ и $u_n^*(\cdot)$, и, кроме того, $f'_{n u_n}(t, p_n u^*(t))$ равномерно непрерывны по первому и второму аргументам, а $f'_{n u_n}(t, u_n(t)) \rightarrow f'_u(t, u^*(t))$ равномерно по $t \in [0, T]$ при $u_n \rightarrow u^*$ и выполнено условие (3.6), то [14] функции $U_n(t)$ из (6.3) дают приближенное слабое решение задачи (6.1) и $U_n^*(t) \rightarrow u^*(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ кроме того, для достаточно большого $n \geq n_0$ и некоторого $T^* \leq T$ имеем

$$c_1 \epsilon_n(u^*, u_n^0) \leq \|U_n^* - p_n u^*\|_{F_n^{\tau_n}} \leq c_2 \epsilon_n(u^*, u_n^0),$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от n ,

$$F_n^{\tau_n} = \{u_n(k\tau_n) : \max_{0 \leq k\tau_n \leq T} \|u_n(k\tau_n)\|_{E_n} < \infty\}$$

и

$$\epsilon_n(u^*, u_n^0) = \max_{t \in [0, T^*]} \|\mathfrak{S}_n(p_n u^*)(t) - \mathcal{U}_n(t) u_n^0\|_{E_n}.$$

Схемы, имеющие более высокую скорость сходимости чем (6.3), рассматриваются в [162], [14]. Методы Рунге-Кутты для полулинейных уравнений рассмотрены в [98], [154], [153], [152], [162], [165].

6.2. Аппроксимация периодической задачи. В банаховом пространстве E рассмотрим следующую полулинейную Т-периодическую задачу:

$$v'(t) = Av(t) + f(t, v(t)), \quad v(t) = v(T + t), t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (6.4)$$

с оператором A , порождающим аналитическую компактную C_0 -полугруппу, и с достаточно гладкой функцией f , $f(t, x) = f(t + T, x)$ для любого $x \in E$ и $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Пусть $u(\cdot; u^0)$ — решение задачи Коши (6.1) с начальными данными $u(0; u^0) = u^0$. Эта

функция $u(\cdot; u^0)$ есть также и обобщенное решение, т.е. удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(t) = \exp(tA)u^0 + \int_0^t \exp((t-s)A)f(s, u(s))ds, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (6.5)$$

Тогда можно определить оператор сдвига $\mathcal{K}(u^0) = u(T; u^0)$, отображающий E в E . Если $u(\cdot; x^*)$ — периодическое решение (6.1), то x^* — нуль компактного векторного поля, определенного как $I - \mathcal{K}$, т.е. $\mathcal{K}(x^*) = x^*$.

Замечание 6.3. Предположим здесь, что оператор $(I - \exp(TA))^{-1}$ существует и ограничен. Достаточно предполагать, что $(I - \exp(tA))^{-1} \in B(E)$ выполнено при $t \geq t_0$ с некоторым $t_0 > 0$. Это предположение не ограничительно, поскольку, не нарушая общности, можно заменить A на $A - \omega I$ и получить $\|\exp(t(A - \omega))\| \leq Me^{-\delta t}$ при $\delta > 0, t \geq 0$. Тогда из [48] следует, что $(I - \exp(tA))^{-1} \in B(E)$ для любого $t > 0$.

Замечание 6.4. Мы говорим, что функция f достаточно гладка, если она по крайней мере непрерывна по обоим аргументам, $\sup_{t \in [0, T], \|x\| \leq c_1} \|f(t, x)\| \leq C_2$ и такова, что существует глобальное слабое решение задачи $u'(t) = Au(t) + f(t, u(t))$, $u(0) = u^0, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Определение 6.1. Решение $u(\cdot)$ задачи Коши (6.1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|u(0) - \tilde{u}(0)\| \leq \delta$ следует, что $\max_{0 \leq t < \infty} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \epsilon$, где $\tilde{u}(\cdot)$ — обобщенное решение (6.1) с начальным условием $\tilde{u}(0)$.

Определение 6.2. Решение $u(\cdot)$ задачи Коши (6.1) называется равномерно асимптотически устойчивым в точке $u(0)$, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого обобщенного решения $\tilde{u}(\cdot)$ задачи (6.1) с $\|u(0) - \tilde{u}(0)\| \leq \delta$, имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| = 0$ равномерно по $\tilde{u}(\cdot) \in B(u(0); \delta)$, т.е. существует функция $\phi_{u(0), \delta}(\cdot)$ такая, что $\|u(t; u(0)) - u(t; \tilde{u}(0))\| \leq \phi_{u(0), \delta}(t)$ с $\phi_{u(0), \delta}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $\|u(0) - \tilde{u}(0)\| \leq \delta$.

Конструктивные условия на оператор A и на f , гарантирующие, что уравнение $u'(t) = Au(t) + f(u(t))$, $u(0) = u^0$, асимптотически k -мерно, приведены в [20], [19]. Они касаются расположения собственных значений A , т.е. $\lambda_{k+1} - \lambda_k > 2L, \lambda_{k+1} > L$.

Теорема 6.3 ([57]). Пусть выполнены условия (A) и (B"), а компактные резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}, (\lambda I - A_n)^{-1}$ сходятся:

$(\lambda I - A_n)^{-1} \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$ компактно для некоторого $\lambda \in \rho(A)$.
Предположим, что

(i) функции f, f_n достаточно гладки, так что существует изолированное слабое решение $v^*(\cdot)$ периодической задачи (6.4) с $v^*(0) = x^*$ таким, что задача Коши (6.1) с $u(0) = x^*$ имеет равномерно асимптотически устойчивое изолированное решение в точке x^* (в этом случае $\text{ind } v^*(\cdot) = 1$);

(ii) $f_n(t, x_n) \rightarrow f(t, x)$ для любого $t \in [0, T]$ при $x_n \rightarrow x$;

(iii) пространство E сепарабельно.

Тогда для почти всех n задачи

$$v'_n(t) = A_n v_n(t) + f_n(t, v_n(t)), v_n(t) = v_n(t + T), t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (6.6)$$

имеют периодические слабые решения $v_n^*(t), t \in [0, T]$, в окрестности $p_n v^*(\cdot)$, где $v^*(\cdot)$ — слабое периодическое решение (6.4) с $v^*(0) = x^*$. Каждая последовательность $\{v_n^*(\cdot)\}$ \mathcal{P} -компактна и $v_n^*(t) \rightarrow v^*(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Говорят, что неподвижная точка x^* оператора \mathcal{K} в банаховой решетке E устойчива сверху, если [117] для данного $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|\mathcal{K}^k x - x^*\| \leq \epsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$, если только $x^* \preceq x$ и $\|x - x^*\| \leq \delta$. Используя это понятие, можно переформулировать теорему 6.3 для положительных полугрупп, ввиду результата из [81].

Теорема 6.4. Пусть операторы A_n и A задач (6.4) и (6.6) согласованы и пусть E, E_n — пространства порядка единица, а $e_n \in D(A_n) \cap \text{int } E_n^+$. Предположим, что операторы A_n обладают POD -свойством и $A_n e_n \preceq 0$ для достаточно большого n и компактные резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}, (\lambda I - A_n)^{-1}$ сходятся: $(\lambda I - A_n)^{-1} \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$ компактно для некоторого $\lambda \in \rho(A)$. Допустим, что

(i) функции f, f_n достаточно гладки, ограничены и положительны, так, что существует слабое решение $u^*(\cdot)$ задачи Коши (6.3) такое, что элемент $u^*(0) = x^*$ устойчив сверху и является неподвижной точкой оператора \mathcal{K} $x^* \prec y, \mathcal{K}y \preceq y$ (в такой ситуации $\text{ind } x^* = 1$);

(ii) $f_n(t, x_n) \rightarrow f(t, x)$ равномерно по $t \in [0, T]$ при $x_n \rightarrow x$;

(iii) пространство E сепарабельно.

Тогда для почти всех n задачи (6.6) имеют периодические слабые решения $v_n^*(t), t \in [0, T]$ в окрестности $p_n v^*(\cdot)$, где $v^*(\cdot)$ — любое устойчивое сверху слабое периодическое решение (6.4). Каждая последовательность $\{v_n^*(\cdot)\}$ \mathcal{P} -компактна и $v_n^*(t) \rightarrow v^*(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Замечание 6.5. Используемая здесь техника может быть применена для случая уплотняющих операторов [28]. Например, резольвента Δ в $L^2(\mathbb{R}^d)$ уплотняющая, но не компактна.

В [138] изучается качественное поведение пространственно полудискретных конечноэлементных решений полулинейных параболических задач вблизи неустойчивой гиперболической неподвижной точки.

Отслеживающий подход к изучению поведения при большом времени численных аппроксимаций полулинейных параболических уравнений изучался в [137].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алибеков Х. А., Соболевский П. Е. Устойчивость и сходимость разностных схем высокого порядка аппроксимации для параболических дифференциальных уравнений // Укр. мат. ж. — 1988. — 32, No. 3. — С. 291–300.
2. Аширалиев А. Разностные схемы высокого порядка точности для эллиптических уравнений // Приложение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. — Новосибирск: Сибирск. отд. АН СССР, 1989. — С. 3–14.
3. Аширалиев А. О. Некоторые разностные схемы для параболических уравнений с негладкими начальными данными // Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн. хим. и геол. наук. — 1983. — No. 6. — С. 70–72.
4. Вайнико Г., Пискарев С. И. Регулярно совместимые операторы // Изв. ВУЗов. Мат. — 1977. — № 10. — С. 25–36.
5. Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И. Полугруппы операторов, косинус-операторные функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. Анализ/ВИНИТИ. — 1990. — 28. — С. 87–202.
6. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.
7. Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А., Приложение точных разностных схем к построению и исследованию разностных схем для обобщенных решений // Мат. сб. — 1982. — 117, № 4. — С. 469–480.
8. Мельникова И. В., Бочкарева С. В. C -полугруппы и регуляризация некорректно поставленной задачи Коши // Докл. АН СССР. — 1993. — 329, № 3, 270–273.
9. Пискарев С. И. Аппроксимация голоморфных полугрупп // Tartu Riikl. Ü. Toimetised. — 1979. — 492, 3–14.
10. Пискарев С. И. Оценки погрешности аппроксимации полугрупп операторов дробями Паде // Изв. ВУЗов. Мат. — 1979. — № 4. — С. 33–38.
11. Пискарев С. И. Устойчивость разностных схем в задачах Коши с почти периодическими решениями // Дифференц. уравнения. — 1984, 20, № 4. — С. 689–695.
12. Пискарев С. И. Принципы методов дискретизации III // Отчет 3410, Акустический институт АН СССР, 1986. — 87 с.
13. Пискарев С. И. Оценки скорости сходимости решения некорректных задач для эволюционных уравнений. // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1987, — 51, № 3. — С. 676–687.

14. Пискарев С. И. Сходимость разностных схем решения нелинейных параболических уравнений // Мат. заметки. — 1988. — 44, № 1. — С. 112–123
15. Пискарев С. И. Метод повышения точности решения задач Коши в банаховом пространстве // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 1988. — 28, № 6. — С. 211–212
16. Пискарев С. И. Аппроксимация положительных C_0 -полугрупп операторов // Дифференц. уравнения. — 1991. — 27, № 7. — С. 1245–1250
17. Пискарев С. И. Об аппроксимации возмущенных C_0 -полугрупп // Дифференц. уравнения. — 1994. — 30, № 2. — С. 339–341
18. А. В. Романов Условия асимптотической k -мерности полулинейных параболических уравнений // Успехи мат. наук. — 1991. — 46, № 1. — С. 213–214
19. А. В. Романов Точные оценки размерности инерциальных многообразий для нелинейных параболических уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. — 57, № 4. — С. 36–54
20. А. В. Романов О предельной динамике эволюционных уравнений // Успехи мат. наук. — 1996. — 51, № 2. — С. 173–174
21. Самарский А. А., Гудин А. В. Устойчивость разностных схем — М.: Наука, 1973
22. Соболевский П. Е. Коэрцитивная разрешимость разностных уравнений // Докл. АН СССР. — 1971. — 201. — С. 1063–1066
23. Соболевский П. Е. Теория полугрупп и устойчивость разностных схем
Теория операторов в функциональных пространствах (Труды школы, Новосибирск, 1975). — Новосибирск: Наука, 1977. — С. 304
24. Соболевский П. Е., Хоанг ван Лай. Разностные схемы оптимального типа для приближенного решения параболических уравнений (банахов случай) // Укр. мат. ж. — 1981. — 33. — С. 39–46
25. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979
26. Abdelaziz N. H. On approximation by discrete semigroups// J. Approx. Theory. — 1993. — 73, № 3. — С. 253–269
27. Abdelaziz N. H., Chernoff Paul R. Continuous and discrete semigroup approximations with applications to the Cauchy problem// J. Operator Theory. — 1994. — 32, № 2. — С. 331–352
28. Agase S. B., Raghavendra V. Existence of mild solutions of semilinear differential equations in Banach spaces// Indian J. Pure Appl. Math. — 1990. — 21, № 9. — С. 813–821
29. Ahués M. A class of strongly stable operator approximations// J. Austral. Math. Soc. Ser. B. — 1987. — 28, № 4. — С. 435–442
30. Ahués M., Hocine F. A note on spectral approximation of linear operations// Appl. Math. Lett. — 1994. — 7, № 2. — С. 63–66
31. Ahués, Largillier A. Two numerical approximations for a class of weakly singular integral operators// Appl. Numer. Math. — 1995. — 17, № 4. — С. 347–362
32. Ahues M., Piskarev S. Spectral approximation of weakly singular integral operators. i: Convergence theory// In et. al. Constanda. C.,

- editor, *Integral methods in science and engineering. Vol. II: Approximation methods. Proceedings of the 4th international conference, IMSE '96, Oulu, Finland, June 17–20*, Harlow, 1996. Longman, Pitman Res.
33. *Amann H.* Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. Abstract linear theory.
 34. *Anselone P. M.* Collectively compact operator approximation theory and applications to integral equations. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971. With an appendix by Joel Davis, Prentice-Hall Series in Automatic Computation.
 35. *Anselone P. M.* Nonlinear operator approximation. In *Moderne Methoden der numerischen Mathematik (Tagung 200-Jahrfeier, Tech. Univ. Clausthal, Clausthal, 1975)*, volume 32 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 17–24. Birkhäuser, Basel, 1976.
 36. *Anselone P. M.* Recent advances in operator approximation theory. In *Methods of functional analysis in approximation theory (Bombay, 1985)*, volume 76 of *Internat. Schriftenreihe Numer. Math.*, pages 309–324. Birkhäuser, Basel, 1986.
 37. *Anselone P.M., Palmer T. W.* Spectral properties of collectively compact sets of linear operators// *J. Math. Mech.* — 1967/68. — 17. — C. 853–860
 38. *Anselone P.M., Palmer T. W.* Collectively compact sets of linear operators// *Pacif. J. Math.* — 1968. — 25. — C. 417–422
 39. *Anselone P. M., Treuden M. L.* Regular operator approximation theory// *Pacific J. Math.* — 1985. — 120, № 2. — C. 257–268
 40. *Anselone P. M., Treuden M. L.* Spectral analysis of asymptotically compact operator sequences// *Numer. Funct. Anal. Optim.* — 1996. — 17, № 7–8. — C. 679–690
 41. *Aràndiga F., Caselles V.* Approximations of positive operators and continuity of the spectral radius. III// *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.* — 1994. — 57, № 3. — C. 330–340
 42. *Aràndiga F., Caselles V.* On strongly stable approximations// *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid.* — 1994. — 7, № 2. — C. 207–217
 43. *Arendt W.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems// *Israel J. Math.* — 1987. — 59, № 3. — C. 327–352
 44. *Ashyralyev A., Piskarev S., Weis L.* On well-posedness of difference schemes for abstract parabolic equations in $L^p([0, T]; E)$ spaces. (в печати)
 45. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* Well-posedness of parabolic difference equations, volume 69 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. Translated from the Russian by A. Iacob.
 46. *Bakaev N. Yu., Larsson S., Thomée V.* Backward Euler type methods for parabolic integro-differential equations in Banach space// *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* — 1998. — 32, № 1. — C. 85–99
 47. *Ballotti M. E., Goldstein J. A., Parrott M. E.* Almost periodic solutions of evolution equations// *J. Math. Anal. Appl.* — 1989. — 138, № 2. — C. 522–536
 48. *Barbu V., Pavel N. H.* On the invertibility of $I \pm \exp(-tA)$, $t > 0$, with A maximal monotone// In *World Congress of Nonlinear*

- Analysts '92, Vol. I-IV (Tampa, FL, 1992)*, pages 2231–2237. de Gruyter, Berlin, 1996.
49. *Baumer B., Neubrander F.* Existence and uniqueness of solutions of ordinary linear differential equations in Banach spaces. Preprint, Department of Mathematics, 1996. Louisiana state Univ., Baton Rouge.
 50. *Benilan Ph., Crandall N., Pazy A.* Nonlinear evolution equations in Banach spaces. book in print, 1998.
 51. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction// Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.
 52. *Bobrowski A.* Degenerate convergence of semigroups// Semigroup Forum. — 1994. — 49, № 3. — C. 303–327
 53. *Bobrowski A.* Integrated semigroups and the Trotter–Kato theorem// Bull. Polish Acad. Sci. — 1994. — 41, № 4. — C. 297–303
 54. *Bobrowski A.* Examples of a pointwise convergence of semigroups// Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A. — 1995. — 49. — C. 15–33
 55. *Bobrowski A.* Generalized telegraph equation and the Sova–Kurtz version of the Trotter–Kato theorem// Ann. Polon. Math. — 1996. — 64, № 1. — C. 37–45
 56. *Bobrowski A.* On the generation of non-continuous semigroups// Semigroup Forum. — 1997. — 54, № 2. — C. 237–252
 57. *Bobylev N. A., Kim J. K., Korovin S. K., Piskarev S.* Semidiscrete approximations of semilinear periodic problems in Banach spaces// Nonlinear Anal. — 1998. — 33, № 5. — C. 473–482
 58. *Bolley P., Camus J., Pham T. L.* Estimation de la résolvente du problème de Dirichlet dans les espaces de Hölder// C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. — 1987. — 305, № 6. — C. 253–256
 59. *Bouldin R.* Operator approximations with stable eigenvalues// J. Austral. Math. Soc. Ser. A — 1990. — 49, № 2. — C. 250–257
 60. *Bramble J. H., Pasciak J. E., Sammon P. H., Thomée V.* Incomplete iterations in multistep backward difference methods for parabolic problems with smooth and nonsmooth data// Math. Comp. — 1989. — 52, № 186. — C. 339–367
 61. *Brenner P., Crouzeix M., Thomée V.* Single-step methods for inhomogeneous linear differential equations in Banach space// RAIRO Anal. Numer. — 1982. — 16. — C. 5–26
 62. *Brenner P., Thomée V., Wahlbin L. B.* Besov spaces and applications to difference methods for initial value problems. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 434.
 63. *Brenner P., Thomée V.* On rational approximations of semigroups. SIAM J. Numer. Anal. — 1979. — 16. — C. 683–694
 64. *Burrage K., Piskarev S.* Stochastic methods for ill-posed problems// BIT. — 2000. — 40, № 2. — C. 226–240
 65. *Busenberg S., Wu B.* Convergence theorems for integrated semigroups. Differential Integral Equations. — 1992. — 5, № 3. — C. 509–520

66. Butzer P. L., Dickmeis W., Hahn L., and Nessel R. J. Lax-type theorems and a unified approach to some limit theorems in probability theory with rates. *Resultate Math.* — 1979. — 2. — C. 30–53
67. Butzer P. L., Dickmeis W., Jansen Hu., Nessel R. J. Alternative forms with orders of the Lax equivalence theorem in Banach spaces// *Computing.* — 1976/77. — 17, № 4. — C. 335–342
68. Butzer P. L., Dickmeis W., Nessel R. J. Lax-type theorems with orders in connection with inhomogeneous evolution equations in Banach spaces. In: *Linear spaces and approximation (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1977)*, volume 21 of *Lecture Notes in Biomath.*, pages 531–546. Springer, Berlin, 1978.
69. Butzer P. L., Dickmeis W., Nessel R. J. Numerical analysis of evolution equations. In: *Symposium on Numerical Analysis, Kyoto, July 11–12, 1978*, volume 1 of *Lecture Notes in Numerical and Applied Analysis*, pages 1–163. Kinokuniya Book Store Co., Ltd., Tokyo, 1979.
70. Carasso A. S., Sanderson J. G., and Hyman J. M. Digital removal of random media image degradations by solving the diffusion equation backwards in time// *SIAM J. Numer. Anal.* — 1978. — 15, № 2. — C. 344–367
71. Chatelin F. Spectral approximation of linear operators// *Computer Science and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With a foreword by P. Henrici, With solutions to exercises by Mario Ahués.
72. Chorin A. J., McCracken M. F., Hughes T. J. R., Marsden J. E. Product formulas and numerical algorithms// *Comm. Pure Appl. Math.* — 1978. — 31, № 2. — C. 205–256
73. Crouzeix M. On multistep approximation of semigroups in Banach spaces. In *Proceedings of the 2nd international conference on computational and applied mathematics (Leuven, 1986)*, volume 20, pages 25–35, 1987.
74. Crouzeix M., Larsson S., Piskarev S., Thomée V. The stability of rational approximations of analytic semigroups// *BIT.* — 1993. — 33, № 1. — C. 74–84
75. Crouzeix M., Larsson S., Thomée V. Resolvent estimates for elliptic finite element operators in one dimension. *Math. Comp.* — 1994. — 63, № 207. — C. 121–140
76. Crouzeix M., Thomée V. On the discretization in time of semilinear parabolic equations with nonsmooth initial data// *Math. Comp.* — 1987. — 49, № 180. — C. 359–377
77. Da Prato G. and Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
78. Dalecky Yu. L., Fomin S. V. *Measures and differential equations in infinite-dimensional space*, volume 76 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Translated from the Russian, With additional material by V. R. Steblovskaia, Yu. V. Bogdanskii [Yu. V. Bogdanskii] and N. Yu. Goncharuk.

79. Dalecky Yu. L., Goncharuk N. Yu. Random operator functions defined by stochastic differential equations. In *Measures and differential equations in infinite-dimensional space*. 1990. Translated from the Russian. With additional material by V. R. Steblovskaya, Yu. V. Bogdansky.
80. Dalecky Yu. L., Goncharuk N. Yu. On a quasilinear stochastic differential equation of parabolic type. *Stochastic Anal. Appl.* — 1994. — 12, № 1. — C. 103–129
81. Dancer E. N. Upper and lower stability and index theory for positive mappings and applications// *Nonlinear Anal.* — 1991. — 17. — C. 205–217
82. Davies E. B., Pang M. M. H. The Cauchy problem and a generalization of the Hille–Yosida theorem// *Proc. London Math. Soc.* (3). — 1987. — 55, № 1. — C. 181–208
83. deLaubenfels R. Integrated semigroups, C -semigroups and the abstract Cauchy problem// *Semigroup Forum.* — 1990. — 41, № 1. — C. 83–95
84. deLaubenfels R. C -semigroups and the Cauchy problem// *J. Funct. Anal.* — 1993. — 111, № 1. — C. 44–61
85. Dickmeis W., Nessel R. J. On uniform boundedness principles and Banach–Steinhaus theorems with rates// *Numer. Funct. Anal. Optim.* — 1981. — 3. — C. 19–52
86. Dickmeis W., Nessel R. J. Classical approximation processes in connection with Lax equivalence theorems with orders. *Acta Sci. Math.* (Szeged). — 1978. — 40, № 1–2. — C. 33–48
87. Dickmeis W., Nessel R. J. A unified approach to certain counterexamples in approximation theory in connection with a uniform boundedness principle with rates// *J. Approx. Theory.* — 1981. — 31. — C. 161–174
88. Eberhardt B., Greiner G. Baillon’s theorem on maximal regularity// *Acta Appl. Math.* — 1992. — 27. — C. 47–54 Positive operators and semigroups on Banach lattices (Curaçao, 1990).
89. Ethier S. N., Kurtz T. G. *Markov processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.
90. Fujita H. On the finite element approximation for parabolic equations: an operator theoretical approach. In *Computing methods in applied sciences and engineering (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975), Part 1*, volume 134 of *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems*, pages 171–192. Springer, Berlin, 1976.
91. Fujita H., Mizutani A. On the finite element method for parabolic equations. I. Approximation of holomorphic semi-groups. *J. Math. Soc. Japan.* — 28, № 4. — C. 749–771
92. Fujita H., Suzuki T. On the finite element approximation for evolution equations of parabolic type. In *Computing methods in applied sciences and engineering (Proc. Third Internat. Sympos., Versailles, 1977), I*, volume 704 of *Lecture Notes in Math.*, pages 207–221. Springer, Berlin, 1979.
93. Fujita H., Suzuki T. Evolution problems. In *Handbook of numerical analysis, Vol. II*, pages 789–928. North-Holland, Amsterdam, 1991.

94. Goldstein J. A. *Semigroups of linear operators and applications*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985.
95. Goldstein J. A. A survey of semigroups of linear operators and applications. In *Semigroups of linear and nonlinear operations and applications (Curaçao, 1992)*, pages 9–57. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
96. Goldstein J. A., Sandefur J. T., Jr. An abstract d'Alembert formula// SIAM J. Math. Anal. — 1987. — 18, № 3. — C. 842–856
97. Goldstein J. A., deLaubenfels R., Sandefur J. T., Jr. Regularized semigroups, iterated Cauchy problems and equipartition of energy// Monatsh. Math. — 1993. — 115, № 1–2. — C. 47–66
98. González C., Palencia C. Stability of Runge–Kutta methods for abstract time-dependent parabolic problems: the Hölder case// Math. Comp. — 1999. — 68. — C. 73–89
99. Görlich E., Pontzen D. An approximation theorem for semigroups of growth order α and an extension of the Trotter–Lie formula// J. Funct. Anal. — 1983. — 50, № 3. — C. 414–425
100. Grigorieff R. D. Zur Theorie linearer approximationsregulärer Operatoren. I, II// Math. Nachr. — 1973. — 55. — C. 233–249; ibid. 55 (1973), 251–263, 1973.
101. Grigorieff R. D. Diskrete Approximation von Eigenwertproblemen. I. Qualitative Konvergenz// Numer. Math. — 1975. — 24, № 4. — C. 355–374
102. Grigorieff R. D. Diskrete Approximation von Eigenwertproblemen. II. Konvergenzordnung// Numer. Math. — 1975. — 24, № 5. — C. 415–433
103. Grigorieff R. D. Über diskrete Approximationen nichtlinearer Gleichungen 1. Art// Math. Nachr. — 1975. — 69. — C. 253–272
104. Grigorieff R. D. Diskrete Approximation von Eigenwertproblemen. III. Asymptotische Entwicklungen// Numer. Math. — 1975/76. — 25, № 1. — C. 79–97
105. Grigorieff R. D. Zur Charakterisierung linearer approximationsregulärer Operatoren. In *Mathematical papers given on the occasion of Ernst Mohr's 75th birthday*, pages 63–77. Tech. Univ. Berlin, Berlin, 1985.
106. Grigorieff R. D. Some stability inequalities for compact finite difference schemes. Math. Nachr. — 1988. — 135. — C. 93–101
107. Grigorieff R. D. Time discretization of semigroups by the variable two-step BDF method. In *Numerical treatment of differential equations (Halle, 1989)*, volume 121 of *Teubner-Texte Math.*, pages 204–216. Teubner, Stuttgart, 1991.
108. Grigorieff R. D., Jeggle H. Approximation von Eigenwertproblemen bei nichtlinearer Parameterabhängigkeit// Manuscripta Math. — 1973. — 10. — C. 245–271
109. Guidetti D. Optimal regularity for mixed parabolic problems in spaces of functions which are Hölder continuous with respect to space variables. Technical report, Department of Mathematics, University of Bologna, 1995.

110. Guidetti D. The parabolic mixed Cauchy-Dirichlet problem in spaces of functions which are Hölder continuous with respect to space variables// Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. — 1996. — 7, № 3. — C. 161–168
111. Guidetti D. The parabolic mixed Cauchy-Dirichlet problem in spaces of functions which are Hölder continuous with respect to space variables// Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. — 1996. — 7, № 3. — C. 161–168
112. Guidetti D., Piskarev S. On maximal regularity of difference schemes for parabolic equations in $C^\theta(\overline{\varpi})$ spaces. N 8, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bologna, 1997. Preprint.
113. Guidetti D., Piskarev S. On maximal regularity of Crank–Nicholson schemes for parabolic equations in $C^\theta(\overline{\Omega})$ space. In *Proceedings of International Conference "Function spaces. Differential operators. Problems in mathematical education*, volume 2, pages 2231–2237. RUDN, Moscow, 1998.
114. Guidetti D., Piskarev S. Stability of Rothe's scheme and maximal regularity for parabolic equations in $C^\theta(\overline{\Omega})$. In *Progress in partial differential equations, Vol. 1 (Pont-à-Mousson, 1997)*, pages 167–180. Longman, Harlow, 1998.
115. Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
116. Hersh R., Kato T. High-accuracy stable difference schemes for well-posed initial value problems// SIAM J. Numer. Anal. — 1979. — 16, № 4. — C. 670–682
117. Hess P. *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1991.
118. Hoppe R. H. W. A constructive approach to the Bellman semigroup. *Nonlinear Anal.* — 1985. — 9, № 11. — C. 1165–1181
119. Kalton N., Weis L. The H^∞ calculus and sums of closed operators. *submitted*.
120. Kalton N., Weis L. Perturbation and interpolation theorems for the H^∞ calculus. *in preparation*.
121. Kalton N. J., Lancien G. A solution to the problem of L^p -maximal regularity. *Math. Z.* — 2000. — 235, № 3. — C. 559–568
122. Kanda S. Convergence of difference approximations and nonlinear semigroups// Proc. Amer. Math. Soc. — 1990. — 108, № 3. — C. 741–748
123. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
124. Kenmochi N., Oharu S. Difference approximation of nonlinear evolution equations and semigroups of nonlinear operators// Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1974/75. — 10, № 1. — C. 147–207
125. Kisynski J. A proof of the Trotter–Kato theorem on approximation of semi-groups// Colloq. Math. — 1967. — 18. — C. 181–184
126. Kobayashi Y. Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups// J. Math. Soc. Japan. — 1975. — 27, № 4. — C. 640–665

127. *Kobayashi Y.* Difference approximation of evolution equations and generation of nonlinear semigroups// Proc. Japan Acad. — 1975. — 51, № 6. — C. 406–410
128. *Krein S. G.* *Linear differential equations in Banach space.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. Translated from the Russian by J. M. Danskin, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 29.
129. *Kunstmann P., Weis L.* Perturbation theorems for maximal regularity. *submitted.*
130. *Kunstmann P.* *Ch. Abstrakte Cauchyprobleme und Distributionshalbgruppen.* Dissertation, univ. Kiev, 1995.
131. *Kunstmann P.* *Ch. Regularization of semigroups that are strongly continuous for $t > 0$* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — 126, № 9. — C. 2721–2724
132. *Kurtz T. G.* Extensions of Trotter's operator semigroup approximation theorems// J. Functional Analysis. — 1969. — 3. — C. 354–375
133. *Kurtz T. G.* A general theorem on the convergence of operator semigroups// Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — 148. — C. 23–32
134. *Kurtz T. G., Protter P. E.* Weak convergence of stochastic integrals and differential equations. II. Infinite-dimensional case. In *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995)*, volume 1627 of *Lecture Notes in Math.*, pages 197–285. Springer, Berlin, 1996.
135. *Labbas R.* Some results on the sum of linear operators with nondense domains. Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 1989. — 154. — C. 91–97
136. *Largillier A.* A numerical quadrature for some weakly singular integral operators. Appl. Math. Lett. — 1995. — 8, № 1. — C. 11–14
137. *Larsson S., Pilyugin S. Yu.* Numerical shadowing near the global attractor for a semilinear parabolic equation. Preprint 21, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, 1998.
138. *Larsson S., Sanz-Serna J.-M.* The behavior of finite element solutions of semilinear parabolic problems near stationary points// SIAM J. Numer. Anal. — 1994. — 31, № 4. — C. 1000–1018
139. *Larsson S., Sanz-Serna J.-M.* A shadowing result with applications to finite element approximation of reaction-diffusion equations// Math. Comp. — 1999. — 68, № 225. — C. 55–72
140. *Larsson S., Thomée V., Wahlbin L. B.* Numerical solution of parabolic integro-differential equations by the discontinuous Galerkin method// Math. Comp. — 1998. — 67, № 221. — C. 45–71
141. *Larsson S., Thomée V., Zhou S. Z.* On multigrid methods for parabolic problems// J. Comput. Math. — 1995. — 13, № 3. — C. 193–205
142. *Lasiecka I., Manitius A.* Differentiability and convergence rates of approximating semigroups for retarded functional-differential

- equations// SIAM J. Numer. Anal. — 1988. — 25, № 4. — C. 883–907
143. *Lax P. D., Richtmyer R. D.* Survey of the stability of linear finite difference equations// Comm. Pure Appl. Math. — 1956. — 9. — C. 267–293
 144. *Le Merdy C.* Counterexamples on L_p -maximal regularity// Math. Z. — 1999. — 230. — C. 47–62
 145. *Le Roux M., Thomée V.* Numerical solution of semilinear integrodifferential equations of parabolic type with nonsmooth data// SIAM J. Numer. Anal. — 1989. — 26, № 6. — C. 1291–1309
 146. *Lee T. D.* Difference equations and conservation laws// J. Statist. Phys. — 1987. — 46, № 5–6. — C. 843–860
 147. *Linden H.* Starke Konvergenz im verallgemeinerten Sinne und Spektra// Math. Z. — 1973. — 134. — C. 205–213
 148. *Linden H.* Über die Stabilität von Eigenwerten. Math. Ann. — 1973. — 203. — C. 215–220
 149. *Lizama C.* On an extension of the Trotter-Kato theorem for resolvent families of operators// J. Integral Equations Appl. — 1990. — 2, № 2. — C. 269–280
 150. *Lizama C.* On the convergence and approximation of integrated semigroups// J. Math. Anal. Appl. — 1994. — 181, № 1. — C. 89–103
 151. *Lord G. J., Stuart A. M.* Discrete Gevrey regularity, attractors and upper-semicontinuity for a finite difference approximation to the Ginzburg-Landau equation// Numer. Funct. Anal. Optim. — 1995. — 16, № 7–8. — C. 1003–1047
 152. *Lubich C., Ostermann A.* Runge-Kutta methods for parabolic equations and convolution quadrature// Math. Comp. — 1993. — 60, № 201. — C. 105–131
 153. *Lubich C., Ostermann A.* Runge-Kutta approximation of quasilinear parabolic equations// Math. Comp. — 1995. — 64, № 210. — C. 601–627
 154. *Lubich C., Ostermann A.* Runge-Kutta time discretization of reaction-diffusion and Navier-Stokes equations: nonsmooth-data error estimates and applications to long-time behaviour// Appl. Numer. Math. — 1996. — 22, № 1–3. — C. 279–292 Special issue celebrating the centenary of Runge-Kutta methods.
 155. *Lubich Ch., Sloan I. H., Thomée V.* Nonsmooth data error estimates for approximations of an evolution equation with a positive-type memory term// Math. Comp. — 1996. — 65, № 213. — C. 1–17
 156. *Lunardi A.* *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, volume 16 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
 157. *Miklavčič M.* Approximations for weakly nonlinear evolution equations// Math. Comp. — 1989. — 53, № 188. — C. 471–484
 158. *Mills W. H., Jr.* The resolvent stability condition for spectra convergence with application to the finite element approximation of noncompact operators// SIAM J. Numer. Anal. — 1979. — 16. — C. 695–703

159. Miyadera I., Tanaka N. Exponentially bounded C -semigroups and generation of semigroups// J. Math. Anal. Appl. — 1989. — 143, № 2. — C. 358–378
160. Mountain J. K. The Lax equivalence theorem for linear, inhomogeneous equations in l^2 spaces// J. Approx. Theory. — 1981. — 33. — C. 126–130
161. Nair M. T. On strongly stable approximations// J. Austral. Math. Soc. Ser. A. — 1992. — 52, № 2. — C. 251–260
162. Nakaguchi E., Yagi A. Error estimate of implicit Runge–Kutta methods for quasilinear abstract equations of parabolic type in Banach space. Preprint, Department of Applied Physics, Graduate School of Engineering, Osaka University, 1996. Japanese Journal of Mathematics.
163. Nevanlinna O. On the convergence of difference approximations to nonlinear contraction semigroups in Hilbert spaces// Math. Comp. — 1978. — 32, № 142. — C. 321–334
164. Nevanlinna O., Vainikko G. Limit spectrum of discretely converging operators// Numer. Funct. Anal. Optim. — 1996. — 17, № 7–8. — C. 797–808
165. Ostermann A., Roche M. Runge–Kutta methods for partial differential equations and fractional orders of convergence// Math. Comp. — 1992. — 59, № 200. — C. 403–420
166. Palencia C. A stability result for sectorial operators in Banach spaces// SIAM J. Numer. Anal. — 1993. — 30, № 5. — C. 1373–1384
167. Palencia C. On the stability of variable stepsize rational approximations of holomorphic semigroups// Math. Comp. — 1994. — 62, № 205. — C. 93–103
168. Palencia C. Stability of rational multistep approximations of holomorphic semigroups// Math. Comp. — 1995. — 64, № 210. — C. 591–599
169. Palencia C. Maximum norm analysis of completely discrete finite element methods for parabolic problems// SIAM J. Numer. Anal. — 1996. — 33, № 4. — C. 1654–1668
170. Palencia C., García-Archilla B. Stability of linear multistep methods for sectorial operators in Banach spaces// Appl. Numer. Math. — 1993. — 12, № 6. — C. 503–520
171. Palencia C., Piskarev S. On multiplicative perturbations of c_0 -groups and c_0 -cosine operator functions. Technical report, Department of Mathematics, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain, 1998.
172. Palencia C., Sanz-Serna J. M. Equivalence theorems for incomplete spaces: an appraisal// IMA J. Numer. Anal. — 1984. — 4, № 1. — C. 109–115
173. Palencia C., Sanz-Serna J. M. An extension of the Lax–Richtmyer theory// Numer. Math. — 1984. — 44, № 2. — C. 279–283
174. Pani A. K., Thomée V., Wahlbin L. B. Numerical methods for hyperbolic and parabolic integro-differential equations// J. Integral Equations Appl. — 1992. — 4, № 4. — C. 533–584

175. *Parter S. V.* On the roles of "stability" and "convergence" in semidiscrete projection methods for initial-value problems// *Math. Comp.* — 1980. — 34, № 149. — C. 127–154
176. *Pfeifer D.* Some general probabilistic estimations for the rate of convergence in operator semigroup representations. *Appl. Anal.* — 1986. — 23, № 1-2. — C. 111–118
177. *Richtmyer R. D., Morton K. W.* *Difference methods for initial-value problems.* Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1967. Second edition. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 4.
178. *Saff E. B., Schönhage A., Varga R. S.* Geometric convergence to e^{-z} by rational functions with real poles// *Numer. Math.* — 1975/76. — 25, № 3. — C. 307–322
179. *Saff E. B., Varga R. S.* On the zeros and poles of Padé approximants to e^z // *Numer. Math.* — 1975/76. — 25, № 1. — C. 1–14
180. *Saff E. B., Varga R. S.* Geometric overconvergence of rational functions in unbounded domains// *Pacific J. Math.* — 1976. — 62, № 2. — C. 523–549
181. *Saff E. B., Varga R. S.* On the zeros and poles of Padé approximants to e^z . II. In *Padé and rational approximation (Proc. Internat. Sympos., Univ. South Florida, Tampa, Fla., 1976)*, pages 195–213. Academic Press, New York, 1977.
182. *Saff E. B., Varga R. S.* On the zeros and poles of Padé approximants to e^z . III// *Numer. Math.* — 1978. — 30, № 3. — C. 241–266
183. *Samarskii A., Andreev V.* *Méthodes aux différences pour équations elliptiques.* Éditions Mir, Moscow, 1978.
184. *Sanz-Serna J. M., Palencia C.* A general equivalence theorem in the theory of discretization methods// *Math. Comp.* — 1985. — 45, № 171. — C. 143–152
185. *Shaw S.-Y., Kuo Ch.-Ch.* Local C -semigroups and the Cauchy problems. Preprint, Department of Mathematics, 1996. National Central University, Taiwan.
186. *Strkalj Z., Weis L.* On operator-valued fourier multiplier theorems. *submitted.*
187. *Stummel F.* Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. III. In *Linear operators and approximation (Proc. Conf., Oberwolfach, 1971)*, pages 196–216. Internat. Ser. Numer. Math., Vol. 20. Birkhäuser, Basel, 1972.
188. *Takahashi T.* Convergence of difference approximation of nonlinear evolution equations and generation of semigroups// *J. Math. Soc. Japan.* — 1976. — 28, № 1. — C. 96–113
189. *Tanaka N.* Approximation of integrated semigroups by "integrated" discrete parameter semigroups// *Semigroup Forum.* — 1997. — 55, № 1. — C. 57–67, 1997.
190. *Tanaka N., Miyadera I.* Some remarks on C -semigroups and integrated semigroups// *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* — 1987. — 63, № 5. — C. 139–142

191. Tanaka N., Okazawa N. Local C -semigroups and local integrated semigroups. Proc. London Math. Soc. (3). — 1990. — 61, № 1. — C. 63–90
192. Thomée V. Finite difference methods for linear parabolic equations. In *Handbook of numerical analysis, Vol. I*, pages 5–196. North-Holland, Amsterdam, 1990.
193. Thomée V. Approximate solution of O.D.E.s in Banach space — rational approximation of semigroups. In *Hellenic research in mathematics and informatics '92 (Athens, 1992)*, pages 409–420. Hellenic Math. Soc., Athens, 1992.
194. Thomée V. Finite element methods for parabolic problems—some steps in the evolution. In *Finite element methods (Jyväskylä, 1993)*, volume 164 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pages 433–442. Dekker, New York, 1994.
195. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. *Solutions of ill-posed problems*. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.: John Wiley & Sons, New York, 1977. Translated from the Russian, Preface by translation editor Fritz John, Scripta Series in Mathematics.
196. Trotter H. F. Approximation of semi-groups of operators// Pacific J. Math. — 1958. — 8. — C. 887–919
197. Trotter H. F. On the product of semi-groups of operators// Proc. Amer. Math. Soc. — 1959. — 10. — C. 545–551
198. Trotter H. F. Approximation and perturbation of semigroups. In *Linear operators and approximation, II (Proc. Conf., Oberwolfach Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1974)*, pages 3–21. Internat. Ser. Numer. Math., Vol. 25. Birkhäuser, Basel, 1974.
199. Twizell E. H. *Computational methods for partial differential equations*. Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1984.
200. Twizell E. H., Khaliq A. Q. M. Multiderivative methods for periodic initial value problems// SIAM J. Numer. Anal. — 1984. — 21, № 1. — C. 111–122
201. Ushijima T. On the abstract Cauchy problems and semi-groups of linear operators in locally convex spaces// Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo. — 1971. — 21. — C. 93–122
202. Ushijima T. Approximation theory for semi-groups of linear operators and its application to approximation of wave equations// Japan. J. Math. (N.S.). — 1975/76. — 1, № 1. — C. 185–224
203. Ushijima T. The approximation of semi-groups of linear operators and the finite element method. In *Boundary value problems for linear evolution: partial differential equations (Proc. NATO Advanced Study Inst., Liège, 1976)*, volume 29 of NATO Advanced Study Inst. Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci., pages 351–362. Reidel, Dordrecht, 1977.
204. Ushijima T. Approximation of semigroups and the finite element method// Sûgaku. — 1980. — 32. — C. 133–148
205. Ushijima T., Matsuki M. Fully discrete approximation of a second order linear evolution equation related to the water wave problem. In *Functional analysis and related topics, 1991 (Kyoto)*, volume 1540 of Lecture Notes in Math., pages 361–380. Springer, Berlin, 1993.

206. *Vainikko G. Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden.* B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1976. Mit Englischen und Russischen Zusammenfassungen, Teubner-Texte zur Mathematik.
207. *Vainikko G. Über die Konvergenz und Divergenz von Näherungsmethoden bei Eigenwertproblemen// Math. Nachr.* — 1977. — 78. — C. 145–164
208. *Vainikko G. Über Konvergenzbegriffe für lineare Operatoren in der numerischen Mathematik// Math. Nachr.* — 1977. — 78. — C. 165–183
209. *Vainikko G. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem)// Nonlinear Anal.* — 1978. — 2. — C. 647–687
210. *Vainikko G. Foundations of finite difference method for eigenvalue problems. In The use of finite element method and finite difference method in geophysics (Proc. Summer School, Liblice, 1977),* pages 173–192. Česk. Akad. Věd, Prague, 1978.
211. *Vainikko G., Karma O. An estimate for the rate of convergence of eigenvalues in approximation methods. Tartu Riikl. Ül. Toimetised.* — 1988. — № 833. — C. 75–83
212. *van Casteren J., Piskarev S., Shaw S.-Y. Discretisation of C -semigroups.* submitted to Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1998.
213. *van Casteren J., Piskarev S., Shaw S.-Y. Discretization of C -semigroups. Proceedings of the Conference on inverse and ill-posed problems, Moscow State University, 1998.* 18.
214. *Vasiliev V. V., Piskarev S. Differential equations in Banach spaces II. Cosine-operator functions. Translated in J. Soviet Math.*
215. *Vasiliev V. V., Piskarev S. Differential equations in Banach spaces I. Semigroup theory. Moscow State University Publishing House, 1996. in Russian, 164 pages.*
216. *Vasiliev V. V., Piskarev S. I. Bibliography on Differential Equations in Abstract Spaces. Moscow State University, 2001, Electronic journal.* (http://www.srcc.msu.su/num_anal/list_wrk/page_5u.htm) PostScript (1115,2 Kb) PostScript.zip (336,1 Kb)
217. *Voigt J. On the convex compactness property for the strong operator topology// Note Mat.* — 1992. — 12. — C. 259–269 Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe.
218. *Weis L. A new approach to maximal L_p regularity. Proc. of the 6th Internat. Conf. on Evolution Equations, Marcel Dekker 2000.*
219. *Weis L. Operator-valued multiplier theorems and maximal L_p regularity. Mathematische Annalen, to appear.*
220. *Wolf R. Über lineare approximationsreguläre Operatoren// Math. Nachr.* — 1974. — 59. — C. 325–341
221. *Wu L. The semigroup stability of the difference approximations for initial-boundary value problems// Math. Comp.* — 1995. — 64, № 209. — C. 71–88
222. *Zheng Q., Lei Y. S. Exponentially bounded C -semigroup and integrated semigroup with nondensely defined generators. I. Approximation// Acta Math. Sci. (English Ed.).* — 1993. — 13, № 3. — C. 251–260