УДК 517.986.7; 517.983.6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ II. ТЕОРИЯ КОСИНУС ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

В.В. Васильев, С.И. Пискарёв

Васильевой Александре Владимировне и Пискаревой Лидии Ивановне, нашим мамам – посвящается

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-01-00398).

ВВЕДЕНИЕ

Прошло более 13 лет с момента подготовки фундаментального обзора [14], который, как предполагалось авторами, должен был стать первой частью большой работы, посвященной абстрактным дифференциальным уравнениям и методам их решения. Однако, несуразицы, господствовавшие весь этот период в российской науке, не прошли мимо авторов, и вместо двух предполагавшихся лет подготовка второй части заняла существенно более долгое время.

За последнее десятилетие работа в области теории дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах весьма активизировалась (за рубежом), и ежегодно в мире выходило по несколько книг и огромное количество статей, посвященные этому направлению (в большинстве, конечно же, эти книги практически недоступные российскому читателю). В это же время на русском языке вышло лишь две книги такого типа — [31], [72] в переводе авторов настоящего обзора и [18] под редакцией Ю. Л. Далецкого. Поэтому работа, вторая часть которой предлагается читателю, будет несомненно полезна российскому читателю. Стиль ее совпадает со стилем [14], т.е. материал часто приводится без доказательств и особое внимание уделено структуре изложения, хотя мы и приводим некоторые доказательства из труднодоступных и иностранных источников. Это, на наш взгляд, позволяет в рамках ограниченного объема более четко продемонстрировать читателю идейную часть, описать достигнутые результаты, обозначить основные направления развития теории.

Кроме того, авторы подготовили отдельное издание библиографического указателя [16], который может послужить достаточно полным источником информации по теории дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах за последние годы.

Основным объектом изучения в данной части являются дифференциальные уравнения второго порядка до сих пор весьма скудно представленные в русскоязычной литературе. Здесь можно отметить лишь книгу [18], написанную в соответствии с личными вкусами автора и не претендующую на всестороннее описание всех аспектов теории. Материал настоящего обзора, кроме того, включает изложения абстрактной задачи Коши для уравнений первого и второго порядков, не затронутые в книге [15].

Как уже отмечалось в [14], теория косинус оператор-функций идейно весьма близка к теории полугрупп операторов и часто развивается параллельно ей. Поэтому читатель легко проведет аналогии между представленным здесь материалом и [14]. В то же время теория косинус оператор-функций существенно отличается от теории полугрупп операторов. Эти различия прежде всего касаются свойств присущих соответствующим параболическим и гиперболическим дифференциальным уравнениям.

Приведем основные обозначения, некоторые из которых вводились в книге [15] и которые используются и здесь.

Множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$, целых – $\mathbb{Z}$, вещественных – $\mathbb{R}$, комплексных – $\mathbb{C}$. Набор чисел $1, 2, ..., m$, $m \in \mathbb{N}$ обозначаем $\overline{1,m}$, вещественную полуось $(0,\infty)$ — $\mathbb{R}_+$, а $[0,\infty)$ — через $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Через E будем обозначать банахово пространство над полем комплексных чисел с нормой $\|\cdot\|$. Для гильбертова пространства со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ будем использовать обозначение H.

Границу множества Ω будем обозначать $\partial\Omega$, внутренность множества Ω обозначим $\mathrm{int}(\Omega)$, замыкание в сильной топологии — $\overline{\Omega}$, замыкание, например, в слабой топологии — w-cl-(Ω).

Сопряженное к E пространство, как обычно, обозначаем E^*, с элементами — x^*, y^*, ..., а значение функционала $x^* \in E^*$ на элементе $x \in E$ запишем в виде $\langle x, x^*\rangle$.

Область определения и область значений оператора A будем записывать соответственно как $D(A)$ и $\mathcal{R}(A)$, а нуль-пространство — $\mathcal{N}(A)$. Множество линейных операторов, действующих из $D(A) \subseteq E$ в E обозначим через $L(E)$, а множество линейных непрерывных операторов — через $B(E)$. Замкнутые операторы в E с плотной областью определения ($\overline{D(A)} = E$) выделим в множество $\mathcal{C}(E) \subset L(E)$. В случае, если операторы действуют из одного пространства E в другое — F, будем писать соответственно $L(E,F)$ и $B(E,F)$.

Линейное многообразие $D(A)$, наделенное нормой $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$, в случае замкнутого линейного оператора становится банаховым пространством — будем обозначать его $\mathcal{D}(A)$.

Традиционную запись будем использовать для резольвентного множества $\rho(A)$ и спектра $\sigma(A)$ оператора A, который, как обычно, будем делить на точечный — $P\sigma(A)$, непрерывный — $C\sigma(A)$ и остаточный — $R\sigma(A)$.

Разделы 2.2, 2.4, 6.1, 6.3, 7.2, 9.2, 10.2, 10.3, 12.1–12.4, 12.6–12.10, 13.3–13.6 и глава 14 написаны С.И. Пискаревым, остальной текст подготовлен совместно.

Глава 1

ЗАДАЧА КОШИ И РАЗРЕШАЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА

Прежде, чем рассмотреть теорию C_0-косинус оператор-функций, мы опишем общую картину постановки корректной задачи Коши в банаховом пространстве. Как легко заметить, естественное обобщение понятия решения приводит к более общим семействам: проинтегрированным полугруппам и C-полугруппам. Эти семейства будут более подробно рассмотрены в следующем обзоре.

§ 1.1. Задача Коши для полного дифференциального уравнения

Пусть E — банахово пространство, а $A_0, A_1, ...A_{m-1}$ — замкнутые линейные операторы в E, т.е. $A_k \in \mathcal{C}(E), k \in \overline{0, m-1}$. Рассмотрим в банаховом пространстве E абстрактную задачу Коши порядка m

$$\begin{cases} u^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k u^{(k)}(t), & t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \\ u^{(k)}(0) = u_k^0, & k \in \overline{0, m-1},\ m \geqslant 2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Определение 1.1.1. Функция $u(\cdot) \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+; E)$ называется *классическим решением задачи* (1.1), если $u^{(k)}(t) \in D(A_k)$, $A_k u^{(k)}(\cdot) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; E)$ при $t \in \overline{\mathbb{R}}_+,\ k \in \overline{0, m-1}$, и удовлетворяются равенства (1.1).

Как и в [15], мы определим пропагаторы $\mathcal{P}_j(t)$, $j = \overline{0, m-1}$, которые будут давать решение задачи Коши (1.1) с начальными условиями $u_j^{(k)}(0) = \delta_{jk} u_j^0$ (δ_{jk} - символ Кронекера), т.е. $u_j(t) = \mathcal{P}_j(t) u_j^0$.

Определение 1.1.2. Задача Коши (1.1) называется *равномерно корректной*, если $\mathcal{P}_k(\cdot)x \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+; E), \mathcal{P}_{m-1}^{(k-1)}(t)x \in D(A_k), t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и $A_k \mathcal{P}_{m-1}^{(k-1)} x \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; E)$ для любого $x \in E$ и $k \in \overline{0, m-1}$.

В общем случае в банаховом пространстве E задача (1.1) не исследована.

Определение 1.1.3. Говорят, что оператор A *порождает α-раз проинтегрированную полугруппу*, с $\alpha \geqslant 0$, если $(\omega, \infty) \subseteq \rho(A)$ для некоторого $\omega \in \mathbb{R}$ и существует сильно непрерывная функция $S(\cdot) : [0, \infty) \to B(E)$ такая, что $\|S(t)\| \leqslant M e^{\omega t},\ t \in \overline{\mathbb{R}_+}$

с некоторой константой $M \geqslant 0$ и

$$(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)\, dt$$

для всех $\lambda > \max\{\omega, 0\}$.

Само семейство $S(\cdot)$ называется *α раз проинтегрированной полугруппой.*

Теорема 1.1.1 ([115]). *Пусть $m \geqslant 2$ и A_{m-1} порождает r раз проинтегрированную полугруппу. Предположим, что $D(A_i) \supseteq D(A_{m-1})$ для всех $i \in \overline{0, m-2}$, и, кроме того, $A_i D(A_{m-1}) \subseteq D(A_{m-1}^{i-m+r+2})$ для $i \geqslant m-r-1$. Тогда задача (1.1) имеет единственное экспоненциально ограниченное решение при $u_{m-1}^0 \in D(A_{m-1}^{r+1})$, $u_k^0 \in \bigcap_{j=0}^{m-1} D(A_{m-1}^r A_i)$, $\quad k \in \overline{0, m-2}$, и для некоторых констант $c, \omega > 0$ при $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ имеет место оценка*

$$\|u(t)\| + \|A_{m-1} u(t)\| \leqslant c e^{\omega t} \Big\{ \sum_{l=0}^{r+1} \|A_{m-1}^l u_{n-1}^0\| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-2} \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{l=0}^{r} \|A_{m-1}^l A_i u_k^0\| \sum_{k=0}^{m-2} (\|u_k^0\| + \|A_{m-1} u_k^0\|) \Big\}.$$

В работе [192] эта теорема несколько изменена с расширением множества начальных данных и отсутствием экспоненциальной ограниченности.

Обозначим $P(\lambda) := \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda^i A_i$ с областью определения $D(P) := \bigcap\limits_{i=0}^{m-1} D(A_i)$.

Теорема 1.1.2 ([193]). *Пропагаторы $\mathcal{P}_k^{(k)}(\cdot)$, $k \in \overline{0, m-1}$, являются непрерывными по норме при $t \in \mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда существует такое $\tau_0 \in \mathbb{R}_+$, что*

$$\lim_{|\omega| \to \infty} \|(\tau_0 + i\omega)^{m-1} P^{-1}(\tau_0 + i\omega)\| = 0, \tag{1.2}$$

$$\lim_{|\omega| \to \infty} \|(\tau_0 + i\omega)^{k-1} \overline{P^{-1}(\tau_0 + i\omega) A_k}\| = 0, \quad k \in \overline{0, m-1}. \tag{1.3}$$

Следствие 1.1.1. *Пусть выполнены условия (1.2)-(1.3). Тогда для каждого $k \in \overline{0, m-1}$ оператор $\mathcal{P}_k(t)$ непрерывен по норме при $t \in \mathbb{R}_+$.*

Случай зависимости $A_k = A_k(t)$, $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$, рассматривался, например, в [226], [227].

В [292] приведены условия существования единственного целого решения задачи (1.1).

Рассмотрим задачу (1.1) с $A_k \in \mathcal{C}(E)$ при всех $k \in \overline{0, m-1}$ и пусть $D(A_0) \subseteq D(A_k)$ при $k \in \overline{1, m-1}$.

Теорема 1.1.3 ([225])**.** *Для задачи Коши (1.1) при описанных предположениях следующие условия эквивалентны:*
i) оператор A_0 порождает C_0-полугруппу;
ii) для любых $u^0, u^1, ..., u^{m-1} \in D(A_0)$ задача Коши (1.1) имеет единственное решение $u(\cdot) \in C^{(m-1)}(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}(A_0))$.

Справедлива следующая теорема о равномерной устойчивости задачи (1.1).

Теорема 1.1.4. *Пусть оператор A_0 порождает C_0-полугруппу, $u(\cdot)$ — решение задачи Коши (1.1) с начальными условиями u_l^k ($k \in \overline{1, m-1}$; $l \to \infty$), $u_l^k \in D(A)$ при $k \in \overline{1, m-1}$, $u_l^k \to 0$ в E. Тогда $u_l(\cdot) \to 0$ равномерно на любом компакте.*

Теорема 1.1.5 ([225])**.** *Пусть A_0 порождает C_0-полугруппу, $A_k \in \mathcal{C}(E)$, $D(A) \subset D(A_k)$ и ω таково, что при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ существует обобщенная резольвента (резольвента пучка)*

$$R_\lambda := R(\lambda; A_0, ..., A_{m-1}) = (\lambda^m - \lambda^{m-1}A_{m-1} - ... - \lambda A_1 - A_0)^{-1}$$

(такое ω всегда найдется!). Пусть также на $D(A)$ выполнено равенство $A_k R_\lambda = R_\lambda A_k$ ($k \in \overline{1, m-1}; \operatorname{Re}\lambda > \omega$). Тогда задача (1.1) равномерно корректна и ее решение имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Q_{m-1-k,m-1}(t)u^k, \tag{1.4}$$

где оператор-функции $Q_{m-1-k,m-1}(t)$ есть сильно непрерывные семейства, образующие полугруппу операторов

$$G(t) = \begin{bmatrix} Q_{0,0}(t) & \dots & Q_{0,m-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{m,0}(t) & \dots & Q_{m-1,m-1}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с производящим оператором

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A_0 & I & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & I \\ A_{m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения порядка m специального вида:

$$\prod_{j=1}^{m}(\frac{d}{dt}-A_j)u(t)\equiv(\frac{d}{dt}-A_m)...(\frac{d}{dt}-A_1)u(t)=0 \tag{1.5}$$

с начальными условиями

$$u^{(k)}(0)=u_k^0, \quad k\in\overline{0,m-1},\, m\geqslant 2,$$

и операторами $A_j\in\mathcal{C}(E), j\in\overline{1,m}$.

Определение 1.1.4. Задача Коши (1.5) называется *равномерно корректной*, если

i) решение задачи Коши (1.5) существует для $u^0,...,u^{m-1}$, взятых из некоторого плотного в E множества D;

ii) при $u^0,...,u^{m-1}\in D$ решение задачи Коши (1.5) обладает свойством

$$\prod_{j=1}^{k}(\frac{d}{dt}-A_j)u(t)\in C^{m-k}(\overline{\mathbb{R}_+},E); \tag{1.6}$$

при $k\in\overline{1,m-1}$;

iii) равномерная устойчивость решения (1.5) на любом компакте дополняется условием: Из сходимости $\prod_{j=1}^{k}(\frac{d}{dt}-A_j)u_p(0)\to 0$ следует равномерная на каждом компакте из $\overline{\mathbb{R}_+}$ сходимость $\prod_{j=1}^{k}(\frac{d}{dt}-A_j)u_p(t)\to 0$ (здесь $k\in\overline{1,m-1}$; $p\to\infty$.

Теорема 1.1.6 ([18]). *Пусть в задаче Коши (1.5) $A_j\in\mathcal{C}(E)$ ($j\in\overline{1,m}$), пересечение резольвентных множеств $\rho(A_j)$ операторов A_j непусто и множество*

$$\tilde{D}\equiv\cap\{D(A_{i_1}...A_{i_m}):\, i_k\in\overline{1,m}\} \tag{1.7}$$

плотно в E. Тогда задача (1.5) равномерно корректна тогда и только тогда, когда A_j порождает C_0-полугруппу для каждого $j\in\overline{1,m}$.

Теорема 1.1.7 ([18]). *Пусть в условиях Теоремы 1.1.6 операторы A_j порождают C_0-полугруппы при $j\in\overline{1,m}$, причем эти полугруппы коммутируют:*

$$\begin{gathered}\exp(tA_i)\exp(sA_j)=\exp(sA_j)\exp(tA_i),\\ t,s\in\mathbb{R},\quad i,j\in\overline{1,m}.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Тогда задача (1.5) корректно поставлена.

Теорема 1.1.8. *Пусть для задачи Коши (1.5) выполнены условия Теоремы 1.1.7 и* $0 \in \rho(A_i - A_j)$ *при всех* $i \neq j$*. Тогда условие* $w(t) \in \mathcal{N}\Big(\prod_{i=1}^{m}(\frac{d}{dt} - A_i)\Big)$ *при* $t \in \overline{\mathbb{R}}$ *влечет равенство* $w(t) = \sum_{i=1}^{m} w_i(t)$*, где* $w_i(t) \in \mathcal{N}(\frac{d}{dt} - A_i)$*,* $t \in \mathbb{R}$*.*

Условие (1.8) в теореме 1.1.7 можно заменить на ряд условий на области $\mathcal{R}(A_i - A_j)$ при $i \neq j$.

Пусть $1, \varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^{p-1}$ – корни p-й степени из единицы, т.е. $\varphi^k = e^{\frac{2\pi k}{p} i}$.

Определение 1.1.5. *C_0-функцией типа Миттаг-Леффлера с параметром p* называется функция $\mathfrak{M} : \mathbb{C} \to B(E)$ со свойствами

i) $\sum_{k,l=0}^{p-1} \mathfrak{M}(\varphi^k t + \varphi^l s) = p^2 \mathfrak{M}(t)\mathfrak{M}(s)$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$;

ii) $\mathfrak{M}(0) = I$;

iii) семейство операторов $T(t) \equiv \mathfrak{M}(\varphi^k t + \varphi^l s)$, $k, l \in \overline{0, p-1}$ с фиксированным $s \in \mathbb{R}$ сильно непрерывно по $t \in \mathbb{R}$.

Для C_0-функции Миттаг-Леффлера с параметром p определяется p-генератор A соотношением

$$Ax = s\text{-}\lim_{t\to 0} p! \frac{\mathfrak{M}(t) - I}{t^p} x$$

на тех x, на которых предел существует. Известно, что производящий оператор C_0-функции Миттаг-Леффлера с параметром p линейный замкнутый плотно определенный оператор и для любого $x \in D(A)$ имеет место равенство

$$\frac{d^p}{dt^p} \mathfrak{M}(t)x = A\mathfrak{M}(t)x = \mathfrak{M}(t)Ax,$$

причем $\mathfrak{M}^{(k)}(0) = 0$ для $k \in \overline{0, p-1}$.

Для C_0-функции Миттаг-Леффлера с параметром p имеют место теоремы о возмущении типа Филлипса–Миядеры (см. [15]).

Теорема 1.1.9 ([30])**.** *Пусть A порождает C_0-функцию Миттаг-Леффлера с параметром p и $\|\mathfrak{M}(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $B \in B(E)$ оператор $A + B$ порождает C_0-функцию Миттаг-Леффлера с параметром p.*

Предложение 1.1.1. *C_0-функция Миттаг-Леффлера с параметром p в случае $p = 1$ является C_0-группой операторов, а в случае $p = 2$ – C_0-косинус оператор-функцией. C_0-функция Миттаг-Леффлера с параметром p для $p \geqslant 3$ имеет ограниченный производящий оператор $A \in B(E)$.*

В наиболее простом случае $m = 2$ для задачи (1.1), например, справедливы

Теорема 1.1.10 ([225]). *Пусть задача Коши (1.1) при $m = 2$ равномерно корректна и $\mathcal{P}_1'(t)E \in \mathcal{D}(A_1)$ при $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Тогда A_0 порождает C_0-косинус оператор-функцию на E.*

Теорема 1.1.11 ([225]). *Пусть $A_1 \in B(E)$. Тогда задача Коши (1.1) при $m = 2$ равномерно корректна тогда и только тогда, когда A_0 порождает C_0-косинус оператор-функцию на E.*

Тем не менее в общем случае даже для $m = 2$ задача Коши (1.1) оказывается слишком сложной. Во первых, H.O.Fattorini в [133] привел пример того, что задача Коши (1.1) при $m = 2$ имеет решение, которое не является экспоненциально ограниченным. Во-вторых, в отличие от задачи Коши для $m = 1$, случай $m = 2$ допускает большую гибкость в определении корректной постановки.

Приведем в качестве одного из вариантов подход, восходящий к H.O.Fattorini. Конструкции, используемые при доказательстве этих теорем практически полностью повторяют технику, применяемую при доказательстве утверждений, касающихся C_0-косинус и C_0-синус оператор-функций (см. также [28]).

Рассмотрим задачу Коши

$$u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{1.9}$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,$$

с $A, B \in \mathcal{C}(E)$.

Определение 1.1.6. Будем говорить, что операторы A и B порождают *M, N-семейства операторов* в E, если

(i) $M(t)$ и $BN(t)$ сильно непрерывны по $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и функция $N(t)x$ сильно непрерывно дифференцируема по $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ при любом $x \in E$;

(ii) множество $\hat{E} = \{x \in E : M(t)x$ сильно дифференцируема по $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и $BM(t)x$ непрерывна по $t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ плотно в E;

(iii) Оператор $A = -M''(0)$, B-замкнут и $Bx = -N''(0)x$ при всех $x \in \hat{E}$;

(iv) $M(0) = N'(0) = I$ и $N(0) = 0$;

(v) $M(t+s)x = M(t)M(s)x + N(t)M'(s)x$ при всех $x \in \hat{E}$ и $t, s \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(vi) $N(t+s) = M(t)N(s) + N(t)N'(s)$ при всех $t, s \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Теорема 1.1.12 ([28]). *Пусть A и B порождают M, N-семейства. Тогда* *(i) A замкнут, $D(A)\cap D(B)\subseteq \hat{E}\subseteq D(B)$ и $D(A)\cap D(B)$ плотно в E;*

(ii) семейства M,N единственным образом определяются операторами A и B;

(iii) $M'(0)x=0$ для всех $x\in D(M'(0))$;

(iv) $M'(t)x=-N(t)Ax$ при всех $x\in D(A)$ и $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$;

(v) $N'(t)x=M(t)x-N(t)Bx$ при всех $x\in\hat{E}$ и $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$;

(vi) $N''(t)x+N'(t)Bx+N(t)Ax=0$ при всех $x\in D(A)\cap D(B)$ и $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$;

(vii) при всех $x\in\hat{E}$ и $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$; элемент $N'(t)x\in\hat{E}$, $N(t)x\in D(A)$ и $N''(t)x-x+BN'(t)x+AN(t)x=0$;

(viii) при всех $x\in E$ и $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ элемент $\int_0^t N(s)x\,ds\in D(A)$, и $N''(t)x-x+BN(t)x+A\int_0^t N(s)x\,ds=0$;

(ix) для всех $x\in E$ и $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ элемент $\int_0^t N(s)x\,ds\in\hat{E}$, $M(t)x\in D(A)$ и $M''(t)x+BM'(t)x+AM(t)x=0$;

(x) для всех $x\in D(A)\bigcup\hat{E}$ и $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ элемент $M(t)x-x\in\hat{E}$, $\int_0^t M(s)x\,ds\in D(A)$ и $M'x+B(M-I)x+A\int_0^t M(s)xds=0$;

(xi) существуют константы $C,\omega\geqslant 0$ такие, что

$$\|M(t)\|,\|N(t)\|,\|BN(t)\|,\|N'(t)\|\leqslant Ce^{\omega t},\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

при всех $x\in\hat{E}$ существуют константы $C,\omega\geqslant 0$ такие, что

$$\|M'(t)x\|,\|BM(t)x\|\leqslant C(x)e^{\omega t},\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+;$$

(xii) оператор $\lambda^2I+\lambda B+A$ замыкаем при всех $\lambda\in\mathbb{C}$;

(xiii) существует константа $\omega\in\overline{\mathbb{R}}_+$ такая, что $\lambda\in\rho(A,B)$ для всех λ с $\operatorname{Re}\lambda>\omega$ и

$$\Delta(\lambda)x:=(\lambda^2I+\lambda B+A)^{-1}x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}N(t)x\,dt\quad \textit{при}\quad x\in E;$$

$$\Delta(\lambda)(I+B)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}M(t)xdt\quad \textit{при}\quad x\in\hat{E};$$

(xiv) $\lambda^2\Delta(\lambda)x\to x$ при $\lambda\to\infty$ для всех $x\in E$.

Имеет место аналог Теоремы 2.1.1 из [15]:

Теорема 1.1.13 ([291]). *Операторы A и B порождают M,N семейства тогда и только тогда, когда*

(i) операторы A и B замкнуты и $D(A)\bigcap D(B)$ плотно в E;

(ii) существуют константы $C, \omega \geqslant 0$ такие, что $\lambda \in \rho(A,B)$ при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ оператор $\Delta(\lambda)A$ замыкаем и

$$\|\Big(\lambda\Delta(\lambda)\Big)^{(k)}\|, \|\Big(B\Delta(\lambda)\Big)^{(k)}\|, \|\Big(\overline{\Delta(\lambda)}B\Big)^{(k)}\| \leqslant \frac{Ck!}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{k+1}}$$
$$\text{при} \quad k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega, \tag{1.10}$$

где $\overline{\Delta(\lambda)B}$ ограниченное расширение оператора $\Delta(\lambda)B$ с областью определения $D(A) \cap D(B)$, а $(\cdot)^{(k)}$ - производная порядка k по λ.

В случае коммутирующих A и B вместо оценки с оператором B в (1.10) может фигурировать, например, $\|\frac{d^k}{d\lambda^k}\Big((\lambda I - A)\Delta(\lambda)\Big)\| \leqslant \frac{Mk!}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}_0$ (см. [28]).

Если $A = 0$, то A и B порождают M, N семейства тогда и только тогда, когда B порождает C_0-полугруппу.

Пусть $D(B) \subseteq D(A)$ и $\rho(B) \neq \varnothing$. Если $(\lambda_0 I - B)^{-1}A$ имеет ограниченное расширение для некоторой точки $\lambda_0 \in \rho(B)$, то A и B порождают M, N-семейства тогда и только тогда, когда B порождает C_0-полугруппу.

Предложение 1.1.2 ([291]). *Пусть B подчинен A с показателем $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, т.е. $D(A) \subseteq D(B)$ и $\|Bx\| \leqslant C_\alpha \|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^\alpha$ при всех $x \in D(A)$, и A и B коммутируют. Если $-A$ порождает C_0-косинус оператор-функцию и $\|(\lambda^2 I + A)^{-1}\| \leqslant C|\lambda|^{-2}$ при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, то A и B порождают M и N семейства.*

Рассмотрим теперь аналитическое продолжение решения уравнения (1.9) в сектор $\Sigma(\theta) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |arg\, z| < \theta\}$.

Теорема 1.1.14 ([291]). *Для заданных $\theta, \omega \geqslant 0$ следующие условия эквивалентны:*

(i) задача Коши (1.9) равномерно корректна и семейства M, N могут быть аналитически продолжены в сектор $\Sigma(\theta) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |argz| < \theta\}$, при любом z имеет место вложение $N(z)E \subseteq D(B)$ и $BN(\cdot)$ аналитична в $\Sigma(\theta)$. Кроме того, при каждых $\theta' \in (0, \theta)$, $x \in E$

$$\lim_{\substack{z\in\Sigma_{\theta'}\\ z\to 0}} N'(z)x = 0, \ \lim_{\substack{z\in\Sigma_{\theta'}\\ z\to 0}} BN(z)x = 0,$$
$$\lim_{\substack{z\in\Sigma_{\theta'}\\ z\to 0}} M(z)x = x, \ \lim_{\substack{z\in\Sigma_{\theta'}\\ z\to 0}} N(z)x = 0,$$

и существует константа $C'_\theta > 0$ такая, что

$$\|N'(z)\|, \|BN(z)\|, \|M(z)\| \leqslant C'_\theta e^{\omega \operatorname{Re} z} \quad \textit{для всех} \quad z \in \Sigma(\theta);$$

(ii) множество $D(A) \cap D(B)$ плотно в E. Для каждого $\theta' \in (0, \theta)$ существует $M'_\theta > 0$ такое, что при $\lambda \in \Sigma(\theta', \omega) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega, |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \theta'\}$, оператор $\Delta(\lambda) := (\lambda^2 I + \lambda B + A)^{-1} \in B(E)$ существует, оператор $\Delta(\lambda)A$ замыкаем и

$$\|\lambda\Delta(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \;\; \|B\Delta(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \;\; \|\overline{\Delta(\lambda)B_0}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|},$$

где $B_0 \subseteq B$ с $D(B_0) = D(A) \cap D(B)$. Кроме того, в этом случае мы имеем:

$$N''(z) + BN'(z) + AN(z) = 0, \quad M''(z) + BM'(z) + AM(z) = 0,$$

где $AN(z)$ и $AM(z)$ аналитичны в $\Sigma(\theta)$. При каждом $\theta' \in (0, \theta)$

$$\lim_{\substack{z \in \Sigma_{\theta'} \\ z \to 0}} M'(z)x = 0 \qquad \textit{для любого} \quad x \in D(A).$$

Существование и единственность решения уравнения (1.9) в некоторых "гиперболических" условиях рассматривается в [229]. Задача (1.9) в случае нелинейного B рассмотрена в [187].

§ 1.2. Задачи Коши для дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка

В настоящем разделе мы приведем некоторые постановки задач Коши для уравнений первого и второго порядков. Уравнения первого порядка уже рассматривались в книге [15], однако лишь в связи с C_0-полугруппами на пространстве E. Мы рассматриваем здесь более общие интерпретации, подготавливая читателя к более универсальному подходу который будет изложен в обзоре 3.

Как уже отмечалось, возможны различные постановки задач Коши. Приведем некоторые рассуждения, когда решение дается не C_0-семействами на всем пространстве E.

Определение 1.2.1. *Проинтегрированным решением* задачи Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = x, \tag{1.11}$$

назовем непрерывно дифференцируемую функцию $v(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to E$ такую, что

(i) $v(\cdot) \in C([0, \infty); \mathcal{D}(A))$ и

(ii) $\frac{dv}{dt}(t) = Av(t) + x, \quad v(0) = 0.$

Определение 1.2.2. Обозначим через $\mathcal{Z}(A)$ *разрешающее множество* оператора A, т.е. множество всех таких $x \in E$, что задача Коши (1.11) имеет проинтегрированное решение.

Предложение 1.2.1. *Пусть $\mathcal{Z}(A)$ – разрешающее подпространство, наделенное семейством полунорм*

$$\|x\|_{a,b} = \sup_{t\in[a,b]} \|u(t)\|, \qquad a, b \in \mathbb{R}_+. \tag{1.12}$$

Тогда $\mathcal{Z}(A)$ есть пространство Фреше и $T(t)x = u(t)$ является локально эквинепрерывной полугруппой, порожденной оператором $A|_{\mathcal{Z}(A)}$.

Напомним определение целых векторов, эквивалентное [15]⤳[Определение 3.1.3].

Определение 1.2.3. Обозначим через $\mathfrak{U}_c(A)$ множество целых векторов оператора A, т.е. множество таких $x \in D(A^\infty)$, что для любого $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k x\| \frac{t^k}{k!} < \infty.$$

Предложение 1.2.2 ([114])**.** *Любой линейный замкнутый оператор на E с резольвентным множеством $\rho(A)$, содержащим полуось (ω, ∞), порождает C_0-полугруппу на некотором максимальном подпространстве в E.*

Предложение 1.2.3 ([114])**.** *Для любого замкнутого линейного оператора A существует максимальное пространство Фреше $\mathcal{Z}(A)$ такое, что $\mathcal{Z}(A) \subseteq E$ и задача Коши (1.11) автоматически равномерно корректно поставлена на $\mathcal{Z}(A)$.*

Как видно из этого Предложения, требование существования C_0- полугруппы весьма ограничительно. В то же время именно для C_0-семейств операторов лучше всего разработаны технические приемы для исследования аппроксимационных методов.

Теорема 1.2.1 ([114])**.** *Пусть $A \in \mathcal{C}(E)$. Тогда $\mathfrak{U}_c(A) = \{x \in E :$ задача (1.11) имеет целое решение$\}$ и $\mathfrak{U}_c(A) \subseteq \mathcal{Z}(A)$.*

Теорема 1.2.2 ([82])**.** *Пусть A порождет на E аналитическую C_0-полугруппу. Тогда $\mathfrak{U}_c(A) = \mathcal{Z}(A)$, причем равенство выполняется топологически и алгебраически.*

Как известно, самосопряженный оператор $A^* = A \leqslant 0$ в гильбертовом пространстве H порождает как аналитическую C_0-полугруппу, так и C_0-косинус оператор-функцию. Кроме того, в этом случае по теореме Стоуна оператор iA порождает унитарную C_0-группу на H. В то же время практические задачи зачастую требуют отказаться от самосопряженности оператора и гильбертовости исходного пространства. Поэтому установить порождает ли конкретный оператор C_0-полугруппу или нет является не простой, и зачастую, сложной самостоятельной проблемой. Мы приведем здесь примеры, когда возможна проверка условий порождения C_0-семейств в банаховом пространстве E.

Теорема 1.2.3 ([41]). *Для того, чтобы $A \in \mathcal{C}(E)$ был генератором аналитической C_0-полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа ν, ω и $\alpha > 1$, такие что при всех $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0$ выполнено неравенство*

$$\|(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M|\lambda|^\nu}{(\operatorname{Re}\lambda)^{\nu+\alpha-1}(\operatorname{Re}\lambda - \omega)},$$

при этом для полугруппы справеделиво представление

$$\exp(zA) = -\frac{\alpha}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{z\mu^\alpha}\mu^{\alpha-1}(\mu^\alpha I - A)^{-1}\,d\mu$$

для $z \in \{z \in \mathbb{C} : Imz < \operatorname{Re} z|ctg\frac{\alpha\pi}{2}|\}$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ - некоторая область. Обозначим через $\mathfrak{C}(\Omega)$ пространство равномерно непрерывных и ограниченных в Ω функций с нормой

$$\|v(\cdot)\|_{\mathfrak{C}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega}|v(x)|$$

и $\mathfrak{C}_\rho(\Omega) = \{v(\cdot) : \rho(\cdot)v(\cdot) \in \mathfrak{C}(\Omega), \rho(t) \geqslant 0\}$, $\|v(\cdot)\|_{\mathfrak{C}_\rho(\Omega)} = \|\rho(\cdot)v(\cdot)\|_{C(\Omega)}$.

Пример 1.2.1 ([41]). Пусть $\Omega = [0,1]$ и $Av = v''(\cdot)$ с $D(A) = \{v(\cdot) : v \in C(\Omega), Av \in C(\Omega), v'(0) = v'(1) = 0\}$. Тогда $A \in \mathcal{H}(\omega, \frac{\pi}{2})$ в $C([0,1])$.

В то же время оператор $A_0 v = v''(\cdot)$ с $D(A_0) = \{v(\cdot) : v \in C([0,1]), v(0) = v(1) = 0\}$ является $A_0 \in \mathcal{H}(0,\beta)$ на $C_0([0,1]) = \{v(\cdot) : v \in C([0,1]), v(0) = v(1) = 0\}$.

Наконец, оператор $A_\rho v = v''$ с $D(A_\rho) = \{v(\cdot) : \rho(\cdot)v(\cdot) \in C([0,1]),\ A_\rho v \in \mathfrak{C}_\rho([0,1])\}$ порождает аналитическую C_0-полугруппу с оценкой

$$\|\exp(tA_\rho)\|_{\mathfrak{C}_\rho([0,1])} \leqslant e^{-\pi^2 t}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

Пример 1.2.2 ([41], [265]). Оператор Лапласа

$$\Delta v = \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j^2}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

задает при $1 < p < \infty$ генератор аналитической C_0-полугруппы в $E = W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$.

Здесь уместно напомнить (см. [166]), что оператор $i\Delta$ при $p \neq 2$ не порождает C_0-полугруппу на $L^p(\mathbb{R}^d)$. Кроме того, оператор Δ порождает C_0-косинус оператор-функцию тогда и только тогда, когда $p = 2$ или $d = 1$.

Заметим также (см. [123]), что оператор $-(i\Delta)^{1/2}$ не порождает C_0-полугруппы на $L^1(\mathbb{R}^1)$.

Пример 1.2.3 ([123]). Оператор Лапласа Δ в $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, порождает α-раз проинтегрированную косинус оператор-функцию при $\alpha > (d-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$.

Пример 1.2.4 ([122]). Пусть $\tilde{A}$ - сильно эллиптический оператор в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Обозначим через $T_r(\cdot)$ C_0-полугруппу в $L^r(\Omega)$, порождаемую операторами $\tilde{A}$ с условиями Дирихле или Неймана на границе. Тогда существует аналитическая C_0-полугруппа $T_p(\cdot)$ с углом $\pi/2$ в $L^p(\Omega)$ такая, что $T_p(t)x = T_r(t)x$ при всех $x \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$.

Пример 1.2.5 ([123]). Пусть $1 < p < \infty$, оператор $\tilde{A}_p$ порождает полугруппу $T_p(\cdot)$ и $\mu(\Omega) < \infty$. Тогда $\tilde{A}_p$ порождает α раз проинтегрированную косинус оператор-функцию на $L^p(\mathbb{R}^d)$ при $\alpha > \frac{d}{2}\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| + \frac{1}{2}$.

Пример 1.2.6 ([34]). Пусть $\Omega = \mathbb{R}_+$. Оператор $(Av)(x) = v''(x) + \frac{a}{x}v'(x) + \frac{c}{x}v(x)$ при $a, c \in \mathbb{R}$ и $D(A) = \{v(\cdot) : v \in \mathfrak{C}(\overline{\mathbb{R}_+}), Av \in C(\overline{\mathbb{R}_+})\}$ порождает аналитическую C_0-полугруппу тогда и только тогда, когда $c \leqslant 0$.

Пример 1.2.7 ([41]). Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Тогда оператор $(Av)(x) = \frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{dv(x)}{dx}\Big)$ с $D(A) = \{v(\cdot) : v \in \mathfrak{C}(\Omega),\ Av \in \mathfrak{C}(\Omega)\}$ порождает C_0-полугруппу.

Пример 1.2.8 ([41]). Пусть $(Av)(x) = v''(x) + q(x)v(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Обозначим через S_p банахово пространство функций Степанова, т.е. функций, заданных на $\mathbb{R}$, с нормой $\|v(\cdot)\|_{p,l} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(s)|^p\,ds)^{\frac{1}{p}}$, $l > 0$, $p \geqslant 1$. Известно, что при различных l нормы эквивалентны. Для того, чтобы оператор $A \in \mathcal{H}(\omega, \beta)$ на $C(\mathbb{R})$, достаточно, а в случае $q(x) \geqslant c > -\infty$ и необходимо, чтобы $q(\cdot) \in S_1$.

Обозначим $H_{-1}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-s^2-2sz}\,ds$ и

$$H_\tau(t)(\lambda^2 I - A)^{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} H_{-1}(\lambda\tau)e^{\lambda t}\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}\,d\lambda.$$

Теорема 1.2.4 ([33]). *Для того, чтобы $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы он был производящим оператором аналитической C_0-полугруппы, и при каждом $t \in [0,T]$ выполнялась оценка*

$$\|H_\tau(t)(\lambda^2 I - A)^{-1}\| \leqslant M(t) \tag{1.13}$$

равномерно по $\tau \in (0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В этом случае

$$C(t,A) = s\text{-}\lim_{\tau\to 0}(H_\tau(t) + H_\tau(-t))(\lambda^2 I - A)^{-1}, \qquad t \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

Пример 1.2.9 ([33]). Пусть оператор A задан как в примере 1.2.6. Тогда для функции

$$f_\tau(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0,1), \\ \frac{x-1}{2\tau}, & \text{если } x \in [1, 1+2\tau), \\ 1, & \text{если } x \in [1+2\tau, \infty) \end{cases}$$

имеем $\|H_\tau(1)(\lambda^2 I - A)^{-1} f_\tau\| > \frac{M}{\tau}$, а значит по Теореме 1.2.4 такой оператор A не порождает C_0-косинус оператор-функцию.

Пример 1.2.10 ([41]). Рассмотрим оператор A из примера 1.2.6, но в пространстве $\mathfrak{C}_\rho(\overline{\mathbb{R}_+})$ с $\rho(x) = xe^{x\gamma}$, $x \in \overline{\mathbb{R}_+}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Тогда $\|H_\tau(t)(\lambda^2 I - A)^{-1} v\|_{\mathfrak{C}_\rho} \leqslant Me^{|\mu t|}\|v\|_{\mathfrak{C}_\rho}$, и значит $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$.

Пример 1.2.11 ([41]). Пусть A задан как в примере 1.2.8. Для того, чтобы $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ в пространстве $C(\mathbb{R})$ достаточно, а в случае $q(x) \geqslant c > -\infty$ и необходимо, чтобы $q(\cdot) \in S_1$.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = x^m \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \alpha x^{m-1}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \tag{1.14}$$

с $m > 0$, $x > 0$ и начальными условиями $\lim_{t\to 0} u(t,x) = \varphi(x)$, $\lim_{t\to 0} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \psi(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$, где $\varphi, \psi \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+) \cap E$, где E – банахово пространство функций $\varphi \in C(\mathbb{R}_+)$ таких, что $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$ с нормой $\|\varphi\| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}|\varphi(x)|$.

Определение 1.2.4. Задача (1.14) называется равномерно корректной, если для любого компакта $J \subset \mathbb{R}_+$ имеем $\max_{t\in J}|u(t,x)| \leqslant M(\|\varphi\| + \|\psi\|)$.

Пример 1.2.12 ([41]). Для оператора $(Av)(x) = x^m v''(x) + \alpha x^{m-1}v'(x)$ с $D(A) = \{v \in E : v \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+) \cap E,\ Av \in E\}$ в описанном пространстве E условие (1.13) проверяется при $0 \leqslant \frac{2\alpha-(1+\alpha)^m}{2-m} < 1$. При $\frac{2\alpha-(1+\alpha)^m}{2-m} \geqslant 1$ оператор A не порождает C_0-косинус оператор-функцию.

Пример 1.2.13 ([41]). Для оператора $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, определенного в пространстве $C(\mathbb{R}^d)$, оператор Δ^{2k+1} в $C(\mathbb{R}^d)$ порождает C_0-косинус оператор-функцию тогда и только тогда, когда $d \leqslant 4k+1$.

Здесь в связи с примером 1.2.13 уместно заметить, что для любого $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ всякий многочлен $P(A) = A^{2m+1} + \sum_{k=0}^{2m} c_k A^k$, $c_k \in \mathbb{R}$, порождает аналитическую полугруппу.

При этом оператор $(-1)^{m+1}A^m$ в случае четного m не обязан порождать C_0-косинус оператор-функцию.

Предложение 1.2.4 ([176]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(M,0)$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ оператор $(-1)^k A^{2^k}$ порождает α раз проинтегрированную косинус оператор-функцию при некотором $\alpha > 0$. Кроме того, $(-1)^k A^{2^k} \in \mathcal{H}(\omega, \pi/2)$.*

Теорема 1.2.5 ([230]). *Пусть $A \in \mathcal{H}(0, \frac{\pi}{2})$ и $m \in \mathbb{N}$. Пусть $B_i \in B(E)$, $i \in \overline{1,m}$. Тогда оператор $(-1)^{m+1}A^m + B_1 A^{m-1} + \ldots + B_{m-1}A + B_m$ порождает аналитическую C_0-полугруппу с углом $\frac{\pi}{2}$.*

Аналогичное утверждение для C_0-косинус оператор-функций неверно!

Теорема 1.2.6 ([177]). *Пусть $\{A_j\}_{j=1}^m$ – резольвентно коммутирующие операторы и $A_j \in \mathcal{C}(M,0)$, $j \in \overline{1,m}$, заданы на E. Определим $A_0 = \sum_{j=1}^m A_j$, $D(A_0) = \cap_{j=1}^m D(A_j)$. Тогда оператор A_0 замыкаем и $\overline{A_0}$ порождает α раз проинтегрированную косинус оператор-функцию при $\alpha \geqslant \frac{m-1}{2}$.*

При этом эта α раз проинтегрированная полугруппа удовлетворяет оценке $\|S(t)\| \leqslant M_\alpha t^\alpha$, $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$ при некоторых $M_\alpha > 0$ и $\alpha \geqslant \frac{m-1}{2}$.

Теорема 1.2.7 ([176]). *В условиях и обозначениях Теоремы 1.2.6 оператор $i\overline{A_0}$ порождает β-раз проинтегрированную группу при $\beta > m/2$.*

Предложение 1.2.5 ([177]). *Пусть в условиях теоремы 1.2.6 дополнительно пространство $E = H$ – гильбертово. Тогда $\overline{A_0}$ порождает C_0-косинус оператор-функцию.*

Предложение 1.2.6 ([177]). *Пусть в условиях Теоремы 1.2.6 дополнительно $E = H$ – гильбертово и является банаховой решеткой, причем $C(t, A_j)H_+ \subseteq H_+$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \overline{1,m}$.*

Определим

$$C_k(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} C(s, \overline{A_0})\, ds & \textit{при } k \geqslant 1, \\ C(t, \overline{A_0}) & \textit{при } k = 0. \end{cases}$$

Тогда $C_k(\cdot)$ *положительны при* $k \geqslant \left[\frac{m}{2}\right]$.

Пример 1.2.14 ([161]). Пусть $E = L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. Тогда оператор Лапласа Δ с $D(\Delta) = W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$ порождает α раз проинтегрированную косинус оператор-функцию тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant (d-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$.

В работе [293] исследуются конкретные дифференциальные операторы на порождение корректной постановки задачи Коши для полного уравнения второго порядка.

§ 1.3. Резольвентные семейства

Для функций $k(\cdot) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+)$ и $g(\cdot) \in W^{1,1}([0,T]; E)$ рассмотрим уравнение Вольтерра

$$u(t) = g(t) + \int_0^t k(t-s) A u(s)\, ds, \quad t \in [0,T]. \tag{1.15}$$

Определение 1.3.1. Сильно непрерывное семейство ограниченных линейных операторов $\{R(t) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ в E называется *резольвентным семейством* для (1.15), если оно коммутирует с оператором A и

$$R(t)x = x + \int_0^t k(t-s) A R(s) x\, ds \qquad \text{для} \quad x \in D(A),\, t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Если резольвентное семейство существует, то любое решение уравнения (1.15) представимо в виде

$$u(t) = R(t) g(0) + \int_0^t k(t-s) g'(s)\, ds, \quad t \in [0,T]. \tag{1.16}$$

Теорема 1.3.1 ([111], [148], [241]). *Пусть* $R(\cdot)$ *— сильно непрерывное семейство операторов на* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *такое, что* $\|R(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ *и* $|k(t)| \leqslant Me^{\omega t}$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. *Тогда* $R(\cdot)$ *является резольвентным семейством тогда и только тогда, когда*

(i) $\hat{k}(\lambda) \neq 0$ *и* $\frac{1}{\lambda \hat{k}(\lambda)} \in \rho(A)$ *при всех* $\lambda \geqslant \omega$,

(ii) $\left(I - \lambda \hat{k}(\lambda) A\right)^{-1} x = \int_0^\infty e^{\lambda t} R(t) x\, dt$ *при всех* $x \in E$ *и* $\lambda > \omega$,

где $\hat{k}(\cdot)$ *– преобразование Лапласа функции* $k(\cdot)$.

В частности, следует отметить, что при $k(t) \equiv 1$ резольвентное семейство есть C_0-полугруппа операторов, а при $k(t) = t$ — C_0-косинус оператор-функция. Таким образом, доказательство ряда утверждений относительно свойств, связанных с C_0-полугруппами и C_0-косинус оператор-функциями можно получить из утверждений относительно резольвентных семейств.

При ядре $k(\cdot)$ с некоторыми ограничениями (положительность, ограниченная вариация) для резольвентного семейства передоказаны многие результаты, справедливые для C_0-полугрупп и C_0-косинус оператор-функций. Так, например, C. Lizama в [195] - [197] передоказал утверждения о свойствах компактности, равномерной непрерывности, периодичности. Jung Chan Chang и S.-Y. Shaw в [169] передоказали теоремы о мультипликативных и аддитивных возмущениях.

§ 1.4. Неполная задача Коши

Рассмотрим для уравнения второго порядка так называемые неполные задачи Коши

$$\begin{gathered} u''(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|u(t)\| < \infty; \end{gathered} \tag{1.17}$$

$$\begin{gathered} u''(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \lim_{t\to 0+} u(t) = u^0, \quad \lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0; \end{gathered} \tag{1.18}$$

$$\begin{gathered} u''(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, \quad \lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Неполные задачи Коши исследовались в [114], [135], [138].

Предложение 1.4.1. *Оператор A имеет квадратный корень $\sqrt{A}$ такой, что $\exp(t\sqrt{A})$ является ограниченной аналитической C_0-полугруппой тогда и только тогда, когда задача (1.17) имеет единственное решение при каждом $u^0 \in D(A)$ и это решение аналитически продолжается в некоторый сектор, содержащий полуось $\mathbb{R}_+$.*

Предложение 1.4.2. *Пусть существует $\sqrt{A}$, который порождает дифференцируемую C_0-полугруппу такую, что $s\text{-}\lim_{t\to\infty} \exp(t\sqrt{A}) = 0$. Тогда задача (1.18) имеет единственное решение при любом $u^0 \in E$.*

Предложение 1.4.3. *Пусть* $\sqrt{A}$ *порождает* C_0*-полугруппу такую, что* $s\text{-}\lim_{t\to\infty}\exp(t\sqrt{A})=0$. *Тогда задача (1.19) имеет единственное решение при каждом* $u^0\in D(A)$.

Определение 1.4.1. C_0-полугруппа $\exp(\cdot A)$ называется C_0-полугруппой *устойчивой на степени* $q\in\mathbb{N}$, если $s\text{-}\lim_{t\to\infty}\exp(tA)x=0$ при каждом $x\in D(A^q)$. Мы назовем C_0-полугруппу устойчивую на степени 0 *равномерно устойчивой* полугруппой.

Теорема 1.4.1. *Предположим, что оператор* $\mathfrak{B}$ *порождает* C_0*-полугруппу устойчивую на степени 2, а функция* $v(\cdot)$ *имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет уравнению*

$$v''(t)=\mathfrak{B}^2v(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

причем $s\text{-}\lim_{t\to\infty}v(t)=0$. *Тогда* $v(t)=\exp(t\mathfrak{B})v(0)$, $t\in\overline{\mathbb{R}_+}$.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $A=\mathfrak{B}^2$, *где оператор* $\mathfrak{B}$ *порождает* C_0*-полугруппу.*

i) Если $\exp(\cdot\mathfrak{B})$ *является устойчивой на степени 2, то задача (1.19) корректно поставлена;*

ii) Если $\exp(\cdot\mathfrak{B})$ *является устойчивой на степени 1, то корректно поставленной является задача*

$$\begin{gathered}u''(t)=Au(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad u(0)=x,\\ \lim_{t\to\infty}\|u(t)\|=0,\quad \lim_{t\to\infty}\|u'(t)\|=0;\end{gathered}\tag{1.20}$$

(iii) Если $\exp(\cdot\mathfrak{B})$ *равномерно устойчивая, то корректно поставленной является задача*

$$\begin{gathered}u''(t)=Au(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad u(0)=x,\\ \lim_{t\to\infty}\|u^{(k)}(t)\|=0,\quad k\in\mathbb{N}_0.\end{gathered}\tag{1.21}$$

Предложение 1.4.4. *Пусть* $\rho(A)\neq\varnothing$. *Тогда*

(i) задача (1.19) корректно поставлена тогда и только тогда, когда оператор A *имеет квадратный корень* $\sqrt{A}$, *который порождает устойчивую на степени 2* C_0*-полугруппу;*

(ii) задача (1.20) корректно поставлена тогда и только тогда, когда оператор A *имеет квадратный корень* $\sqrt{A}$, *который порождает устойчивую на степени 1* C_0*-полугруппу;*

(iii) задача (1.21) корректно поставлена тогда и только тогда, когда оператор A *имеет квадратный корень* $\sqrt{A}$, *который порождает устойчивую* C_0*-полугруппу.*

Следствие 1.4.1. *Любой оператор A имеет не более одного квадратного корня $\sqrt{A}$, который порождает устойчивую на степени 2 C_0-полугруппу.*

Теорема 1.4.3. *Пусть B и C – самосопряженные коммутирующие операторы в гильбертовом пространстве H. Тогда существуют замкнуто дополняемые подпространства H_1 и H_2 такие, что, если $A = B + iC$, то задачи (1.19), (1.20), (1.21) корректно поставлены на H_1 и задача*

$$\begin{aligned} u''(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \end{aligned} \tag{1.22}$$

корректно поставлена на H_2.

Определение 1.4.2. Регуляризированной *дробной производной* порядка $0 < \alpha < 1$ функции $u(\cdot)$ называют функцию

$$(D^{(\alpha)}u)(t) = (D^{\alpha}_{0+}u)(t) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{u(0)}{t^{\alpha}},$$

где $(D^{\alpha}_{0+}u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} (\int_0^t \frac{u(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha}}\, d\xi)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$(D^{(\alpha)}u)(t) = Au(t), \quad 0 < t \leqslant T,\, u(0) = u^0, \tag{1.23}$$

с замкнутым оператором A. Под решением задачи (1.23) понимается функция $u(\cdot)$ такая, что

(i) $u(\cdot) \in C([0, T]; E)$;

(ii) при $t \in \mathbb{R}_+$ значения $u(t) \in D(A)$;

(iii) дробный интеграл $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha}}\, d\xi$ является непрерывно дифференцируемым при $t \geqslant 0$ и

(iv) функция $u(\cdot)$ удовлетворяет (1.23).

Теорема 1.4.4 ([42])**.** *Пусть резольвента $(\lambda^{\alpha}I - A)^{-1}$ существует при $\lambda > \omega > 0$ и*

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} \lambda^{-1/\alpha} \ln \|(\lambda I - A)^{-1}\| = 0.$$

Тогда решение задачи (1.23) единственно.

Теорема 1.4.5 ([42])**.** *Пусть резольвента $(\lambda^{\alpha}I - A)^{-1}$ существует в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \omega > 0$ и для тех же λ*

$$\|(\lambda^{\alpha}I - A)^{-1}\| \leqslant C(1 + |Im\lambda|)^{-\beta}, \quad 0 < \beta < 1.$$

Тогда задача (1.23) имеет единственное решение. Это решение бесконечно дифференцируемо при $t > 0$ и его значения при каждом t непрерывно зависят от начальных данных u^0.

Глава 2

КОСИНУС И СИНУС ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ

Имеющийся параллелизм теории C_0-полугрупп операторов и теории C_0-косинус оператор-функций носит своеобразный характер. С одной стороны, ряд определений и свойств практически дословно повторяют друг друга. С другой, стороны, для уравнений второго порядка в силу теоремы Кизынского, основным объектом, соответствующим C_0-косинус оператор-функции является C_0-группа, что исключает появление свойств "параболичности", несмотря на то, что производящий оператор C_0-косинус оператор-функции A порождает и аналитическую C_0-полугруппу.

§ 2.1. Измеримость полугрупп операторов и косинус оператор-функций

Свойство измеримости косинус оператор-функции выгодно отличается от измеримости полугруппы. В силу четности измеримость косинус оператор-функции влечет сильную непрерывность в нуле. Аналогичная ситуация складывается и для семейств возмущения.

Определение 2.1.1. Функция $T(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \to B(E)$ называется *операторной полугруппой*, если она удовлетворяет условию $T(t+h) = T(t)T(h)$ при любых $t, h \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и $T(0) = I$.

Определение 2.1.2. Функция $C(\cdot) : \mathbb{R} \to B(E)$ называется *операторным косинусом (или косинус оператор-функцией)*, если она удовлетворяет условию $C(t+h) + C(t-h) = 2C(t)C(h)$ при любых $t, h \in \mathbb{R}$ и $C(0) = I$.

Определение 2.1.3. Функция $S(\cdot) : \mathbb{R} \to B(E)$, называется *операторным синусом (или синус оператор-функцией)*, если она удовлетворяет условию $S(t+h)+S(t-h) = 2S(t)C(h)$ при любых $t, h \in \mathbb{R}$ и $S(0) = 0$.

Теорема 2.1.1 ([185]). *Пусть операторная полугруппа $T(\cdot)$ сильно измерима, т.е. функция $T(\cdot)x$ сильно измерима на $\mathbb{R}_+$ при любом $x \in E$. Тогда она сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+$.*

Подчеркнем, что в Теореме 2.1.1 сильная непрерывность утверждается лишь на $\mathbb{R}_+$, но не на $\overline{\mathbb{R}}_+$!

Предложение 2.1.1 ([185]). *Пусть функция $t \to T(t)x$ сильно измерима на $\mathbb{R}_+$. Тогда она локально ограничена.*

Предложение 2.1.2 ([185]). *Пусть операторная косинус оператор-функция $C(\cdot)$ сильно измерима на $\mathbb{R}_+$. Тогда она сильно непрерывна на $\mathbb{R}$.*

Предложение 2.1.3 ([185]). *Пусть функция $t \to C(t)x$ сильно измерима на $\mathbb{R}_+$. Тогда она локально ограничена.*

Теорема 2.1.2 ([184]). *Пусть косинус оператор-функция $C(\cdot)$ такова, что ее сужение на некоторый интервал $J \subseteq \mathbb{R}$ слабо измеримо по Лебегу, а пространство E сепарабельно и рефлексивно. Тогда $C(\cdot)$ слабо непрерывна на $\mathbb{R}$.*

§ 2.2. Мультипликативные и аддитивные семейства. Измеримость и непрерывность

Определение 2.2.1. Пусть $C(\cdot, A)$ – C_0-косинус оператор-функция. Семейство $\{F(t) : t \in \mathbb{R}\}$ операторов в $B(E)$ называется *семейством мультипликативного возмущения* для $C(\cdot, A)$, если $F(0) = 0$ и

$$F(t+s) - 2F(t) + F(t-s) = 2C(t, A)F(s) \text{ для } t,\, s \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Определение 2.2.2. Семейство $\{G(t) : t \in \mathbb{R}\}$ операторов в $B(E)$ называется *семейством аддитивного возмущения* для C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$, если $G(0) = 0$ и

$$G(t+s) - 2G(t) + G(t-s) = 2G(s)C(t, A) \text{ для } t,\, s \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Если эти семейства сильно непрерывны в нуле, мы называем их C_0-*семейством мультипликативного возмущения* и C_0-*семейством аддитивного возмущения* соответственно.

Ясно, что $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ - четные функции. Вышеупомянутая терминология выбрана по аналогии с соответствующими определениями семейств возмущений $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ для C_0-полугрупп ([15] $\rightsquigarrow$ [раздел 2.2]). Напомним, что $U(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям

$U(0) = 0$ и $U(t+s) - U(t) = T(t)U(s), \quad t,\, s \in \overline{\mathbb{R}}_+$,

а $V(\cdot)$ — соотношениям

$V(0) = 0$ и $V(t+s) - V(t) = V(s)T(t), \quad t,\, s \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

C_0-семейства мультипликативного и аддитивного возмущения играют важную роль в теории возмущений C_0-косинус оператор-функций.

Например, используя C_0-семейства мультипликативного и аддитивного возмущения, можно рассмотреть корректные постановки возмущенной задачи Коши в форме

$$u''(t) = A(1 - \lambda\hat{F}(\lambda))u(t) + \lambda^3\hat{F}(\lambda)u(t),$$
$$t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad u(0) = x,\ u'(0) = y.$$

Как известно, C_0-косинус оператор-функция, которая сильно (соответственно, равномерно) измерима на $\mathbb{R}_+$ является сильно (соответственно, равномерно) непрерывной на $\mathbb{R}$ (см. раздел

2.1). Следующая теорема показывает, что семейства мультипликативного и аддитивного возмущения обладают теми же свойствами.

Теорема 2.2.1 ([236]). *Если семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ - сильно (соответственно равномерно) измеримо на $\mathbb{R}_+$, тогда функция $F(\cdot)$ - сильно (соответственно равномерно) непрерывна на $\mathbb{R}$.*

Если семейство аддитивного возмущения $G(\cdot)$ равномерно измеримо на $\mathbb{R}_+$, тогда функция $G(\cdot)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Прежде всего, сильная измеримость $F(\cdot)x$ на $\mathbb{R}_+$ влечет измеримость по Лебегу $\|F(\cdot)x\|$ на $\mathbb{R}_+$ (см. [73]). Далее покажем, что $\|F(\cdot)x\|$ ограничена на любом компактном подинтервале $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ для любого $x \in E$. Допустим от противного, что это не так. Тогда найдутся $\tilde{x} \in E$, число $\tau > 0$ и последовательность $\tau_n \in [a,b]$ такие, что $\tau_n \to \tau$ и

$$\|F(\tau_n)\tilde{x}\| \geqslant n \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В силу измеримости $\|F(\cdot)\tilde{x}\|$ существуют постоянные c_1 и измеримо по Лебегу множество $\Lambda \subset [0,\tau]$ с мерой

$$\mu(\Lambda) > \frac{3}{4}\tau$$

такие, что

$$\sup_{t\in\Lambda} \|F(t)\tilde{x}\| \leqslant c_1. \tag{2.3}$$

Теперь, следуя [99], положим

$$\mathcal{A}_k := \frac{\tau_k}{2} - \frac{\Lambda \cap [0,\tau_k]}{2}, \quad \mathcal{B}_k := \Lambda \cap [0, \tau_k/2] \tag{2.4}$$

и

$$\mathcal{A} = \frac{\tau}{2} - \frac{\Lambda}{2}, \quad \mathcal{B} = \Lambda \cap [0, \tau/2].$$

Во-первых, $\mu(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) > 0$. Чтобы доказать это, предположим, что $\mu(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = 0$. Тогда $\mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B}) \leqslant \tau/2$. Но $\mu(\mathcal{A}) = \mu/2(\Lambda)$ по определению множества $\mathcal{A}$. Это означает, что $\mu(\Lambda) + 2\mu(\mathcal{B}) \leqslant \tau$. Следовательно $\frac{3}{4}\tau < \mu(\Lambda) \leqslant \tau - 2\mu(\mathcal{B})$, то есть

$$\mu(\mathcal{B}) \leqslant \tau/8. \tag{2.5}$$

Запишем

$$\Lambda = (\Lambda \cap [0,\tau/2]) \;\cup\; (\Lambda \cap [\tau/2,\tau]) = \mathcal{B} \cup \mathcal{D},$$

где $\mu(\Lambda) = \mu(\mathcal{B}) + \mu(\mathcal{D})$ с $\mu(\mathcal{D}) \leqslant \tau/2$. Но

$$\frac{3}{4}\tau < \mu(\Lambda) = \mu(\mathcal{B}) + \mu(\mathcal{D}) \leqslant \mu(\mathcal{B}) + \tau/2$$

влечет $\mu(\mathcal{B}) > \tau/4$, что противоречит (2.5). Мы доказали, что $\mu(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) \geqslant \delta > 0$.

Теперь определим множества

$$\mathcal{E} = \mathcal{A}\cap\mathcal{B}, \quad \mathcal{E}_n = \mathcal{A}_n\cap\mathcal{B}_n$$

и

$$H_n = \ \ \tau_n - \eta, \qquad \eta\in\mathcal{E}_n \ \ .$$

Ясно, что $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E}$ при $n\to\infty$, так, что $\mu(H_n) > \delta/2$ для n достаточно больших. Для этих же n, если $\eta\in\mathcal{E}_n$, тогда η и $\tau_n - 2\eta$ и принадлежат Λ в силу (2.4). Используя теперь (2.1) и (2.3), мы получаем для $\eta\in\mathcal{E}_n$

$$n \leqslant \|F(\tau_n)\tilde{x}\| \leqslant 2\|F(\tau_n-\eta)\tilde{x}\| + \|F(\tau_n-2\eta)\tilde{x}\| + 2\|C(\tau_n-\eta)\|\|F(\eta)\tilde{x}\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|F(\tau_n-\eta)\tilde{x}\| + c_1 + 2Me^{\omega b}c_1.$$

Следовательно,

$$\|F(t)\tilde{x}\| \geqslant \frac{n - c_1 - 2Mc_1e^{\omega\beta}}{2}$$

для $t\in H_n$ и обозначая $\lim_{n\to\infty} H_n = H_\infty$, мы имеем, что $\|F(t)\tilde{x}\| = \infty$ для $t\in H_\infty$ с $\mu(H_\infty) \geqslant \delta/2 > 0$. Это - противоречит факту конечности $\|F(t)\tilde{x}\|$ для каждого t.

Теперь мы собираемся доказать, что сильная измеримость вместе с ограниченностью влечет непрерывность $F(\cdot)x$ для каждого $t\in\mathbb{R}_+$ и каждого $x\in E$. Для этой цели мы выбираем четыре положительных числа α,β,ϵ и γ таких, что $\beta < t-\epsilon$ и $0<\alpha<\gamma<\beta<t$. Из (2.1) мы имеем

$$F(t)x = 2F(t-\gamma/2)x - F(t-\gamma)x + \\ 2C(t-\gamma/2, A)F(\gamma/2)x. \tag{2.6}$$

Левая часть, будучи независимой от γ, интегрируема по γ, и мы имеем

$$(\beta-\alpha)(F(t\pm\epsilon)x - F(t)x) =$$

$$\int_\alpha^\beta 2\Big(F(t\pm\epsilon-\gamma/2) - F(t-\gamma/2)x\Big)\,d\gamma -$$

$$-\int_\alpha^\beta \Big(F(t\pm\epsilon-\gamma) - F(t-\gamma)\Big)x\,d\gamma +$$

$$+\int_\alpha^\beta 2\Big(C(t\pm\epsilon-\gamma/2, A) - C(t-\gamma/2, A)\Big)F(\gamma/2)x\,d\gamma.$$

Следовательно,

$$\|(F(t \pm \epsilon) - F(t))x\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\beta-\alpha}\Bigg[\int_{t-\beta/2}^{t-\alpha/2} \|(F(\zeta \pm \epsilon) - F(\zeta))x\| d\zeta +$$
$$+ \int_{t-\beta}^{t-\alpha} \|(F(\zeta \pm \epsilon) - F(\zeta))x\| d\zeta +$$
$$+2\int_{\alpha}^{\beta} \|(C(t \pm \epsilon - \gamma/2, A) - C(t-\gamma/2, A))F(\gamma/2)x\|\, d\gamma\Bigg]. \quad (2.7)$$

По Теореме 3.8.3 из [73]

$$\int_{t-\beta/2}^{t-\alpha/2} \to 0 \quad \text{и} \quad \int_{t-\beta}^{t-\alpha} \to 0 \quad \text{при} \quad \epsilon \to 0.$$

Последнее слагаемое в (2.7) стремится к нулю по теореме Лебега о мажорантной сходимости (см. [73] - Теорема 3.7.9).

Мы получаем, что $F(\cdot)x$ непрерывна для $t \in \mathbb{R}_+$. Заменяя t в (2.1) на $t+s$, мы получаем, что для всех t, $s \in \mathbb{R}_+$ функция

$$F(t)x = 2C(t+s, A)F(s)x - F(t+2s)x + 2F(t+s)x,$$

сходится к $2C(s, A)F(s)x - F(2s)x + 2F(s)x = F(0)x = 0$ при $t \to 0+$. Поэтому $F(\cdot)$ сильно непрерывна на $\overline{\mathbb{R}}_+$, и, следовательно, на $\mathbb{R}$, потому что $F(\cdot)$ - четная функция. Доказательство для случая равномерной измеримости аналогично.

Для доказательства утверждения для $G(\cdot)$ можно использовать следующую запись уравнения (2.2):

$$G(\tau_n) = 2G(\tau_n - \eta) - G(\tau_n - 2\eta) + 2G(\eta)C(\tau_n - \eta, A)$$

при оперировании в оценке типа (2.6). Доказательство аналогично.

Теорема 2.2.2. *C_0-семейство мультипликативного возмущения и C_0- семейство аддитивного возмущения для C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$ сильно непрерывны на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Кроме того, равномерная непрерывность в 0 влечет равномерную непрерывность на $\in \overline{\mathbb{R}}_+$.*

Доказательство. Следуя [99], мы предположим от противного, что семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ не является сильно непрерывным в некоторой точке $t_0 \in \mathbb{R}_+$, то есть существует x_0, такое что невозрастающая последовательность

$$K_n := \sup\{\|(F(t) - F(s))x_0\| : |t - t_0|, |s - t_0| \leqslant \frac{t_0}{8n}\ \}$$

сходится к некоторому $K > 0$ при $n \to \infty$.

Мы можем выбрать последовательности τ_n и σ_n такие, что

$$|\tau_n - t_0| \leqslant \frac{t_0}{8n}, \quad |\sigma_n - t_0| \leqslant \frac{t_0}{8n}$$

и

$$\|(F(\tau_n) - F(\sigma_n))x_0\| \geqslant K_n - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $|\sigma_n - \tau_n| \leqslant \frac{t_0}{4n}$ и $|2\tau_{4n} - \sigma_{4n} - t_0| \leqslant \frac{t_0}{8n}, \quad n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\|\Big(F(\sigma_{4n}) - F(2\tau_{4n} - \sigma_{4n})\Big)x_0\| \leqslant K_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Используя тождество (2.1) в форме

$$2\Big(F(t+h) - F(t)\Big) = (F(t+h) - F(t-h)) + 2C(t, A)F(h)$$

и полагая $t_0 + h = \sigma_{4n}$ и $t_0 = \tau_{4n}$, мы получаем

$$2\|\Big(F(\sigma_{4n}) - F(\tau_{4n})\Big)x_0\| \leqslant K_n + 2Me^{\omega t_0}\|F(\sigma_{4n} - \tau_{4n})x_0\|.$$

Следовательно,

$$2(K_{4n} - \frac{1}{4n}) \leqslant K_n + 2Me^{\omega t_0}\|F(\sigma_{4n} - \tau_{4n})x_0\|$$

и, таким образом,

$$K_{4n} + (K_{4n} - K_n) \leqslant \frac{1}{2n} + 2Me^{\omega t_0}\|F(h)x_0\|.$$

В силу сходимости $F(h)x_0 \to 0$ при $h \to 0$ (мы напомним, что $h = \sigma_{4n} - \tau_{4n}$) и $K_{4n} - K_n \to 0$ при $n \to \infty$ мы имеем $K_n \to 0$ при $n \to \infty, n \in \mathbb{N}$, что является противоречием к нашему предположению, что $K_n \to K, \ K > 0$.

Чтобы доказать то же самое утверждение для $G(\cdot)$ можно использовать тождество

$$2\Big(G(t+h) - G(t)\Big) =$$

$$= \Big(G(t+h) - G(t-h)\Big) + 2G(t)\Big(C(h, A) - I\Big) + 2G(h),$$

которое получается из (2.2) и Предложения 2.4.1 (i).

Таким же образом, как в Предложении 2.3.2 из [15], можно доказать следующее

Предложение 2.2.1. *Пусть семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ и C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ коммутируют, то есть $F(t)C(t,A) = C(t,A)F(t)$ для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Тогда C_0- семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ - есть семейство аддитивного возмущения и оно коммутативно, то есть $F(t)F(s) = F(s)F(t)$ для всех $s, t \in \mathbb{R}$.*

§ 2.3. Основные свойства C_0-косинус и C_0-синус оператор-функций

Определение 2.3.1. C_0**-косинус оператор-функция** , определяется как однопараметрическое семейство операторов

$$\{C(t),\, t \in \mathbb{R}\},\ \ C(t) \in B(E),\ \ t \in \mathbb{R},$$

обладающее следующими свойствами:
(i) $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$ (уравнение Даламбера);
(ii) $C(0) = I$ — единичный оператор на E ;
(iii) $s\text{-}\lim_{h\to 0} C(h)x = x$ при любом $x \in E$.

С C_0-косинус оператор-функцией $C(\cdot)$ ассоциируют C_0*-синус оператор-функцию* :

$$S(t)x := \int_0^t C(s)x\, ds, \qquad x \in E,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

и линейные многообразия

$$E^k := \{x \in E:\ C(\cdot)x \in C^k(\mathbb{R}; E)\}, \qquad k = 1, 2. \tag{2.9}$$

Определение 2.3.2. Линейный оператор A с областью определения $D(A)$, состоящей из всех x, для которых существует предел

$$Ax := s\text{-}\lim_{h\to 0+} 2\frac{C(h) - I}{h^2}x, \tag{2.10}$$

называется *производяшим (инфинитезимальным) оператором (генератором)* C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot)$.

Тот факт, что A есть производящий оператор C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot)$ записывается как $C(\cdot, A)$ (и $S(\cdot, A)$ для C_0-синус оператор-функции $S(\cdot)$).

Приведем простейший пример C_0-косинус оператор-функции.

Пример 2.3.1. Пусть A – оператор умножения на комплексное число в пространстве $\mathbb{R}$. Тогда A является генератором C_0-косинус оператор-функции $(C(t,A)f)(s) = \cos(it\sqrt{A})f(s), \quad t \in \mathbb{R}$.

Предложение 2.3.1 ([85]). *Определим оператор*

$$A_1 x := s\text{-}\lim_{h\to 0}\frac{C(2h,A)-2C(h,A)+I}{h^2}x.$$

с естественной областью определения (т.е. на тех $x\in E$, *на которых этот предел существует). Тогда при* $x\in D(A_1)\cap D(A)$ *имеем* $Ax = A_1x$.

Для C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot,A)$ можно определить также первый производящий оператор

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}}x := s\text{-}\lim_{h\to 0+}\frac{C(h,A)x-x}{h}$$

с естественной областью определения.

Предложение 2.3.2 ([261]). *Для* C_0*-косинус оператор-функции* $C(\cdot,A)$ *имеем* $D(A)\subseteq D(\overset{\circ}{\mathcal{C}})$ *и* $\overset{\circ}{\mathcal{C}}\,x=0$ *при любом* $x\in D(A)$.

Предложение 2.3.3 ([261]). *Операторы* $C(t,A), C(s,A), S(t,A)$ *и* $S(s,A)$ *коммутируют между собой при любых* $t,s\in\mathbb{R}$.

Предложение 2.3.4. C_0*-синус оператор-функция* $S(\cdot,A)$ *непрерывна в равномерной операторной топологии.*

Предложение 2.3.5 ([261], [269]). *При всех* $t,s\in\mathbb{R}$ *имеют место равенства*

$$(i)\quad C(t,A)=C(-t,A),\quad S(-t,A)=-S(t,A),\quad S(0,A)=0;$$

$$(ii)\quad S(t+s,A)+S(t-s,A)=2S(t,A)C(s,A);$$

$$(iii)\quad S(t+s,A)=S(t,A)C(s,A)+S(s,A)C(t,A);$$

$$(iv)\quad C(t+s,A)-C(t-s,A)=2AS(t,A)S(s,A);$$

$$(v)\quad C(2t,A)=2C(t,A)^2-I,\qquad C(t,A)^2-AS(t,A)^2=I;$$

$$(vi)\quad C((n+1)t,A)=b_0I+b_1C(t,A)+...+b_{n+1}C^{n+1}(t,A),$$

где $b_0+b_1z+...+b_{n+1}z^{n+1}$ *- многочлен Чебышева первого рода порядка* $n+1$.

Предложение 2.3.6 ([261]). *Для любой* C_0*-косинус оператор-функции* $C(\cdot,A)$ *существуют такие константы* $M\geqslant 1$ *и* $\omega\geqslant 0$, *что при всех* $t\in\mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\|C(t,A)\|\leqslant Mch(\omega t),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.11}$$

где $\operatorname{ch}(\omega t) := \frac{1}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)$ *– гиперболический косинус.*

Определение 2.3.3. Нижняя грань чисел ω из (2.11) называется *типом* C_0-косинус оператор-функции и обозначается $\omega_c(A)$.

Предложение 2.3.7 ([206]). *Минимального ω, удовлетворяющего (2.11) при подходящей константе M_ω, может не существовать, т.е. нижняя грань $\omega_c(A)$, вообще говоря, не достигается.*

Предложение 2.3.8 ([131], [140], [261]). *Пусть оператор A порождает C_0-косинус оператор-функцию $C(t,A)$, и $\|C(t,A)\| \leqslant M\operatorname{ch}(\omega t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда $A \in \mathcal{G}(M, \omega^2)$, C_0-полугруппа $\exp(\cdot A)$ аналитически продолжается в правую полуплоскость и*

$$\exp(tA) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s,A)ds, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{2.12}$$

Предложение 2.3.9. *Представление аналитической полугруппы в Предложении 2.3.8 можно записать в виде*

$$\exp(tA)x = \frac{1}{2^k\sqrt{\pi}t^{(k+1)/2}} \int_0^\infty P_k\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{s^2}{4t}} C_k(s)x\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Здесь P_k - полином степени k и $C_k(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} C(s,A)\,ds$, где $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$, $k \in \mathbb{N}$ и $C_0(t) = C(t,A)$.

Замечание 2.3.1 ([222]). Имеются примеры аналитических C_0-полугрупп, производящие операторы которых не порождают C_0-косинус оператор-функции.

Определение 2.3.4. Обозначим через E^k, $k \in \mathbb{N}$, множество элементов x исходного пространства E, для которых функция $C(t,A)x : \mathbb{R} \to E$ является k раз непрерывно дифференцируемой по t.

Предложение 2.3.10 ([178]). *Очевидно, что $D(A) \subseteq E^1$ для $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$, и, следовательно, множество E^1 плотно в E.*

Предложение 2.3.11 ([271]). *Для любых $x \in E$ и $t,s \in \mathbb{R}$*

имеем

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad y := \int\limits_s^t S(\tau, A)x d\tau \in D(A) \\
&\qquad \text{и} \quad Ay = C(t, A)x - C(s, A)x; && (2.13) \\
&(ii) \qquad z := \int\limits_0^t \int\limits_0^s C(\tau, A)C(\zeta, A)x d\tau d\zeta \in D(A) \quad \text{и} && (2.14) \\
&\qquad Az = \frac{1}{2}\Big(C(t+s, A) - C(t-s, A)\Big)x; && (2.15) \\
&(iii) \quad S(t, A)x \in E^1. && (2.16)
\end{aligned}
$$

Предложение 2.3.12 ([271])**.** *Если элементы x пробегают все E, а числа t, s все $\mathbb{R}$, то множество элементов вида $y = \int\limits_s^t S(\tau, A)x d\tau$ плотно в E .*

Предложение 2.3.13. *При любом $x \in E$ справедливы равенства*

$$
s\text{-}\lim_{t\to 0} t^{-1}S(t, A)x = x \quad \text{и} \quad s\text{-}\lim_{t\to 0} 2t^{-2} \int\limits_0^t S(\tau, A)x d\tau = x. \quad (2.17)
$$

Предложение 2.3.14 ([271])**.** *Если $x \in E^1$, то при любом $t \in \mathbb{R}$*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad C(t, A)x \in E^1, \quad S(t, A)x \in D(A) \quad \text{и} \\
&\qquad C'(t, A)x = AS(t, A)x; && (2.18) \\
&(ii) \quad s\text{-}\lim_{\tau\to 0} AS(\tau, A)x = 0 \quad \text{и} \\
&\qquad S''(t, A)x = AS(t, A)x. && (2.19)
\end{aligned}
$$

Предложение 2.3.15 ([271])**.** *Пусть $x \in D(A)$. Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad C(t, A)x \in D(A) \quad \text{и} \\
&\qquad C''(t, A)x = AC(t, A)x = C(t, A)Ax; && (2.20) \\
&(ii) \quad S(t, A)x \in D(A) \quad \text{и} \\
&\qquad S''(t, A)x = AS(t, A)x = S(t, A)Ax. && (2.21)
\end{aligned}
$$

Предложение 2.3.16 ([269]). *При всех $t, s \in \mathbb{R}$ имеют место равенства*

$$(i) \quad C(2t, A) = C(t, A)^2 + C'(t, A)S(t, A); \tag{2.22}$$

$$(ii) \quad C'(t, A)S(s, A) = C'(s, A)S(t, A); \tag{2.23}$$

$$(iii) \quad C(t + s, A) - C(t - s, A) = 2C'(t, A)S(s, A); \tag{2.24}$$

$$(iv) \quad (C(t, A) - I)\int\limits_0^h S(s, A)ds =$$

$$= (C(h, A) - I)\int\limits_0^t S(s, A)ds; \tag{2.25}$$

$$(v) \quad (A - \lambda^2 I)\int\limits_0^t \operatorname{sh}\Big(\lambda(t - s)\Big)C(s, A)ds =$$

$$= \lambda\Big(C(t, A) - \operatorname{ch}(\lambda t)I\Big); \tag{2.26}$$

здесь $\operatorname{sh}(\cdot)$ *и* $\operatorname{ch}(\cdot)$ *— гиперболические синус и косинус соответственно.*

Предложение 2.3.17 ([133]). *Область определения производящего оператора C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$ совпадает с E^2, и при каждом $x \in D(A)$*

$$Ax = s\text{-}\lim_{\tau \to 0} C''(\tau, A)x. \tag{2.27}$$

Иногда производящий оператор C_0-косинус оператор-функции определяют через (2.27).

Множество производяших операторов C_0-косинус оператор-функции с оценкой (2.11) будем обозначать $\mathcal{C}(M, \omega)$.

Предложение 2.3.18 ([261]). *Пусть $A, G \in \mathcal{C}(M, \omega)$. Тогда, если $D(A) \subseteq D(G)$ и $Ax = Gx$ при всех $x \in D(A)$, то $C(t, A) = C(t, G)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.*

Теорема 2.3.1 ([110], [129], [261], [266]). *Для того, чтобы оператор $A \in \mathcal{C}(E)$ являлся производящим оператором C_0-косинус оператор-функции, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых констант $M, \omega \geqslant 0$ резольвента $(\lambda^2 I - A)^{-1}$ существовала при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и выполнялись неравенства*

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}\Big(\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}\Big)\right\| \leqslant \frac{Mn!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.28}$$

Замечание 2.3.2 ([261]). Иногда оценка (2.28) записывается в виде

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}\Big(\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}\Big) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Mn!}{2}\left(\frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{n+1}} + \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda+\omega)^{n+1}}\right) \tag{2.29}$$

при всех $\operatorname{Re}\lambda > \omega, n \in \mathbb{N}_0$.

На практике условия (2.28)–(2.29) оказываются трудно проверяемыми, поэтому представляют интерес другие условия порождения C_0-косинус оператор-функций.

Теорема 2.3.2 ([40]). *Для того, чтобы оператор $A \in \mathcal{C}(E)$ являлся производящим оператором C_0-косинус оператор-функции, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие константы $M, \delta > 0$ и ω, что*

$$\|(\lambda^2 I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|(\operatorname{Re}\lambda - \omega)} \quad \text{для всех} \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega, \tag{2.30}$$

и равномерно по $\tau \in (0, \delta)$ выполнялась оценка

$$\left\| \int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda^2\tau}\operatorname{ch}(\lambda t)\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}x\,d\lambda \right\| \leqslant \xi(t)\|x\|, \ \ t \in \overline{\mathbb{R}_+}, \tag{2.31}$$

где $\xi(\cdot) \in C(\mathbb{R})$.

Замечание 2.3.3. В связи с оценкой (2.30) отметим (см. [55]), что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ условие $\|(\lambda^2 I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|^{1+\varepsilon}}$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, влечет ограниченность спектра $\sigma(A)$.

Предложение 2.3.19 ([209]). *В случае, когда A — нормальный оператор в гильбертовом пространстве, для того, чтобы он порождал C_0-косинус оператор-функцию, достаточно лишь условия на расположение спектра, т.е. $\{z^2 : \operatorname{Re} z > \omega\} \subseteq \rho(A)$ при некотором ω.*

Предложение 2.3.20 ([269]). *При $\operatorname{Re}\lambda > \omega_c(A)$ числа $\lambda^2 \in \rho(A)$ и*

$$\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}C(t, A)x dt, \quad x \in E; \tag{2.32}$$

$$(\lambda^2 I - A)^{-1}x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} S(t,A)x dt, \quad x \in E. \tag{2.33}$$

Предложение 2.3.21 ([133])**.** *Если* $x \in D(A^3)$, $y \in D(A)$ *и* $\omega > \omega_c(A)$, *то*

$$\begin{aligned} C(t,A)x = x + \frac{t^2}{2!}Ax + \frac{t^4}{4!}A^2 x + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} e^{\lambda t}\lambda^{-3}(\lambda^2 I - A)^{-1}A^3 x \, d\lambda; \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$C(t,A)y = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} e^{\lambda t}\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}y \, d\lambda, \; t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.35}$$

Записывая обратное преобразование Лапласа в другой форме, можно получить иные аналогичные представления оператор-функций $C(\cdot, A)$ и $S(\cdot, A)$.

Предложение 2.3.22 ([221])**.** *Пусть* $x \in D(A^k)$ *при некотором* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда для* $t \in \mathbb{R}$ *справедлива формула Тейлора:*

$$C(t,A)x = x + \frac{t^2}{2!}Ax + ... + \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}A^{k-1}x +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{2k-1}}{(2k-1)!}C(s,A)A^k x ds.$$

Предложение 2.3.23 ([165])**.** *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M, \omega)$ *и* $r \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\Big(C(t,A) - I\Big)^r = 2^{-r}\left[2\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}C_{r-j}^{2r}C(jt,A) + (-1)^r C_r^{2r} I\right]$$

$$\Big(C(t,A) - I\Big)^r x =$$

$$= A^r \int_0^t \int_0^t ... \int_0^t \prod_{j=1}^{r}(t - s_j)C(s_j, A)x \, ds_1 ds_2 ... ds_r$$

для любого $x \in E$.

Предложение 2.3.24 ([224])**.** *Для любых* $A \in \mathcal{C}(M, \omega)$, $x \in$

$\tilde{E}_0$, и $t \in \mathbb{R}$ имеет место представление

$$C(t,A)x = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} A^k x/(2k)!,$$

и при каждом $\tilde{x} \in \tilde{E}_0$ функция $t \to C(t,A)\tilde{x}$ может быть продолжена по t до функции, аналитической на всей комплексной плоскости.

Предложение 2.3.25 ([131]). *Справедлива формула Уиддера–Поста*

$$C(t,A)x = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}x\right)\Bigg|_{\lambda=\frac{k}{t}}, \quad (2.36)$$

$$t \neq 0, \ x \in E,$$

где сходимость равномерна по t из любого компакта в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Предложение 2.3.26 ([286]). *Выражение*

$$\mathfrak{N}(\lambda,k) := \frac{d^k}{d\lambda^k}\Big(\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}\Big)$$

из (2.36) можно представить в виде

(i) $\quad \mathfrak{N}(\lambda,k) = k!\Big(\lambda^{k+1} + C_{k+1}^2 \lambda^{k-1} A + \ldots + C_{k+1}^k \lambda A^{k/2}\Big)(\lambda^2 I - A)^{-(k+1)},$

k — четно;

(ii) $\quad \mathfrak{N}(\lambda,k) =$

$$= -k!\Big(\lambda^{k+1} + C_{k+1}^2 \lambda^{k-1} A + \ldots + C_{k+1}^k \lambda A^{(k+1)/2}\Big)(\lambda^2 I - A)^{-(k+1)},$$

k — нечетно;

$$(iii) \quad \mathfrak{N}(\lambda,k) = \sum_{j=k/2}^{k} (-1)^j \frac{(k+1)!j!\lambda(2\lambda)^{2j-k}}{(k-j)!(2j-k+1)!}(\lambda^2 I - A)^{-(j+1)},$$

k — четно;

$$(iv) \quad \mathfrak{N}(\lambda,k) = \sum_{j=\frac{k-1}{2}+1}^{k} (-1)^j \frac{(k+1)!j!\lambda(2\lambda)^{2j-k}}{(k-j)!(2j-k+1)!}(\lambda^2 I - A)^{-(j+1)},$$

k — нечетно;

Предложение 2.3.27 ([257]). *Для C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$, C_0-синус оператор-функции $S(\cdot, A)$ и любых $x \in E$ и $t \in \mathbb{R}$ имеем*

$$(i)\, C(t,A)x = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} C_{2k}^{2l} C_l^j (-1)^{l-j} \left(I - \left(\frac{t}{2k}\right)^2 A \right)^{-(2k-l+j)} x;$$

$$(ii)\, C(t,A)x =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} C_{2k+1}^{2l} C_l^j (-1)^{l-j} \left(I - \left(\frac{t}{2k+1}\right)^2 A \right)^{-(2k+1-l+j)} x;$$

$$(iii)\, C(t,A)x = \lim_{n\to\infty} e^{-nt} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \frac{(nt)^{2m}}{(2m)!} C_{2m}^{2k} C_k^j (-1)^{k-j} \times$$

$$\times \left(I + \frac{nt}{2m-2k+1} (I - n^{-2}A)^{-1} \right) (I - n^2 A)^{-(2m-k+j)} x;$$

$$(iv)\, S(t,A)x = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} C_{2m+1}^{2k} C_k^j (-1)^{k-j} \times$$

$$\times \left(I - \left(\frac{t}{2n}\right)^2 A \right)^{-(n+m+1-k+j)} x;$$

причем во всех случаях сходимость по $t \in J \subset \mathbb{R}$ равномерна. Здесь J — произвольный отрезок.

Предложение 2.3.28 ([257]). *В условиях Предложения 2.3.27 равномерно по $t \in [0,1]$ имеем*

$$C(t,A)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} C_{2n}^{2m} C_{2m}^{2k} C_k^j (-1)^{k-j} t^{2m} (1-t)^{2n-2m-1} \times$$

$$\times \left((1-t) + \frac{2n-2m}{2m-2k+1} t (I - (2n)^{-2} A)^{-1} \right)^{-(2m-k+j)} x.$$

В [257] приведено также много других соотношений аналогичного вида.

Введем обозначения

$$St(A) := \left\{ x \in E : \sum_{k=1}^{\infty} \|A^k x\|^{-\frac{1}{2k}} < \infty \right\} \text{— векторы Стилтьеса},$$

$$\mathfrak{U}_p(A) := \Big\{x \in E : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\|A^k x\| < \infty \quad \text{при некотором} \quad t \in \mathbb{R}_+\Big\}$$

— полуаналитические векторы,

$$\mathfrak{U}_{pp}(A) := \Big\{x \in E : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\|A^k x\| < \infty \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbb{R}_+\Big\}$$

— целые векторы.

Предложение 2.3.29 ([104])**.** *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ *и* $\tilde{E}_0$ *построено по* C_0*-полугруппе* $\exp(\cdot A)$*. Тогда* $\tilde{E}_0 \subseteq \mathfrak{U}_p(A)$*.*

Предложение 2.3.30 ([104])**.** *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$*. Имеют место вложения:* $\mathfrak{U}(A) \subseteq \mathfrak{U}_p(A) \subseteq St(A)$*.*

Предложение 2.3.31 ([104])**.** *Пусть* $\overline{\mathfrak{U}_{pp}(A)} = E$*. Тогда множество векторов* x *из* $D(A^\infty)$ *со свойством* $\|A^k x\|^{1/k} = o(k)$ *плотно в* E*.*

Предложение 2.3.32 ([104])**.** *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$*. Тогда* $\overline{\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{U}_{pp}(A)} = E$*.*

Предложение 2.3.33 ([104])**.** *Пусть* $\overline{\mathfrak{U}_{pp}(A)} = E$ *и существует оператор* $G \in \mathcal{C}(E)$ *такой, что*

(*i*) $G^{-1} \in B(E)$;

(*ii*) $G^2 = A$, *причем операторы* $\pm G$ *диссипативны.*

Тогда $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ *и* $C(t,A) = \Big(\exp(tG) + \exp(-tG)\Big)/2$*, где* $G \in \mathcal{GR}(1,0)$*.*

Определение 2.3.5. Множество элементов $S \subseteq E$ называется *тотальным* в E, если множество его конечных линейных комбинаций плотно в E.

Предложение 2.3.34 ([104])**.** *Пусть* $A_1 \in L(E)$ *замкнут,* $St(A_1)$ *тотально в* E*,* $A_2 \in \mathcal{C}(M,\omega)$ *и* $A_1 \subseteq A_2$*. Тогда* $A_1 = A_2$*.*

Предложение 2.3.35 ([104])**.** *Пусть* A *— замкнутый, симметричный и полуограниченный оператор в гильбертовом пространстве* H*. Тогда оператор* A *самосопряжен тогда и только тогда, когда множество* $St(A)$ *тотально в* H*.*

В [143] приведены примеры нелинейных косинус оператор-функций. Однако общей теории нелинейных косинус оператор-функций, в отличие от теории нелинейных полугрупп операторов, пока нет.

§ 2.4. Преобразование Лапласа и инфинитезимальные операторы

В этом разделе мы приводим некоторые основные свойства преобразований Лапласа C_0-семейств мультипликативного $F(\cdot)$ и аддитивного $G(\cdot)$ возмущений. Пусть $\hat{F}(\cdot)$ и $\hat{G}(\cdot)$ соответственно обозначают их преобразования Лапласа.

Предложение 2.4.1 ([236]). *Пусть $F(\cdot)$ есть C_0- семейство мультипликативного возмущения и $G(\cdot)$ — семейство аддитивного возмущения C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$. Имеют место следующие свойства:*

(i) $(C(t,A)-I)F(s) = (C(s,A)-I)F(t)$ *и*

$G(s)(C(t,A)-I) = G(t)(C(s,A)-I)$ *для* $t, s \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(ii) *функции $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ экспоненциально ограничены;*

(iii) $\dfrac{d^2}{dt^2}(\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}F(t)x) = C(t,A)\lambda^2\hat{F}(\lambda)x$ *и*

$\dfrac{d^2}{dt^2}\left(G(t)\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}x\right) = \lambda^2\hat{G}(\lambda)C(t,A)x$ *для* $x \in E$, $\lambda > \omega$, *и* $t \in \mathbb{R}_+$;

(iv)

$$F(t)x = (\lambda^2 I - A)\int_0^t S(s,A)\lambda\hat{F}(\lambda)x\,ds =$$

$$= \int_0^t S(s,A)\lambda^3\hat{F}(\lambda)x\,ds - (C(t,A)-I)\lambda\hat{F}(\lambda)x$$

для $x \in E$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(v)

$$G(t)x = \lambda\hat{G}(\lambda)(\lambda^2 I - A)\int_0^t S(s,A)x\,ds =$$

$$= \lambda^3\hat{G}(\lambda)\int_0^t S(s,A)x\,ds - \lambda\hat{G}(\lambda)(C(t,A)-I)x$$

для $x \in E$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Доказательство. Свойство (i) легко следует из (2.1) и (2.2). Для доказательства того, что C_0-семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ экспоненциально ограничено, выберем $L \geqslant 1$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, такие, что $\|C(s,A)\| \leqslant L$, $\|F(s)\| \leqslant L$ для $0 \leqslant s \leqslant \tau$. Используя равенство

$$F(k\tau + s) = 2F(k\tau) - F(k\tau - s) + 2C(k\tau, A)F(s),$$

мы имеем для $0 \leqslant s \leqslant \tau$

$$\|F(\tau+s)\| \leqslant \|2F(\tau)\| + \|F(\tau - s)\| + \ 2\ Me^{\tau\omega}\|F(s)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2L + L + 2Me^{\tau\omega}L \leqslant Me^{\tau\omega}5L \leqslant Me^{2\tau\omega_1} \leqslant Me^{\tau\omega_1}e^{(\tau+s)\omega_1},$$

где $5L \leqslant e^{\tau\omega_1}$ и $\omega \leqslant \omega_1$,

$$\|F(2\tau+s)\| \leqslant 2\|F(2\tau)\| + \|F(2\tau-s)\| + 2Me^{2\tau\omega_1}\|F(s)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2Me^{2\tau\omega_1} + Me^{2\tau\omega_1} + 2LMe^{2\tau\omega_1} \leqslant Me^{3\tau\omega_1} \leqslant \tau\omega_1 e^{(2\tau+s)\omega_1}.$$

По индукции

$$\|F(k\tau+s)\| \leqslant 2\|F(k\tau)\| + \|F(k\tau-s)\| + 2\|C(k\tau,A)\|\,\|F(s)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2Me^{k\tau\omega_1} + Me^{k\tau\omega_1} + 2LMe^{k\tau\omega_1} \leqslant 5LMe^{k\tau\omega_1}$$

$$\leqslant Me^{(k+1)\tau\omega_1} \leqslant Me^{\tau\omega_1}e^{(k\tau+s)\omega_1}$$

для всех $s \in [0,\tau]$. Следовательно, $\|F(t)\| \leqslant M_1 e^{\omega_1 t}$ для $M_1 = Me^{\tau\omega_1}$ и всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Для доказательства (iii) положим $\Theta(t,\lambda) = \lambda(\lambda^2 - A)^{-1}F(t)$ и $\Upsilon(t,\lambda) = G(t)\lambda(\lambda^2 - A)^{-1}, \lambda > \omega, t \geqslant 0$. Из (2.1) и (2.2) следует, что

$$\Theta''_t(t,\lambda) = C(t,A)\lim_{s\to 0} 2s^{-2}\lambda(\lambda^2 - A)^{-1}F(s) = C(t,A)\Theta''_t(0,\lambda),$$

если $\Theta''_t(0,\lambda)$ существует, и

$$\Upsilon''_t(t,\lambda) = \lim_{s\to 0} 2s^{-2}\lambda(\lambda^2 - A)^{-1}G(s)C(t,A) = \Upsilon''_t(0,\lambda)C(t,A),$$

если $\Upsilon''_t(0,\lambda)$ существует. Следовательно, достаточно доказать, что $\Theta''_t(0,\lambda) = \lambda^2\hat{F}(\lambda)$ и $\Upsilon''_t(0,\lambda) = \lambda^2\hat{G}(\lambda)$.

Беря преобразование Лапласа в (2.1) по t, мы имеем

$$(e^{\lambda s} - 2 + e^{-\lambda s})\hat{F}(\lambda) - e^{\lambda s}\int_0^s e^{-\lambda\tau}F(\tau)d\tau + e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda\tau}F(\tau)d\tau =$$

$$= 2\lambda(\lambda^2 - A)^{-1}F(s) = 2\Theta(s,\lambda).$$

Теперь, взяв производную, получаем

$$2\Theta'_s(s,\lambda) = \lambda(e^{\lambda s} - e^{-\lambda s})\hat{F}(\lambda) -$$

$$-\lambda e^{\lambda s}\int_0^s e^{-\lambda\tau}F(\tau)d\tau - \lambda e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda\tau}F(\tau)d\tau,$$

и, дифференцируя еще раз, имеем

$$2\Theta''_{ss}(s,\lambda) = \lambda^2(e^{\lambda s} + e^{-\lambda s})\hat{F}(\lambda) - \lambda^2 e^{\lambda s}\int_0^s e^{-\lambda\tau}F(\tau)d\tau +$$

$$+\lambda^2 e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda\tau}F(\tau)d\tau - 2\lambda F(s).$$

Таким образом, $\Theta'_s(0,\lambda) = 0$ и $\Theta''_{ss}(0,\lambda) = \lambda^2\hat{F}(\lambda)$. Аналогично можно показать, что $\Upsilon'_s(0,\lambda) = 0$ и $\Upsilon''_{ss}(0,\lambda) = \lambda^2\hat{G}(\lambda)$.

Интегрируя $\Theta''_{tt}(t,\lambda) = C(t,A)\lambda^2\hat{F}(\lambda)$ дважды от нуля до t, и используя соотношения $F(0) = 0$ и $\Theta'_t(0,\lambda) = 0$, мы получаем

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}F(t)x = \Theta(t,\lambda)x = \\ = \int_0^t S(s,A)\lambda^2\hat{F}(\lambda)x\,ds,\ x \in E, \end{aligned} \tag{2.37}$$

и, следовательно, утверждение (iv) доказано. Утверждение (v) доказывается аналогично.

Замечание 2.4.1. Если $C(\cdot,A)$ равномерно непрерывна, тогда каждое C_0-семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ (соответственно, C_0- семейство аддитивного возмущения C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot,A)$ также равномерно непрерывно. Это следует из формулы (iv) (соотв.(v)) Предложения 2.4.1.

Определение 2.4.1. Пусть $F(\cdot)$ есть C_0-семейство мультипликативного возмущения для C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot,A)$. *Инфинитезимальный оператор* W_s семейства $F(\cdot)$ определяется как $W_s x = s\text{-}\lim_{h\to 0}\frac{2}{h^2}F(h)x$, с естественной областью определения. *Инфинитезимальный оператор* A_s пары $(C(\cdot,A),F(\cdot))$ определяется как $A_s x := s\text{-}\lim_{h\to 0}\dfrac{2}{h^2}(C(h,A) + F(h) - I)x$, с естественной областью определения. *Инфинитезимальный оператор* W_c C_0-семейства аддитивного возмущения $G(\cdot)$ и *инфинитезимальный оператор* A_c пары $(G(\cdot), C(\cdot,A))$ определены тем же самым путем как

$$W_c x = s\text{-}\lim_{h\to 0}\frac{2}{h^2}G(h)x \ \text{ и } \ A_c x := s\text{-}\lim_{h\to 0}\frac{2}{h^2}\Big(C(h,A) + G(h) - I\Big)x,$$

соответственно.

Теорема 2.4.1 ([236]). *Определенные выше операторы W_s и A_s замкнуты и*

(i) $W_s = \lambda(\lambda^2 I - A)\hat{F}(\lambda),\ \operatorname{Re}\lambda > \omega;$

(ii) $A_s = A(I - \lambda\hat{F}(\lambda)) + \lambda^3\hat{F}(\lambda),\ \operatorname{Re}\lambda > \omega;$

(iii)

$$\begin{aligned} A_s = A\big(I - \frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^\tau F(s)dsd\tau\big) + \\ + \frac{2}{t^2}\Big(\lambda^2\int_0^t\int_0^\tau C(s,A)dsd\tau - (C(t,A) - I)\Big)\lambda\hat{F}(\lambda), \end{aligned}$$

где $t \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{Re}\lambda > \omega.$

Доказательство. Пусть $A_h = \frac{2}{h^2}\Big(C(h,A) + F(h) - I\Big)$. Утверждение (iv) Предложения 2.4.1 можно переписать в виде

$$\frac{2F(h)}{h^2}x = \frac{2}{h^2}\int_0^h S(s,A)\lambda^3\hat{F}(\lambda)xds - \frac{2}{h^2}(C(h,A)-I)\lambda\hat{F}(\lambda)x,$$

$$A_hx = 2h^{-2}\int_0^h S(s,A)\lambda^3\hat{F}(\lambda)x\,ds + 2h^{-2}(C(h,A)-I)(I-\lambda\hat{F}(\lambda))x.$$

Поскольку первый член с правой стороны в каждом равенстве в силу (2.17) сходится к $\lambda^3\hat{F}(\lambda)x$ при $h \to 0$, мы имеем

$$D(W_s) = D(A\hat{F}(\lambda)) \quad \text{и } W_sx = \lambda(\lambda^2 I - A)\hat{F}(\lambda)x \text{ для } x \in D(W_s),$$

и также

$$D(A_s) = D\Big(A(I-\lambda\hat{F}(\lambda))\Big) \text{ и } A_sx = \lambda^3\hat{F}(\lambda)x + A(I-\lambda\hat{F}(\lambda))x$$

для $x \in D(A_s)$. Поскольку A замкнут и $\hat{F}(\lambda)$ ограничен, легко видеть что W_s и A_s замкнуты. Утверждения (i) и (ii) установлены.

Чтобы доказать (iii) воспользуемся равенством (2.1). Для всех $x \in E$ и $s \in \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\frac{2}{h^2}\Big(C(h,A) + F(h) - I\Big)x =$$

$$= \frac{2}{h^2}\Big(C(h,A) - I\Big)x + \frac{2}{h^2}\Bigg(F(s+h) - 2C(h,A)F(s) + F(s-h)\Bigg)x =$$

$$= \frac{2}{h^2}\Big(C(h,A) - I\Big)\Big(I - F(s)\Big)x + \frac{1}{h^2}\Bigg(F(s+h) - 2F(s) + F(s-h)\Bigg)x =$$

$$= \frac{2}{h^2}(C(h,A)-I)(I-F(s))x + \frac{2}{h^2}C(s,A)F(h)x.$$

Интегрируя дважды, получаем для любого $t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{2}{h^2}(C(h,A)+F(h)-I)x = \frac{2}{h^2}(C(h,A)-I)\Bigg(I - \frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^\tau F(s)dsd\tau\Bigg)x$$

$$+\frac{2}{t^2}(\lambda^2 I - A)\int_0^t\int_0^\tau C(s,A)dsd\tau(\lambda^2 I - A)^{-1}\frac{2}{h^2}F(h)x.$$

Поскольку последний член сходится к

$$\frac{2}{t^2}(\lambda^2 I - A)\int_0^t\int_0^\tau C(s,A)\,dsd\tau\lambda\hat{F}(\lambda)x$$

при $h \to 0+$ для всех $x \in E$ (см. Предложение 2.4.1 (iii)), мы получаем A_s в виде (iii).

Замечание 2.4.2. Определение инфинитезимального оператора посредством предела $s\text{-}\lim_{h\to 0+} h^{-1}F(h)$ не имеет смысла. Действительно, в этом случае, используя (2.37), мы получаем, что такой оператор будет нулевым.

Вообще говоря, области определения операторов W_s и A_s не обязательно плотны в E. Но при некоторых условиях на $F(\cdot)$ оператор A_s не только имеет плотную область определения, но и порождает C_0-косинус оператор-функцию. Области определения $D(W_c)$ и $D(A_c)$ всегда содержат плотное множество $D(A)$.

Теорема 2.4.2 ([236]). *Инфинитезимальные операторы W_c и A_c имеют при $Re\lambda > \omega$ следующие свойства*

(i) $D(A) \subseteq D(W_c)$ *и* $W_c x = \lambda\hat{G}(\lambda)(\lambda^2 - A)x$ *для всех* $x \in D(A)$;
(ii) $D(A) \subseteq D(A_c)$ *и для* $x \in D(A)$ *имеем*

$A_c x = Ax + W_c x = \Big(I - \lambda\hat{G}(\lambda)\Big)Ax + \lambda^3\hat{G}(\lambda)x$;

(iii) $D(A) \subseteq D(A_c)$ *и для* $x \in D(A)$ *и* $t \in \mathbb{R}_+$

$$A_c x = \Big(I - \frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^\tau G(s)ds d\tau\Big)Ax +$$
$$+\lambda\hat{G}(\lambda)\frac{2}{t^2}\Big(\lambda^2\int_0^t\int_0^\tau C(s,A)ds d\tau - (C(t,A) - I)\Big)x.$$

Кроме того, если $G(t)$ равномерно непрерывно по t, тогда A_c замкнут, $D(A_c) = D(A)$, и $A_c = \Big(I - \lambda\hat{G}(\lambda)\Big)A + \lambda^3\hat{G}(\lambda)$ для больших $\mathrm{Re}\,\lambda$. *Если $\hat{G}(\lambda)$ - обратим для некоторого λ, тогда оператор W_c замкнут, $D(W_c) = D(A)$, и $W_c = A_c - A = \lambda\hat{G}(\lambda)(\lambda^2 I - A)$.*

Доказательство. Пусть $A_h = \dfrac{2}{h^2}\Big(C(h,A) + G(h) - I\Big)$. В силу (v) Предложения 2.4.1 мы имеем

$$\frac{2G(h)}{h^2}x = \lambda^3\hat{G}(\lambda)\frac{2}{h^2}\int_0^h S(s,A)x ds - \lambda\hat{G}(\lambda)\frac{2}{h^2}\Big(C(h,A) - I\Big)x,$$

$$A_h x = 2\lambda^3\hat{G}(\lambda)h^{-2}\int_0^h S(s,A)x ds + 2(I - \lambda\hat{G}(\lambda))h^{-2}(C(h,A) - I)x.$$

Из первого тождества следует, что $D(A) \subseteq D(W_c)$ и $W_c x = \lambda\hat{G}(\lambda)(\lambda^2 I - A)x$ для $x \in D(A)$.

Из второго тождества вытекает, что $D(A) \subseteq D(A_c)$ и $A_c x = Ax + W_c x = (I - \lambda\hat{G}(\lambda))Ax + \lambda^3\hat{G}(\lambda)x$ для $x \in D(A)$.

Доказательство (iii) подобно доказательству утверждения (iii) Теоремы 2.2.2.

Если $\|G(t)\| \to 0$ при $t \to 0$, тогда $\|\lambda \hat{G}(\lambda)\| \to 0$ при $\lambda \to \infty$ (Предложение 2.4.2 (ii)). Таким образом, оператор $I - \lambda \hat{G}(\lambda)$ - обратим для больших λ и мы имеем $D(A_c) \subseteq D(A)$. Если $\{x_n\}$ - последовательность в $D(A)$ такая, что $x_n \to x$ и $(I - \lambda \hat{G}(\lambda))Ax_n \to y$, тогда $Ax_n \to \Big(I - \lambda \hat{G}(\lambda)\Big)^{-1} y$ так, что $x \in D(A)$ и $Ax = \Big(I - \lambda \hat{G}(\lambda)\Big)^{-1} y$.

Следовательно, $\Big(I - \lambda \hat{G}(\lambda)\Big)A$ замкнут и, значит, A_c тоже замкнут. Доказательства утверждений относительно оператора W_c следуют тем же путем, что и для A_c.

Из (2.1) следует, что, если $\|F(t)x\| = o(t^2)\,(t \to 0+)$ для всех $x \in E$, тогда $F''(t) = 0$ для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, так что $F'(\cdot) \equiv F'(0) = 0$, и тогда $F(\cdot) \equiv F(0) = 0$.

Аналогично из (2.2), условие $\|G(t)x\| = o(t^2)\,(t \to 0+)$ для всех $x \in E$ влечет $G(\cdot) \equiv 0$. Следовательно, скорость сходимости к 0 в случае нетривиального семейства мультипликативного возмущения или семейства аддитивного возмущения не может превысить $O(t^2)$ при $t \to 0$.

Предложение 2.4.2 ([236]). *Имеют место следующие утверждения относительно скорости сходимости к нулю:*

(i) *Для $n = 0, 1$, если $\|F(t)x\| = o(t^n)$ при $t \to 0+$ для всех $x \in E$, тогда $\|\lambda^n \hat{F}(\lambda)\| = o(1)$ при $\lambda \to \infty$ и $\|\lambda^{n+1} \hat{F}(\lambda)x\| = o(1)$ при $\lambda \to \infty$ для всех $x \in E$;*

(ii) *Для $n = 0, 1$, если $\|G(t)x\| = o(t^n)$ при $t \to 0+$ для всех $x \in E$, тогда $\|\lambda^n \hat{G}(\lambda)\| = o(1)$ при $\lambda \to \infty$, $\|\lambda^{n+1} \hat{G}(\lambda)x\| = o(1)$ при $\lambda \to \infty$ для всех $x \in E$, и*

$\|\lambda^3 \hat{G}(\lambda)x - (A_c - A)x\| = o(\lambda^{-n})$ для всех $x \in D(A)$;

(iii) *Для $n = 0, 1$, если $\|F(t)\| = o(t^n)$ (соотв. $\|G(t)\| = o(t^n)$) при $t \to 0+$, тогда $\|\lambda^{n+1} \hat{F}(\lambda)\| = o(1)$ (соотв. $\|\lambda^{n+1} \hat{G}(\lambda)\| = o(1)$) при $\lambda \to \infty$;*

(iv) *Для $n = 1, 2$, если $\|F(t)\| = O(t^n)\,(t \to 0+)$, тогда $\|\lambda^{n+1} \hat{F}(\lambda)\| = O(1)$ при $\lambda \to \infty$;*

(v) *Для $n = 1, 2$, если $\|G(t)\| = O(t^n)$ при $t \to 0+$, тогда $\|\lambda^{n+1} \hat{G}(\lambda)\| = O(1)$ при $\lambda \to \infty$, и $\|\lambda^3 \hat{G}(\lambda)x - (A_c - A)x\| = O(\lambda^{-n})$ для всех $x \in D(A)$.*

(vi) если $\|F(t)\| = O(t^2)$ при $t \to 0$, то
$w^*\text{-}\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^3 \hat{F}(\lambda)^* x^* = (A_s^* - A^*)x^*$ для любого $x^* \in D(A^*)$.

Доказательство. Мы докажем только (ii); доказательства утверждений (i), (iii), (iv) и (v) аналогичны. Для данного $\epsilon > 0$

выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\|G(t)x\| \leqslant \epsilon t^n$ для всех $t \in [0, \delta]$. Тогда

$$\|\lambda^{n+1}\hat{G}(\lambda)x\| \leqslant \lambda^{n+1}\Big(\int_0^\delta + \int_\delta^\infty\Big) e^{-\lambda t}\|G(t)x\|dt \leqslant$$
$$\leqslant \epsilon\lambda^{n+1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^n\,dt + \lambda^{n+1}\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}Me^{\omega t}dt\|x\| \leqslant$$
$$\leqslant \epsilon/n! + M\frac{\lambda^{n+1}}{\lambda-\omega}e^{-(\lambda-\omega)\delta}\|x\|.$$

Отсюда следует, что $\|\lambda^{n+1}\hat{G}(\lambda)x\| = o(1)$ при $\lambda \to \infty$ для всех $x \in E$. В силу принципа равномерной ограниченности мы имеем $\|\lambda^n\hat{G}(\lambda)\| = o(1)$ при $\lambda \to \infty$. Из (ii) Теоремы 2.4.2 теперь имеем $\|\lambda^3\hat{G}(\lambda)x - (A_c - A)x\| = o(\lambda^{-n})$ для всех $x \in D(A)$.

Глава 3

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА К ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения n-го порядка могут быть сведены к системе уравнений первого порядка путем привлечения матричных операторов. Теория матричных операторов подробно изложена в [125]. В настоящей главе мы коснемся лишь вопросов сведения неполных уравнений 2-го порядка к системе уравнений первого порядка.

§ 3.1. Теорема Кизынского

Рассмотрим в банаховом пространстве E равномерно корректную задачу Коши

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}; \qquad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{3.1}$$

Определим матричный оператор $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} : E^1 \times E \to E^1 \times E$, действующий на элемент $(x, y) \in E^1 \times E$ по формуле $\mathcal{A}(x, y) = (y, Ax)$ и заданный на области определения $D(\mathcal{A}) = D(A) \times E^1$. Далее элемент $(x, y) \in E^1 \times E$ будем в вынесенных формулах записывать как вектор $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Теорема 3.1.1 ([178]). *Пространство E^1 с нормой*

$$\|x\|_{E^1} := \|x\| + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|C'(t, A)x\| \tag{3.2}$$

является банаховым, а оператор $\mathcal{A}$ порождает C_0-группу операторов

$$\exp(t\mathcal{A})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} C(t,A) & S(t,A) \\ AS(t,A) & C(t,A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C(t,A)x + S(t,A)y \\ AS(t,A)x + C(t,A)y \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

на банаховом пространстве $E^1 \times E$.

Предложение 3.1.1 ([284])**.** *Пусть задана C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$. Тогда E^1 совпадает с замыканием $D(A)$ в норме*

$$\|x\|^* := \|x\| + \sup_{z>\omega, n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}(z-\omega)^{n+1}\left\|\frac{d^n}{dz^n}A(z^2I - A)^{-1}x\right\|. \quad (3.3)$$

Предложение 3.1.2 ([178])**.** *Резольвента оператора $\mathcal{A}$ имеет вид*

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(\lambda^2 I - A)^{-1} & (\lambda^2 I - A)^{-1} \\ A(\lambda^2 I - A)^{-1} & \lambda(\lambda^2 I - A)^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$
$$\text{при} \quad \lambda^2 \in \rho(A).$$

Предложение 3.1.3 ([178])**.** *Пусть $u(\cdot)$ – решение задачи (3.1) и $v(t) := u'(t), t \in \mathbb{R}$. Тогда вектор $\begin{pmatrix} u(\cdot) \\ v(\cdot) \end{pmatrix}$ является решением равномерно корректной задачи Коши*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

в банаховом пространстве $E^1 \times E$.

Предложение 3.1.4 ([178])**.** *Пусть некоторое банахово пространство $\tilde{E}^1$ непрерывно и плотно вложено в банахово пространство E, причем $D(\tilde{A}) \subseteq \tilde{E}^1$ для некоторого оператора $\tilde{A} \in L(E)$. Тогда если в пространстве $\tilde{E}^1 \times E$ задача Коши*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \tilde{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) \equiv \tilde{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t),\ t \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix},$$

равномерно корректная и $\rho(\tilde{\mathcal{A}}) \neq \varnothing$, то тогда следует, что $\tilde{A} \in \mathcal{C}(M, \omega)$.

Предложение 3.1.5 ([178]). *C_0-полугруппа, отвечающая задаче (3.6) на пространстве $\tilde{E}^1 \times E$, в условиях Предложения 3.1.4 представима в виде*

$$\exp(t\tilde{\mathcal{A}}) := \begin{pmatrix} G_{11}(t) & G_{12}(t) \\ G_{21}(t) & G_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}, \tag{3.7}$$

где семейство $G_{22}(\cdot)$ является C_0-косинус оператор-функцией $C(\cdot, A)$ и совпадает с $G_{11}(\cdot)$ на $\tilde{E}^1$.

Предложение 3.1.6 ([178]). *В условиях Предложения 3.1.4 при $x \in E$ и $y \in \tilde{E}^1$ имеют место равенства*

$$G_{12}(t)x = S(t, A)x \quad \textit{и} \quad G_{21}(t)y = C'(t, A)y = AS(t, A)y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Предложение 3.1.7 ([178]). *Пространства $\tilde{E}^1$ и E^1 совпадают с точностью до эквивалентности норм.*

§ 3.2. Условия (K) и (F)

Заметим, однако, что исследовать задачу (3.1) путем сведения к системе (3.5) весьма неудобно, т.к. пространство E^1 определяется либо через C_0-косинус оператор-функцию $C(\cdot, A)$, либо через бесконечное число степеней резольвенты. Мы же, как правило, располагаем информацией только об операторе A. Поэтому представляют интерес некоторые дополнительные условия, позволяющие сводить задачу (3.1) к системе, не используя пространство E^1.

Предложение 3.2.1 ([271]). *Пусть пространство E гильбертово, оператор A самосопряженный отрицательно определенный. Тогда $A \in \mathcal{C}(M, \omega)$ и соответствующее пространство E^1 совпадает с $\mathcal{D}((-A)^{1/2})$.*

Заметим, что проблема квадратного корня из оператора в банаховом пространстве гораздо сложнее (см. [81], [211]).

Пусть равномерно корректная задача (3.1) имеет вид:

$$u''(t) = \mathfrak{B}^2 u(t); \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{3.8}$$

где $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}(E)$.

Определение 3.2.1. Говорят, что решение $u(\cdot)$ задачи (3.8) удовлетворяет *условию (K)*, если $u'(\cdot) \in C\Big([0, T]; \mathcal{D}(\mathfrak{B})\Big)$.

Предложение 3.2.2 ([45]). *Для того, чтобы задача (3.8) имела единственное решение, удовлетворяющее условию (K),* *необходимо и достаточно, чтобы на пространстве $E \times E$ была равномерно корректна задача Коши*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Аналогом условия (K), позволяющего упростить исследование задачи (3.1) с помощью C_0-полугрупп, является условие (F).

Определение 3.2.2. C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ удовлетворяет *условию (F)*, если выполнены следующие условия:

(i) существует $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}(E)$ такой, что $\mathfrak{B}^2 = A$ и $\mathfrak{B}$ коммутирует с любым оператором из $B(E)$, коммутирующим с A;

(ii) СОФ $S(t, A)$ отображает E в $D(\mathfrak{B})$ при любом $t \in \mathbb{R}$;

(iii) функция $\mathfrak{B}S(t, A)x$ непрерывна по $t \in \mathbb{R}$ при любом фиксированном $x \in E$.

Предложение 3.2.3 ([133]). *При выполнении условия (F) для каждого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\mathfrak{B}S(t, A) \in B(E)$ и $D(\mathfrak{B}) \subseteq E^1$.*

Предложение 3.2.4 ([133]). *Существуют банахово пространство E и C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ (даже равномерно ограниченная) такие, что условие (F) не выполняется.*

Предложение 3.2.5 ([133]). *Путем сдвига $A_b := A - b^2 I$ при $b > \omega_c(A)$ всегда можно построить операторы A_b и $\mathfrak{B}_b$ такие, что $\mathfrak{B}_b^2 = A_b$ и $\mathfrak{B}_b$ коммутирует с любым оператором из $B(E)$, коммутирующим с A_b.*

Предложение 3.2.6 ([132]). *Оператор $\mathfrak{B}_b$ в Предложении 3.2.5 можно построить, например, так:*

$$\mathfrak{B}_b x := \frac{-i}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1/2} (\lambda I - A_b)^{-1} (-A_b x) d\lambda \,.$$

Теорема 3.2.1 ([269]). *Пусть A и $\mathfrak{B}$ - операторы, удовлетворяющие условию (i) в Определении 3.2.2, и $0 \in \rho(\mathfrak{B})$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ удовлетворяет условию (F);

(ii) оператор $\mathfrak{B}$ порождает C_0-полугруппу $exp(\cdot\mathfrak{B})$ на E;

(iii) оператор $\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} & 0 \end{pmatrix}$ с областью определения $D(A) \times D(\mathfrak{B})$ порождает C_0-группу на $E \times E$;

(iv) оператор $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ *с областью определения* $D(A)\times D(\mathfrak{B})$ *порождает* C_0*-группу* $exp(\cdot\mathcal{A})$ *на* $\mathcal{D}(\mathfrak{B}) \times E$*, где* $\mathcal{D}(\mathfrak{B})$ *- банахово пространство элементов* $D(\mathfrak{B})$*, наделенное нормой графика;*

(v) имеет место вложение $D(\mathfrak{B}) \subseteq E^1$*;*

(vi) $D(\mathfrak{B}) = E^1$*.*

Предложение 3.2.7 ([101])**.** *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M, 0)$ *и* E *является UMD пространством. Тогда условие (F) выполняется.*

Предложение 3.2.8 ([285])**.** *Следующее условие эквивалентно условиям (i)-(vi) из Теоремы 3.2.1:*

$D(\mathfrak{B})$ *плотно в* E *и существуют константы* $M > 0$ *и* $\omega \geqslant 0$ *такие, что* $\lambda^2 \in \rho(A)$ *для любого* $\lambda > \omega$ *, оператор-функции* $\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}$ *и* $\mathfrak{B}(\lambda^2 I - A)^{-1}$ *сильно дифференцируемы бесконечное число раз при* $\lambda > \omega$ *и при любом* $m \in \mathbb{N}_0$ *имеют место оценки*

$$\left\| \frac{(\lambda-\omega)^{m+1}}{m!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m \left(\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}\right) \right\| \leqslant M,$$

$$\left\| \frac{(\lambda-\omega)^{m+1}}{m!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m \left(\mathfrak{B}(\lambda^2 I - A)^{-1}\right) \right\| \leqslant M.$$

Предложение 3.2.9 ([269])**.** *В условиях Теоремы 3.2.1 при* $t \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\begin{aligned}
&(i) && \exp(t\mathfrak{B}) = C(t,A) + \mathfrak{B}S(t,A), \\
& && C(t,A) = \Big(\exp(t\mathfrak{B}) + \exp(-t\mathfrak{B})\Big)/2; \\
&(ii) && \exp(t\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \mathfrak{B} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}; \\
&(iii) && \exp(t\mathcal{A}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(t,A)x + S(t,A)y \\ AS(t,A)x + C(t,A)y \end{pmatrix}, \\
& && \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathfrak{B}) \times E.
\end{aligned}$$

В приложениях часто возникает система специального вида

$$\begin{cases} u'(t) = -A_0 u(t) + Bv(t), & u(0) = x, \\ v'(t) = Cu(t) - A_1 v(t), & v(0) = y, \end{cases}$$

на пространстве $\mathcal{H} = H_0 \times H_1$ с линейными операторами

$$A_0 : D(A_0) \subseteq H_0 \to H_0, \quad A_1 : D(A_1) \subseteq H_1 \to H_1,$$

$$B : D(B) \subseteq H_1 \to H_0, \quad C : D(C) \subseteq H_0 \to H_1.$$

Соответствующий матричный оператор $\mathcal{A}$ определяется как

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -A_0 & B \\ C & -A_1 \end{pmatrix}$$

на $\mathcal{H}$ с

$$D(\mathcal{A}) = \Big(D(A_0) \cap D(C)\Big) \times \Big(D(A_1) \cap D(B)\Big).$$

Теорема 3.2.2 ([194]). *Пусть* $\exp(t, -A_0)$ *и* $\exp(t, -A_1)$ – *сжимающие* C_0*-полугруппы на* H_0 *и* H_1 *соответственно, а* B *и* C *замкнуты, причем* $\overline{D(A_0) \cap D(C)} = H_0$ *и* $\overline{D(A_1) \cap D(B)} = H_1$. *Пусть также* $\mathrm{Re}\{\langle A_0 x, x\rangle + \langle A_1 y, y\rangle - \langle By, x\rangle - \langle Cx, y\rangle\} \geqslant 0$ *для любых* $x \in D(A_0) \cap D(C)$ *и* $y \in D(A_1) \cap D(B)$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) $\mathcal{A}$ *порождает сжимающую* C_0*-полугруппу на* $\mathcal{H}$*;*

(ii) для любых $\lambda > 0$ *имеем*

$$(\lambda I + A_0 - B(\lambda I + A_1)^{-1} C)^{-1} \in B(H_0),$$
$$(\lambda I + A_1 - C(\lambda I + A_0)^{-1} B)^{-1} \in B(H_1);$$

(iii) утверждения (ii) выполняются при некотором $\lambda > 0$*;*

(iv) для любого $\lambda > 0$ *операторы* $-(A_0 - B(\lambda I + A_1)^{-1} C)$ *и* $-(A_1 - C(\lambda I + A_0)^{-1} B)$ *порождают сжимающие* C_0*-полугруппы на* H_0 *и* H_1 *соответственно;*

(v) утверждения (iv) выполняются для некоторого $\lambda > 0$.

В работе [194] также получены условия, при которых оператор $\mathcal{A}$ порождает экспоненциально устойчивую, дифференцируемую, аналитическую C_0-полугруппу, принадлежащую классу Жевре с $\delta > 0$.

Глава 4

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Теория интерполяции существенно увеличивает валовый объем результатов в теории уравнений с частными производными. Нас будут интересовать в основном два глобальных направления: приложения к неравенствам коэрцитивности, зачастую не имеющим места в традиционных пространствах, и приложения к оценкам скорости сходимости приближенных методов в зависимости от гладкости начальных данных см. [152]. Эти аспекты будут подробно изложены в следующих обзорах.

§ 4.1. Общие положения

Пусть X и Y – два комплексных банахова пространства, которые непрерывно вложены в отделимое топологическое векторное пространство E, т.е. $X \hookrightarrow E$ и $Y \hookrightarrow E$. Такие банаховы пространства X, Y называются интерполяционной парой, что записывается как $\{X, Y\}$.

Предложение 4.1.1 ([7]). *Пусть $\{X, Y\}$ – интерполяционная пара. Тогда $X+Y$ и $X \cap Y$ являются банаховыми пространствами с нормами соответственно*

$$\|x\|_{X \cap Y} = \max(\|x\|_X, \|x\|_Y),$$
$$\|x\|_{X+Y} = \inf_{\substack{x=x_0+x_1 \\ x_0 \in X,\, x_1 \in Y}} \{\|x_0\|_X, \|x_1\|_Y\},$$

Очевидно, что, если $Y \hookrightarrow X$, то $X \cap Y = Y$ и $X + Y = X$. В такой ситуации естественно положить $E = X$, что обычно и имеет место в приложениях.

Определение 4.1.1. Для всякого $t \in \mathbb{R}_+$ и интерполяционной пары $\{X_0, X_1\}$ определим так называемый *K-функционал* Петре

$$K(t, x; X_0, X_1) = \inf_{\substack{x=x_0+x_1, \\ x_0 \in X_0, x_1 \in X_1}} (\|x_0\|_{X_0} + t\,\|x_1\|_{X_1})$$

для любого $x \in X_0 + X_1$.

Иногда пишут просто $K(t, x)$, когда выбор пространств X_0, X_1 не вызывает сомнений.

Определение 4.1.2. *Интерполяционным пространством* $(X_0, X_1)_{\theta,q}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $1 \leqslant q < \infty$, построенным по интерполяционной паре $\{X_0, X_1\}$ с помощью K-метода называется пространство всех элементов $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t, x) \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

В случае $q = \infty$ вместо $(X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ обычно пишут $(X_0, X_1)_\theta$ и определяют норму как

$$\|x\|_\theta = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t, x).$$

Интерполяционное пространство с $q = \infty$ представляет особый интерес при рассмотрении аппроксимаций C_0-полугрупп операторов и C_0-косинус оператор функций, а также при использовании классов Фавара.

Кроме K-функционала возможно использовать для построения интерполяционных пространств и другие конструкции. Подробнее об этом см., например, [7], [70].

Определение 4.1.3. Говорят, что пространство $\mathcal{E} \in K_\theta(X_0, X_1)$, если оно непрерывно вложено в $(X_0, X_1)_\theta$, т.е. $K(t, x) \leqslant ct^\theta \|x\|_{\mathcal{E}}$ при любом $x \in \mathcal{E}$.

В связи с Определением 4.1.3 для интерполяционной пары $\{X_0, X_1\}$ удобно положить

$$\mathcal{J}_j(X_0, X_1) \cap K_j(X_0, X_1) = \{X_j\}, \quad j = 0, 1.$$

Определение 4.1.4. Банахово пространство $[X_0, X_1]_\theta$, построенное по комплексному интерполяционному методу, называется *интерполяционным пространством*, соответствующим интерполяционной паре $\{X_0, X_1\}$.

Пусть Ω - открытое множество в $\mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{N}_0$ и $1 \leqslant q, p \leqslant \infty$. Пусть $\sigma = m + \theta$, где $0 < \theta \leqslant 1$.

Положим $\Delta_y f(x) := f(x+y) - f(x)$, $\Delta_y^2 f(x) := f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x)$ и $\Omega_{k,y} := \cap_{j=0}^k (\Omega - jy) = \{x : x + jy \in \Omega$ при $j = \overline{0, k}\}$.

Определение 4.1.5. *Пространство Бесова* $B^\sigma_{p,q}\big(\Omega, E\big)$ определяется как пространство всех функций f из $W^m_p(\Omega; E)$, для которых полунорма

$$|f|_{B^\sigma_{p,q}\left(\Omega; E\right)} := \sum_{|\alpha| = m} \| |y|^{-\theta} \{ \|\Delta_y^k \partial_x^\alpha f(x)\|_{L^p(\Omega_{k,y}; E)} \} \|_{L^q_*(\mathbb{R}^d)}$$

конечна соответственно для $k = 1$ или $k = 2$ при $0 < \theta < 1$ или $\theta = 1$.

Норма пространства Бесова определяется как

$$\|f\|_{B^\sigma_{p,q}\left(\Omega; E\right)} := \|f\|_{L^p\left(\Omega; E\right)} + |f|_{B^\sigma_{p,q}\left(\Omega; E\right)}.$$

Здесь $L^p_*(\Omega)$ – это $L^p(\Omega)$-пространство в соответствии с мерой $|x|^{-d}\, dx$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

Теорема 4.1.1 ([218]). *Пусть $a, b < \infty$ конечны. Тогда*

(i) для $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$ в случаях $\sigma - \frac{1}{p_1} > \tau - \frac{1}{p_2}$ или $\sigma - \frac{1}{p_1} = \tau - \frac{1}{p_2}$ и $q_1 \leqslant q_2$ имеем $B^\sigma_{p_1,q_1}\big((a,b), E\big) \hookrightarrow B^\tau_{p_2,q_2}\big((a,b), E\big)$;

(ii) $B^m_{p,1}\big((a,b), E\big) \subset W^m_p\big((a,b), E\big) \subseteq B^m_{p,\infty}\big((a,b), E\big)$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

В частности, $B^m_{\infty,1}\big((a,b), E\big) \subset C^m\big((a,b), E\big)$.

§ 4.2. Интерполяция в теории C_0-полугрупп

Напомним, что через $\mathcal{D}(A^m)$ обозначается банахово пространство с элементами $x \in D(A^m)$, наделенное нормой

$$\|x\|_{\mathcal{D}(A^m)} = \|x\| + \|A^m x\|.$$

Теорема 4.2.1 ([70]). *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant p < \infty$ и $k, l \in \mathbb{Z}$ с $0 \leqslant k < s = \theta m$, $l > s - k$. Тогда*

(i) для $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$ и $0 < \delta < \infty$

$$(E, \mathcal{D}(A^m))_{\theta,p} = \left\{ x \in E : \|x\|^{(k,l,\delta)}_{(E,\mathcal{D}(A^m))_{\theta,p}} < \infty \right\},$$

где

$$\|x\|^{(k,l,\delta)}_{(E,\mathcal{D}(A^m))_{\theta,p}} = \|x\|_E + \left(\int_0^\delta \|t^{-(s-k)}(\exp(tA) - I)^l A^k x\|_E^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}},$$

и все эти нормы эквивалентны норме $\|\cdot\|_{(E,\mathcal{D}(A^m))_{\theta,p}}$;

(ii) если $\omega < 0$, то $\delta = \infty$ является допустимым значением при определении нормы.

Определение 4.2.1. Оператор $A \in \mathcal{C}(E)$ называется *позитивным*, если $(-\infty, 0] \subseteq \rho(A)$ и существует число $C > 0$, такое что

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{1 + |\lambda|} \quad \text{при} \quad \lambda \in (-\infty, 0].$$

Заметим, что в случае $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$ с $\omega < 0$ оператор $-A$ является позитивным.

Теорема 4.2.2 ([70]). *Пусть $-A$ позитивен, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда*

$$(E, \mathcal{D}(A^m))_{\theta,p} =$$
$$= \left\{ x \in E : \|x\|_* = \Big(\int_0^\infty (t^{\theta m} \|A^m (tI + A)^{-m} x\|_E)^p \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

при этом норма $\|\cdot\|_*$ эквивалентна норме пространства $(E, \mathcal{D}(A^m))_{\theta,p}$.

Теорема 4.2.3 ([70]). *Пусть $-A$ – позитивный оператор. Тогда*

(i) если $j, m \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant j \leqslant m$, то

$$(E, \mathcal{D}(A^m))_{j/m,1} \subseteq \mathcal{D}(A^j) \subseteq (E, \mathcal{D}(A^m))_{j/m,\infty};$$

(ii) если $m \in \mathbb{N}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $k, l \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k < s = m\theta$, $l > s - k$, то

$$(E, \mathcal{D}(A^m))_{\theta,p} = \left\{ x \in E : (\int_0^\infty \left(t^{s-k} \|A^l (tI + A)^{-l} A^k x\|_E \right)^p \frac{dt}{t})^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

(iii) если $A \in \mathcal{H}(M, \omega)$ с $\omega < 0$, то

$$(E, \mathcal{D}(A^m))_{\theta,p} = \left\{ x \in E : \|x\|_{**} = \right.$$

$$\left. = \left(\int_0^\infty \left(t^{m-\theta m} \|A^m exp(tA) x\|_E \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

где $\|\cdot\|_{**}$ – норма, эквивалентная норме пространства $(E, \mathcal{D}(A^m))_{\theta,p}$.

Предложение 4.2.1 ([70])**.** *Пусть A – позитивный оператор, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, $0 < \sigma < m$. Тогда для комплексных чисел $-k < \operatorname{Re} z \leqslant \sigma - k$ и $x \in (E, \mathcal{D}(A^m))_{\sigma/m,p}$ интеграл*

$$A_\sigma^z x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(z+m)\Gamma(m-k-z)} \int_0^\infty \lambda^{z+k-1} A^{m-k} (A + \lambda I)^{-m} x \, d\lambda$$

сходится, где $\Gamma(m) := \int_0^\infty e^{-mt} t^{m-1} \, dt$ – гамма-функция. Оператор A_σ^z замыкаем и не зависит от σ.

Определение 4.2.2. Пусть A – позитивный оператор и $z \in \mathbb{C}$. *Дробная степень* A^z оператора A определяется как замыкание оператора A_σ^z.

Теорема 4.2.4 ([44])**.** *Пусть A – позитивный оператор. Тогда*

(i) если $m \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta < m$, то

$$A^\alpha A^\beta x = A^\beta A^\alpha x \quad \text{при } x \in D(A^{2m});$$

(ii) если $\operatorname{Re} \alpha < 0$, то A^α непрерывный оператор и

$$A^{-\alpha} A^\alpha = I;$$

(iii) если $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$, то $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$;

(iv) если $m \in \mathbb{N}$ и $0 < \operatorname{Re} \alpha < m$, то

$$(E, \mathcal{D}(A^m))_{\frac{\operatorname{Re} \alpha}{m},1} \subseteq \mathcal{D}(A^\alpha) \subseteq (E, \mathcal{D}(A^m))_{\frac{\operatorname{Re} \alpha}{m},\infty};$$

(v) если $0 < \operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \beta < \infty$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty, 0 < \theta < 1$, то

$$(E, \mathcal{D}(A^\alpha))_{\theta,p} = (E, \mathcal{D}(A^\beta))_{\frac{\operatorname{Re} \alpha}{\operatorname{Re} \beta}\theta,p}.$$

Предложение 4.2.2 ([70]). *Пусть A – позитивный оператор и существуют константы ε, C такие, что A^{it} – равномерно ограниченные вблизи нуля операторы, т.е. $\|A^{it}\| \leqslant C$ при $-\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon$. Если $0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$ и $0 < \theta < 1$, то*

$$\Big[\mathcal{D}(A^\alpha), \mathcal{D}(A^\beta)\Big]_\theta = \mathcal{D}\Big(A^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}\Big).$$

Предложение 4.2.3 ([95]). *Пусть $A \in \mathcal{G}(M,0)$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда для $x \in E$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $x \in \mathcal{D}((-A)^\alpha)$;

(ii) $s\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1}(\exp(tA) - I)x\,dt$ существует.

Предложение 4.2.4 ([95]). *Пусть $\tau > 0$, $A \in \mathcal{G}(M,0)$ и $U_\beta(\tau)x := \int_0^\tau (\tau - s)^{\beta-1}\exp(sA)x\,ds$ при $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$, $x \in E$. Тогда $U_\beta(\tau)x \in \mathcal{D}((-A)^\alpha)$.*

Предложение 4.2.5 ([95]). *Пусть $A \in \mathcal{G}(M,0)$ – нормальный оператор в гильбертовом пространстве $E = H$. Тогда для оператор-функции $C_t^\alpha[\exp(\cdot A)]$ при $0 < \alpha < 1$ имеем $C_t^\alpha[\exp(\cdot A)]E \subseteq \mathcal{D}((-A)^\alpha))$ и и оператор $(-A)^\alpha C_t^\alpha[\exp(\cdot A)]$ сильно непрерывен.*

Теорема 4.2.5 (теорема о реитерации, [70]). *Пусть A – позитивный оператор, удовлетворяющий условиям Предложения 4.2.2, и $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Тогда при $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ и $0 < \lambda < 1$*

$$\Big[(E, \mathcal{D}(A^\alpha)_{\theta_0,p}, (E, \mathcal{D}(A^\alpha)_{\theta_1,p}\Big]_\lambda = \Big(E, \mathcal{D}(A^\alpha)\Big)_{(1-\lambda)\theta_0+\lambda\theta_1,p}.$$

Как отмечалось, если $A \in \mathcal{H}(\omega,\beta)$ с $\omega \leqslant 0$, то оператор $-A$ позитивен. В то же время конструкция дробных степеней в этом случае облегчается. Расположение спектра оператора $A \in \mathcal{H}(\omega,\beta)$ таково:

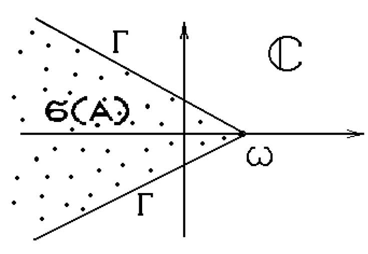

Рис. 1

и $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|}$ при $\lambda \in \Gamma$. Предположим, что $\omega = 0$. Тогда можно положить

$$(-A)^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-\alpha} (\lambda I + A)^{-1} \, d\lambda, \ 0 < \alpha < \infty,$$

где контур Γ в интеграле проходится снизу вверх - см. Рис.1.

Операторы $(-A)^{-\alpha}$ ограничены, и при целых $\alpha = m \in \mathbb{N}$ имеем $(-A)^{\alpha} = (-A)^{-n}$. Кроме того, операторы $(-A)^{-\alpha}(-A)^{-\beta} = (-A)^{-(\alpha+\beta)}$ образуют полугруппу, $\|(-A)^{-\alpha}\| \leqslant const, 0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha \leqslant 1$, и эта полугруппа сильно непрерывна в нуле, т.е. $(-A)^{-\alpha}x \to x$ при $\alpha \to 0$ для любого $x \in E$. Комплексные степени определяют по формуле

$$(-A)^{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-z} (\lambda I + A)^{-1} \, d\lambda, \quad \operatorname{Re} z < 0. \tag{4.1}$$

Предложение 4.2.6 ([70]). *Пусть* $A \in \mathcal{H}(\omega, \beta)$. *Тогда* $\{(-A)^{z}\}_{\operatorname{Re} z \leqslant 0}$ *являются* C_0*-полугруппой, аналитической в открытой левой полуплоскости. Операторы* $(-A)^{\alpha}$, $0 < \alpha < \infty$*, как обратные к ограниченным, замкнуты и, кроме того,* $\overline{D((-A)^{\alpha})} = E$.

Предложение 4.2.7 ([45], неравенство моментов). *Пусть* A *- позитивен. Тогда для любых* $\alpha < \beta < \gamma$ *имеем*

$$\|A^{\beta}x\| \leqslant C(\alpha, \beta, \gamma) \|A^{\gamma}x\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \cdot \|A^{\alpha}x\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \quad \textit{при} \quad x \in \mathcal{D}(A^{\gamma}).$$

В [87], [210] дробные степени позитивного оператора A определены следующим образом:

если A ограничен, то $A^{\alpha} := \frac{sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} \mu^{\alpha-1} (\mu I + A)^{-1} x \, d\mu, \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$;

если A не ограничен и $0 \in \rho(A)$, то $A^{\alpha} := [(A^{-1})^{\alpha}]^{-1}$;

если A не ограничен и $0 \in \sigma(A)$, то $A^{\alpha}x := \lim_{\varepsilon \to 0+} (A + \varepsilon I)^{\alpha} x$ на тех x, на которых предел существует.

При таком определении легко видеть, что $A^1 = A$ и приемлемым оказывается случай $\overline{\mathcal{D}(A)} \neq E$ и $0 \in \sigma(A)$. Как показано в [210], нетрудно установить равенства $A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\beta}A^{\alpha} = A^{\alpha+\beta}$, $(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha\beta}$ и интегральные представления для выражения $A^{\alpha}x - \sum_{p=0}^{n} C_p^{\alpha} (-1)^p \varepsilon^p (A + \varepsilon I)^{\alpha - p} x$, где C_p^{α} – биномиальные коэффициенты. Кроме того, приведен пример, когда $\mathcal{D}(A^{s+it_1}) \setminus \mathcal{D}(A^{s+it_2}) \neq \varnothing$ при любом $s > 0$ и $t_1 \neq t_2$.

Предложение 4.2.8 ([250]). *Для* $A \in \mathcal{G}(M, 0)$ *имеют место* *неравенства Ландау*

$$\|A^2x\|^3 \leqslant 3\|x\|\|A^3x\|^2, \|A^2x\|^3 \leqslant \frac{72}{25}\|x\|\|A^3x\|^2,$$
$$\|Ax\|^3 \leqslant \frac{81}{40}\|x\|^2\|A^3x\|, \|A^3x\|^4 \leqslant C\|x\|\|A^4x\|^3,$$
$$\|A^2x\|^4 \leqslant C\|x\|^2\|A^4x\|^2, \|Ax\|^4 \leqslant C\|x\|^3\|A^4x\|.$$

Теорема 4.2.6 ([45]). *Пусть A позитивен. Тогда операторы $-A^\alpha$ при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ порождают аналитические C_0-полугруппы.*

Теорема 4.2.7 ([45]). *Пусть $A \in \mathcal{H}(\omega, \beta)$ с $\beta < 0$. Тогда оператор $-(-A)^\alpha$ при любом $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ является производящим оператором аналитической C_0-полугруппы.*

Теорема 4.2.8 ([123]). *Пусть $\alpha > 0$ и $A \in \mathcal{H}(\omega, \pi/2)$, причем*

$$\|\exp(zA)\| \leqslant M\left(\frac{|z|}{Rez}\right)^\alpha \quad \text{для} \quad Rez > 0.$$

Тогда оператор $-(-A)^{1/2}$ порождает аналитическую C_0-полугруппу, аналитичную в правой полуплоскости и

$$\|\exp(-z(-A)^{1/2})\| \leqslant M'\left(\frac{|z|}{Rez}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad Rez > 0.$$

Кроме того, A порождает β-раз проинтегрированную косинус оператор-функцию для $\beta > \alpha + \frac{1}{2}$.

Предложение 4.2.9 ([63]). *Пусть $A \in \mathcal{G}(M, 0)$. Тогда $-(-A)^{1/2}$ порождает аналитическую C_0-полугруппу и при $t > 0$ имеют место представления:*

$$\exp(-t(-A)^{1/2}) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4s}}\exp(sA)\frac{ds}{s^{3/2}},$$
$$\exp(-t(-A)^{1/2}) = \frac{t^{1/2}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{4s}}\exp(tsA)\frac{ds}{s^{3/2}},$$
$$\exp(-t(-A)^{1/2}) = \frac{t^{1/2}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{ts}{4}}\exp(tA/s)\frac{ds}{s^{1/2}}.$$

Мнимые степени оператора $-A \in \mathcal{H}(\omega, \beta)$ со свойством $0 \in \rho(A)$ можно определить, например, и так (см. [187])

$$(A)^{is} = g_s(A)(A+I)^2A^{-1}, \tag{4.2}$$

где $g_s(\lambda) = \lambda^{is}\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}$, а $g_s(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g_s(\lambda)(\lambda I - A)^{-1}\,d\lambda$.

§ 4.3. Интерполяция в теории C_0-косинус оператор-функций

Как известно, оператор $A \in \mathcal{C}(M, 0)$ порождает также и аналитическую C_0-полугруппу, поэтому, следуя предыдущему разделу, можно определить его дробные степени A^z. Тем не менее, мы приведем некоторые конкретные соотношения, учитывающие специфику C_0-косинус оператор-функций.

Итак, в силу (2.12) можно следовать предыдущему разделу, и выражая резольвенту через C_0-косинус оператор-функцию - см. (2.32), при $b > \omega_c(A)$ получаем (см. [129])

$$(b^2 I - A)^{-\alpha} x =$$

$$= \frac{2^{3/2-\alpha} b^{1/2-\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1/2} K_{\alpha-1/2}(bs) C(s, A) x \, ds \qquad (4.3)$$

для $\alpha > 0$, где K_ν – функция Макдональдса, представимая через функцию Бесселя $I(t)$ следующим образом:

$$K_\nu(t) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)}{sin(\pi\nu)} \quad \text{при} \quad \nu \neq \pm\pi, \pm 2\pi, ...$$

Пусть $A \in \mathcal{C}(M, 0)$. Тогда для $k \in \mathbb{N}$ и $k - 1 < \alpha < k$ имеем полезное в теории интерполяции равенство

$$(-A)^\alpha x = \frac{1}{C_{\alpha,k}} \int_0^\infty t^{-2\alpha} (C(t, A) - I)^k x \frac{dt}{t}, \quad x \in \mathcal{D}(A^k),$$

где $C_{\alpha,k} = \int_0^\infty t^{-2\alpha} (cos(t) - 1)^k \frac{dt}{t}$.

Предложение 4.3.1 ([165]). *Пусть $r \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{C}(M, 0)$ и $0 < \alpha < r$. Элемент $\overline{x} \in \mathcal{D}((-A)^\alpha)$ тогда и только тогда, когда существует предел*

$$s\text{-}lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{C_{\alpha,r}} \int_\varepsilon^\infty t^{-2\alpha} (C(t, A) - I)^r \overline{x} \, \frac{dt}{t},$$

в этом случае этот предел есть $-(-A)^\alpha \overline{x}$.

Предложение 4.3.2 ([165]). *Пусть $r \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{C}(M, 0)$ и $0 < \alpha < r$. Элемент $\overline{x}^* \in \mathcal{D}((-A)^*)$ принадлежит $\overline{x}^* \in \mathcal{D}((-A)^\odot)^\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\overline{x}^* \in E^\odot$ и существует предел*

$$w^*\text{-}lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{C_{\alpha,r}} \int_\varepsilon^\infty t^{-2\alpha} (C(t, A^\odot) - I)^r \overline{x}^* \, \frac{dt}{t},$$

в этом случае этот предел есть $-(-A^\odot)^\alpha \overline{x}^*$.

Фатторини в [129] исследовал соотношение областей определения дробных степеней операторов с множеством элементов, на которых C_0-полугруппы имеют дробные прозводные. Напомнм, что C_0-полугруппа операторов имеет непрерывную дробную прозводную порядка $\alpha \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$ тогда только тогда, когда существует $\beta > \omega(A)$ и функция $f_\beta(\cdot)$, непрерывная с интегрируемой по $s \geqslant 0$ функцией $s^\alpha \| f_\beta(s) \|$, причем

$$e^{-\beta t} \exp(tA)x = \frac{e^{i\pi\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (s-t)^{\alpha-1} f_\beta(s)\, ds, \quad t \geqslant 0. \tag{4.4}$$

Обозначим через $E_{\alpha,\beta}$ множество элементов $x \in E$, удовлетворяющих (4.4), а через $F_\alpha := \mathcal{D}((bI - A)^\alpha)$ при $b \geqslant \omega(A)$.

Предложение 4.3.3 ([129]). *Пусть $\alpha \geqslant 0$ и $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$. Тогда $E_{\alpha,\beta} = E_\alpha, \quad \beta > \omega$.*

Для C_0-групп операторов ситуация предыдущего Предложения дополняется еще одним равенством: $E^-_{\alpha,\beta} = F^-_\alpha$, $\beta > \omega$, где $F^-_\alpha = \mathcal{D}((bI + A)^\alpha)$, а $E^-_{\alpha,\beta}$ соответствует $\exp(\cdot, A)$.

Предложение 4.3.4 ([129]). *Пусть $\tau \geqslant 0, x \in E$ и $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$. Тогда $\int_0^\tau (\tau - s)^{2\beta-1} C(s, A)x\, ds \in \mathcal{D}((-A)^\alpha)$.*

Положить в последнем предложении $\alpha = \beta = 1/2$ нельзя, как показал Фатторини. Это породило появление условия (F) - см. стр. 48.

Определим для косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$ модуль непрерывности

$$\omega_r(t^r, x) := \sup_{|s| \leqslant t} \|(C(s, A) - I)^r x\|_E, \quad x \in E,$$

где $r \in \mathbb{N}$. Положим также $K(t, x; E, \mathcal{U}) = \inf_{g \in \mathcal{U}} \{\|x - g\|_E + t|g|_{\mathcal{U}}\}$.

Предложение 4.3.5 ([165]). *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $0 < t \leqslant \delta < \infty$. Тогда существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что*

$$C_1 K(t^{2r}, x; E, \mathcal{D}(A^r)) \leqslant \omega_r(t^r, x) +$$
$$+ \min(1, t^{2r}) \|x\|_E \leqslant C_2 K(t^{2r}, x; E, \mathcal{D}(A^r)),$$

где K – функцонал Петре.

Как и для полугрупп операторов определим $(E, \mathcal{D}(A))_{\theta,q}$ как пространство с нормой

$$\|x\|_{(E,\mathcal{D}(A))_{\theta,q}} := \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t^r, x)^q\, dt \right)^{1/q}.$$

Для случая $q = \infty$ норма задается как

$$\|x\|_{(E,\mathcal{D}(A))_{\theta,\infty}} = \|x\|_E + \sup_{t \in \mathbb{R}_+} (t^{-2\alpha} \omega_1(t, x)).$$

Теорема 4.3.1 ([165]). *Пусть* $0 < \alpha < r$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q < \infty$ *(или соответственно* $0 \leqslant \alpha \leqslant r$, $q = \infty$*). Тогда промежуточные пространства* $(E, \mathcal{D}(A^r))_{\theta,q}$ *с* $\theta = \alpha/r$ *и* $0 < \delta < \infty$ *имеют следующие эквивалентные нормы*

(i) $\left(\int_0^\delta t^{-\alpha/r} K(t, x; E; \mathcal{D}(A^r))^q \, \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$;

(ii) $\|x\|_E + \left(\int_0^\delta (t^{-2\alpha}\omega_r(t^r, x))^q \, \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$;

(iii) $\|x\|_E + \left(\int_0^\delta (t^{-2\alpha}\|(C(t, A) - I)^r x\|)^q \, \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$.

Если $A \in C(M, 0)$, то в предыдущей Теореме можно положить $\delta = \infty$.

Следствие 4.3.1 ([165]). *В условиях предыдущей Теоремы имеем*

(i) $C(t, A)(E, \mathcal{D}(A^r))_{\theta,q} \subseteq (E, \mathcal{D}(A^r))_{\theta,q}$, $\quad t \in \mathbb{R}_+$, $0 < \alpha < r$, $1 \leqslant q < \infty$ *(или* $0 \leqslant \alpha \leqslant r$, $q = \infty$*);*

(ii) $S(t, A)(E, \mathcal{D}(A^r))_{\frac{\alpha}{r},q} \subseteq (E, \mathcal{D}(A^r))_{\frac{\alpha+1/2}{r},q}$, $\quad t \in \mathbb{R}_+$, $0 < \alpha < r - 1/2$, $1 \leqslant q < \infty$ *(или* $0 \leqslant \alpha \leqslant r - 1/2$, $q = \infty$*);*

Предложение 4.3.6 ([165]). *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M, 0)$. *Тогда*

(i) $(E, \mathcal{D}(A^r))_{\frac{\alpha}{r},1} \subseteq \mathcal{D}((-A)^\alpha) \subseteq (E, \mathcal{D}(A^r))_{\frac{\alpha}{r},\infty}$, *если* $r \in \mathbb{N}, 0 < \alpha < r$*;*

(ii) $(E, \mathcal{D}(A^\beta))_{\theta,q)} \subseteq (E, \mathcal{D}(A^r))_{\frac{\alpha}{r},q}$, *если* $r \in \mathbb{N}, 0 < \alpha < \beta \leqslant r, 1 \leqslant q \leqslant \infty, \theta = \alpha/r$, *поскольку класс Фавара* $(E, \mathcal{D}((-A)^\alpha))_{1,\infty}$ *состоит из элементов с нормой*

$$\|x\| + \sup_{\varepsilon>0} \|\frac{1}{C_{\alpha,r}} \int_\varepsilon^\infty t^{-2\alpha}(C(t, A) - I)^r \frac{dt}{t}\|_E.$$

В частности, $\mathcal{D}((-A)^\beta)$ *плотно в* $(E, \mathcal{D}(A^r))_{\frac{\alpha}{r},q}$ *при* $0 < \alpha < \beta \leqslant r, 1 \leqslant q < \infty$.

Пусть $(E, \mathcal{D}(A^r))^o_{\frac{\alpha}{r},q}$ обозначает замыкание $\mathcal{D}(A^r)$ в $(E, \mathcal{D}(A^r))_{\frac{\alpha}{r},q}$.

Следствие 4.3.2 ([165]). *Элемент* $x \in (E, \mathcal{D}(A^r))^o_{\frac{\alpha}{r},q}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant r, r \in \mathbb{N}$, *тогда только тогда, когда* $\lim_{t\to 0+} \|(C(t, A) - I)x\|_{(E,\mathcal{D}(A^r))_{\frac{\alpha}{r},q}} = 0$.

Предложение 4.3.7. *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M, 0)$. *Тогда*

(i) если $x \in (E, \mathcal{D}(A^r))_{\frac{\alpha}{r},q}$ *с* $0 < \alpha < r, 1 \leqslant q < \infty$ *(или* $0 \leqslant \alpha \leqslant r, q = \infty$*),* $r \in \mathbb{N}$, *то*

$$\|(C(t, A) - I)^r x\|_E = O(t^{2\alpha}), \quad t \to 0+. \qquad (4.5)$$

Обратно, если (4.5) выполняется, то $x \in (E, \mathcal{D}(A^r))_{\frac{\alpha}{r},\infty}$*;*

(ii) при $0 < \alpha < r, r \in \mathbb{N}$*, элемент* $x \in (E, \mathcal{D}(A^r))^o_{\frac{\alpha}{r},\infty}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\|(C(t,A) - I)^r x\|_E = o(t^{2\alpha}), \quad t \to 0+ . \tag{4.6}$$

В [129] установлено, что для $A \in \mathcal{C}(M, 0)$ из $x \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ следует $sin(\sqrt{A}t)x \in \mathcal{D}(A^{\gamma})$, $0 < \gamma < 1/2$, и

$$\|A^{\gamma} \sin(\sqrt{A}t)x\| \leqslant ct^{1-2\gamma}\|\sqrt{A}x\|.$$

Предложение 4.3.8. *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M, 0)$ *и* E *рефлексивно. Тогда*

$$S(t,A)(E, \mathcal{D}(A))_{1/2,\infty} \subseteq \mathcal{D}(A), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Обозначим, как и в предыдущем разделе, $E^-_{\alpha,\beta}, E^+_{\alpha,\beta}$ подпространства, связанные с $C(\cdot, A)$ как для C_0 групп ранее, т.е. пространства дробных прозводных.

Предложение 4.3.9 ([129])**.** *Пусть* $\alpha \geqslant 0, \alpha \neq k + 1/2$, $k \in \mathbb{N}_0$*. Тогда*

$$E^-_{2\alpha,\beta}, E^+_{2\alpha,\beta} \subseteq \mathcal{D}((bI - A)^{\alpha}), \quad \beta, b > \omega_c(A). \tag{4.7}$$

В случае $\alpha = k + 1/2$, $k \in \mathbb{N}_0$, включение (4.7) может нарушаться.

Как уже отмечалось, проблема квадратного корня из оператора восходит к Т. Като [212].

Теорема 4.3.2 ([129])**.** *Пусть* $E = L^p(X, \Sigma, \mu)$ *с* $1 < p < \infty, A \in \mathcal{C}(M, \omega)$ *и* $u^0 \in \mathcal{D}((bI - A)^{\alpha})$, $u^1 \in \mathcal{D}((bI - A)^{\gamma})$, $\gamma = \max\{\alpha - 1/2, 0\}$*. Тогда для решения задачи (3.1) имеем*

(i) если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$*, то* $\|u(t) - u(0)\| = O(t^{2\alpha})$*,* $t \to 0+$ *;*

(ii) если $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$*, то* $u(\cdot)$ *непрерывно дифференцируема и* $\|u'(t) - u'(0)\| = O(t^{2\alpha-1})$*,* $t \to 0+$ *;*

Для получения утверждения Теоремы в общем банаховом пространстве E нужна дополнительная гладкость, т.е. $u^0 \in \mathcal{D}((bI - A)^{\alpha+\delta})$, $u^1 \in \mathcal{D}((bI - A)^{\gamma})$, $\gamma = max\{\alpha + \delta - 1/2, 0\}$ при каком-нибудь $\delta > 0$.

Определение 4.3.1. Для оператора $A \in \mathcal{C}(E)$ положим

$$\widetilde{\mathcal{D}(A)}^E := \{x \in E : \exists \{x_n\} \subseteq \mathcal{D}(A) \text{ такая, что } \|x_n\|_{\mathcal{D}(A)} \leqslant M \text{ и } \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_E = 0\}.$$

В теории полугрупп операторов $\widetilde{\mathcal{D}(A)}^E$ есть класс Фавара (класс насыщения).

Предложение 4.3.10. *Пусть $A \in \mathcal{C}(E)$. Тогда при $t \to 0+$*

$$K(t, x; E, \mathcal{D}(A)) = \begin{cases} O(t) & \text{при } x \in \widetilde{\mathcal{D}(A)}^E, \\ o(t) & \text{при } x \in \mathcal{N}(A). \end{cases}$$

Кроме того, если E рефлексивно, то $\mathcal{D}(A) = \widetilde{\mathcal{D}(A)}^E$.

Положим $C_t^\beta[C(\cdot, A)] = \frac{\beta}{t^\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} C(s, A)\, ds$.

Предложение 4.3.11. *Пусть $A \in \mathcal{C}(M, \omega)$. Тогда для $0 < \alpha \leqslant 2$ следующие условия эквивалентны:*
(i) $\|C_t^\alpha[C(\cdot, A)]x - x\|_E = O(t^\alpha), \quad t \to 0$;
(ii) $K(t^\alpha, x, E; \mathcal{D}(A)) = O(t^\alpha), \quad t \to 0$.
Кроме того, условие $x \in \mathcal{N}(A)$ эквивалентно тому, что $\|C_t^\alpha[C(\cdot, A)]x - x\|_E = o(t^2)$, $t \to 0$.

В обозначениях $u'' = (A - c^2 I)u(t) = B^2 u(t)$, $u(0) = x, u'(0) = y$ при $c = 0$ имеем следующее утверждения.

Теорема 4.3.3 ([119]). *Пусть $x \in E$ таков, что $\|C(t, A)x - x\| = o(t^2)$ при $t \to 0$. Тогда $x \in \mathcal{D}(B^2)$ и $B^2 x = 0$. Насыщение $\|C(t, A)x - x\| = O(t^2)$, $t \to 0+$, имеет место тогда и только тогда, когда $x \in \widetilde{\mathcal{D}(B^2)}^E$. Если E рефлексивно, то $\widetilde{\mathcal{D}(B^2)}^E = \mathcal{D}(B^2)$.*

Обозначим $V(t)x = \frac{1}{t} \int_0^t C(s, A) x ds$.

Теорема 4.3.4 ([119]). *Пусть $x \in E$ таков, что $\|V(t)x - x\| = o(t^2)$, $t \to 0+$. Тогда $x \in \mathcal{D}(B^2)$ и $B^2 x = 0$. Насыщение $\|V(t)x - x\| = O(t^2)$, $t \to 0+$, имеет место тогда и только тогда, когда $x \in \widetilde{\mathcal{D}(B^2)}^E$.*

Если $c \neq 0$, то в теоремах о насыщении будет фигурировать оператор $B^2 + c^2 I$. Например,

Теорема 4.3.5 ([119]). *Пусть x и y таковы, что $\|t^{-1}(u(t) - x) - y\| = o(t^2)$, $t \to 0$. Тогда $x \in \mathcal{D}(B^2)$, $y \in \mathcal{D}(B^2)$, $(B^2 + c^2 I)x = (B^2 + c^2 I)y = 0$ и $u(t) = x + ty$. Кроме того, $\|t^{-1}(u(t) - x) - y\| = O(t^2)$, $t \to 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{D}(B^2)$, $(B^2 + c^2 I)x = 0$ и $y \in \widetilde{\mathcal{D}(B^2)}^E$.*

Предложение 4.3.12 ([249]). *Для $A \in \mathcal{C}(M,0)$ имеют место неравенства Ландау*

$$\|A^2x\|^4 \leqslant \frac{1024}{315}\|x\|^3\|A^4x\|,\ \|A^2x\|^4 \leqslant \frac{400}{49}\|x\|^2\|A^4x\|^2,$$
$$\|A^3x\|^4 \leqslant \frac{2880}{343}\|x\|\|A^4x\|^3.$$

Глава 5

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА C_0-КОСИНУС ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

Так же, как и для C_0-полугрупп, необходимые и достаточные условия того, что A порождает C_0-косинус оператор-функцию, формулируются в терминах условий на расположение спектра и оценок на резольвенту- см. [15]. Для узкого класса C_0-косинус оператор-функций в гильбертовом пространстве эти условия существенно опираются на расположение спектра – см. [209].

§ 5.1. Расположение спектра

Предложение 5.1.1 ([220]). *Пусть задана C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot,A)$. Тогда*

$$(i)\quad \operatorname{ch}\left(t\sqrt{\sigma(A)}\right) \subseteq \sigma\Big(C(t,A)\Big),\quad t\in\mathbb{R};$$

$$(ii)\quad \operatorname{ch}\left(t\sqrt{P\sigma(A)}\right) = P\sigma\Big(C(t,A)\Big),\quad t\in\mathbb{R};$$

$$(iii)\quad \operatorname{ch}\left(t\sqrt{R\sigma(A)}\right) \subseteq R\sigma(C(t,A)),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Предложение 5.1.2 ([3], [221]). *Если $\mu \in R\sigma(C(t,A))$ и $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - множество корней уравнения $\mu = e^{\lambda_n t}$, то $\lambda_{n_0} \in R\sigma(A)$ при некотором $n_0\in\mathbb{N}$ и $\lambda_n^2 \notin P\sigma(A)$ ни при каком $n\in\mathbb{N}$ и $\mu \in P\sigma(C(t,A)^*)$.*

Предложение 5.1.3 ([3], [220]). *Если $\mu \in C\sigma(C(t,A))$ и λ_n из Предложения 5.1.2, то $\lambda_n^2 \in C\sigma(A)\cup\rho(A)$. Возможен случай, когда $\lambda_n^2\in\rho(A)$ при всех $n\in\mathbb{N}$.*

Предложение 5.1.4 ([137], [180]). *Если $E = H$- гильбертово и $A \in \mathcal{C}(M, 0)$ или $C(\cdot, A)$ - семейство нормальных операторов, то*

$$\sigma(C(t, A)) = \operatorname{ch}\left(t\sqrt{\sigma(A)}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Предложение 5.1.5 ([102]). *Пусть C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ удовлетворяет условию (F) и $E = H$ - гильбертово. Тогда $\mu \in \rho(C(t, A))$ тогда и только тогда, когда $\{z^2 : \operatorname{ch}(zt) = \mu\} \subseteq \rho(A)$ и $\sup\{\|zR(z^2, A)\| : \operatorname{ch}(zt) = \mu\} < \infty$.*

Предложение 5.1.6 ([205]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(M, 0)$. Тогда*
(i) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_-$;
(ii) если $E \neq \{0\}$, то $\sigma(A) \neq \varnothing$;
(iii) спектр $\sigma(A)$ ограничен тогда и только тогда, когда $A \in B(E)$.

Банахово пространство E называется *наследственно неразложимым* (кратко H.I. пространством) если как только X_1 и X_2 — замкнутые бесконечномерные подпространства E и $\delta > 0$, то существуют единичные векторы $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ такие, что $\|x_1 - x_2\| < \delta$. По другому это свойство можно переформулировать так [145]: для любых двух бесконечномерных подпространств $X_1, X_2 \subset E$ таких что $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ следует незамкнутость $X_1 + X_2$.

Предложение 5.1.7 ([245]). *Пусть E является H.I. пространством и $A \in C(M, \omega)$. Тогда $\sigma(A)$ — либо конечное множество (возможно пустое) в $\mathbb{C}$ либо состоит из последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая либо сходится к некоторой точке $\mathbb{C}$, либо удовлетворяет условию $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\mu_n = -\infty$.*

Предложение 5.1.8 ([245]). *Пусть E является H.I. пространством и $\mathcal{C}(\cdot, A)$ не квазианалитичное C_0-косинус семейство операторов. Тогда $\sigma(A) \cap \mathbb{C} \neq \varnothing$.*

Предложение 5.1.9. *Пусть $A \in \mathcal{GR}(M, \omega)$. Тогда*
(i) спектр A лежит в полосе $-\omega < \operatorname{Re} z < \omega$ (см. рис.2);
(ii) оператор A^2 порождает C_0-косинус оператор-функцию по формуле $C(t, A^2) = \frac{1}{2}\Big(\exp(tA) + \exp(-tA)\Big)$, $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 5.1.10 ([13]). *Для $A \in \mathcal{C}(M, \omega)$ и соответствующего матричного оператора $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$, возникающего при сведении задачи Коши (3.1) к системе (3.5), справедливо соотношение*

$$\{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} = \sigma(A).$$

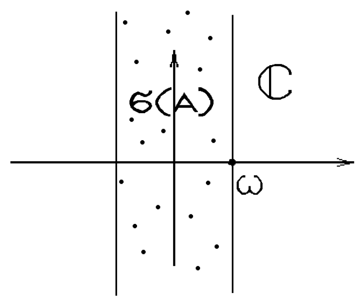

Рис. 2

Предложение 5.1.11 ([220]). *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$. *Тогда спектр* $\sigma(A)$ *лежит в некоторой параболе, направленной ветвями влево - см. Рис.3.*

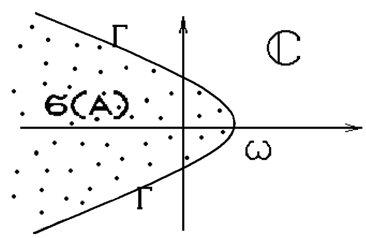

Рис. 3

Предложение 5.1.12 ([3]). *Существуют* C_0*-косинус оператор-функция* $C(\cdot,A)$ *и банахово пространство* E*, такие, что множества* $r_1 := \{t : 0 \in \rho(C(t,A))\}$, $r_2 := \{t : 0 \in P\sigma(C(t,A))\}$, $r_3 := \{t : 0 \in C\sigma(C(t,A))\}$*, плотны в* $\mathbb{R}$*, причем* $\mathbb{R} = r_1 \cup r_2 \cup r_3$.

Предложение 5.1.13 ([83]). *Для* C_0*-косинус оператор-функции*

$$C(t,A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k, \quad A \in \mathcal{B},$$

заданной в банаховой алгебре $\mathcal{B}$ *с единицей, имеем*

(i) $0 \leqslant \omega_c(A) < \infty$;

(ii) $\lambda R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t,A)\,dt$ *при* $Re\lambda > \omega_c(A)$;

(iii) $R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t,A)\,dt$ *при* $Re\lambda > \omega_c(A)$;

(iv) $C(t,A)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}\lambda(\lambda^2I-A)^{-1}\,d\lambda, \quad t\in\mathbb{R};$

(v) $S(t,A)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}(\lambda^2I-A)^{-1}\,d\lambda, \quad t\in\mathbb{R},$

где γ- *некоторый контур, охватывающий спектр оператора* $A\in\mathcal{B}$.

Предложение 5.1.14 ([83]). *В условиях Предложения 5.1.13 имеем*

$$\omega_c(A)^2=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}(|\lambda|+\operatorname{Re}\lambda)/2.$$

Теорема 5.1.1 ([103]). *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) $1\in\rho(C(2\pi,A))$;

(ii) $-\mathbb{N}_0^2\subseteq\rho(A)$ *и последовательности*

$$R_N=\frac{1}{N}\Sigma_{n=0}^{N-1}\Sigma_{k=-n}^{n}(-k^2I-A)^{-1}$$

и

$$S_N=\frac{1}{N}\Sigma_{n=0}^{N-1}\Sigma_{k=-n}^{n}A(-k^2I-A)^{-1}$$

ограничены в $B(E)$;

(iii) $-\mathbb{N}_0^2\subseteq\rho(A)$ *и существуют пределы*

$$Rx:=s\text{-}\lim_{N\to\infty}R_Nx \quad \text{и} \quad Sx:=s\text{-}\lim_{N\to\infty}S_Nx \tag{5.1}$$

при всех $x\in E$.

Теорема 5.1.2 ([103]). *Пусть* $A\in\mathcal{C}(M,\omega)$. *В гильбертовом пространстве* $E=H$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $1\in\rho(C(2\pi;A))$;

(ii) $-\mathbb{N}_0^2\subseteq\rho(A)$ *и* $\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|k(-k^2I-A)^{-1}\|<\infty$.

Глава 6

РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫЕ C_0-КОСИНУС ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ

В данной главе собраны утверждения, которые так или иначе связаны с ограниченностью косинус оператор-функций, хотя иногда рассматриваются полиномиально, а иногда и экспоненциально растущих косинус оператор-функции. Дело здесь в том, что асимптотическое поведение разрешающих семейств для уравнений второго порядка отличается от асимптотического поведения полугрупп операторов и представление $C(t,A)=\frac{1}{2}\Big(\exp(t\sqrt{A})+\exp(-t\sqrt{A})\Big)$ не всегда имеет место.

§ 6.1. Поведение C_0-косинус оператор-функций на бесконечности

Как уже отмечалось, ограниченность C_0-косинус оператор-функций свойство, не приобретаемое, вообще говоря, сдвигом генератора $A_b = A + bI$.

Предложение 6.1.1 ([142]). *Существуют такие операторы $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$, что при любом числе $b \in \mathbb{R}$ оператор $A + b \cdot I$ не порождает равномерно ограниченную C_0-косинус оператор-функцию.*

Уравнению косинуса (i) со стр. 29 соответствует как экспоненциально растущий гиперболический косинус $\mathrm{ch}(t)$, так и ограниченная обычная функция $cos(t)$. В общем случае для C_0-косинус оператор-функции возможен и полиномиальный рост по t. Так, например,

Пример 6.1.1 ([206]). Пусть $E = \mathbb{R}^2$. Тогда $C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, – есть C_0-косинус оператор-функция в E (т.е. выполнено (i) со стр. 29). Если на E задана эвклидова норма, то

$$\|C(t)\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В условиях предыдущего примера для любого $\omega > 0$ найдется $M_\omega \geqslant 1$ такое, что $\|C(t)\| \leqslant M_\omega \,\mathrm{ch}(\omega t)$, $t \in \mathbb{R}$, но $C(\cdot)$ не ограничена на $\mathbb{R}$.

Заметим попутно, что Пример 6.1.1 описывает как раз тот случай, когда возникает вопрос о представимости $C(\cdot)$ в виде полусуммы двух экспоненциальных функций [106].

Пример 6.1.2 ([116]). Пусть A - оператор в пространстве $C^1([a,b])$, определенный формулой

$$(Af)(s) := sf(s), \quad s \in [a,b].$$

Тогда A является генератором C_0-семейства косинус-оператор функции $(C(t,A)f)(s) = h(s,t)f(s)$, $s \in [a,b]$, $t \in \mathbb{R}$, где $h(s,t) = \cos(t\sqrt{-s})$, $s \in [a,b]$, $t \in \mathbb{R}$. Норма этой C_0-косинус оператор функции равна

$$\|C(t,A)\| = \max\Big\{ \sup_{s\in[a,b]} |h(s,t)|, \sup_{s\in[a,b]} \Big|\frac{d}{ds}h(s,t)\Big| \Big\}$$

и допускает оценку

$$\|C(t_n,A)\| \geqslant c(1 + |t_n|)$$

с некоторыми $\{t_n\}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, и константой $c > 0$.

Таким образом, спектр оператора A совпадает с отрезком $[a, b]$, и для любых $a, b < 0$ норма $\|C(t, A)\|$ не ограничена на $\mathbb{R}$.

Пример 6.1.3 ([116])**.** Пусть A - оператор в пространстве $L^1(\mathbb{R})$, определенный формулой

$$(Af)(s) := \left(\frac{d}{ds}\right)^2 f(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Тогда A является производящим оператором C_0-косинус-оператор функции

$$(C(t, A)f)(s) = \frac{1}{2}\Big(f(t+s) + f(t-s)\Big), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

При этом C_0-полугруппа, порожденная оператором A, допускает оценку

$$\|\exp(zA)\| \leqslant \left(\frac{|z|}{Re(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{при любом } z \text{ с } \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Пример 6.1.4 ([116])**.** Пусть A - оператор в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$, определенный формулой

$$(Af)(s) := \Delta f(s), \quad s \in \mathbb{R}^d, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Тогда A, вообще говоря, является генератором C_0-косинус-оператор функции $C(\cdot, A)$ только в случае $p = 2$. При этом C_0-полугруппа, порожденная оператором A, допускает оценку

$$\|\exp(zA)\| \leqslant \left(\frac{|z|}{Re(z)}\right)^{d|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|} \quad \text{при любом } z \quad \text{с} \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Теорема 6.1.1 ([116])**.** *Имеет место следующая импликация условий: (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii).*

(i) функция $C(\cdot, A)x$ имеет экспоненциальный тип меньший или равный ω при всех $x \in E$;

(ii) $\{z^2 : Rez > \omega\} \subseteq \rho(A)$ и при любом $\gamma > \omega$ существует константа $M = M(\gamma)$ такая, что

$$\|z(z^2 I - A)^{-1}\| \leqslant M \quad \textit{как только } Rez > \gamma;$$

(iii) Функция $C(\cdot, A)x$ имеет экспоненциальный тип, не превосходящий ω при всех $x \in D(A)$.

Теорема 6.1.2 ([116])**.** *Имеет место следующая импликация условий: (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii).*

(i) C_0-косинус оператор функция $C(\cdot, A)$ ограничена;

(ii) Существует такая константа M_1, что

$$\|\exp(zA)\| \leqslant M_1 \left(\frac{|z|}{Re(z)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \textit{при любом } z \textit{ с } \operatorname{Re} z \geqslant 0;$$

(iii) *Существует такая константа* M_2*, что*

$$\|C(t,A)x\| \leqslant M_2(\|x\| + t^2\|Ax\|), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D(A).$$

Попытка дать необходимые и достаточные условия равномерной ограниченности C_0-косинус оператор-функций была сделана в [105], но доказательство, как показал Bojadzhiev K., содержит ошибочные рассуждения.

§ 6.2. Равномерно ограниченные C_0-косинус оператор-функции

Определим для всех $x \in E$ и $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ оператор

$$F_a x := \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \left(\frac{sin(at)}{t} \right)^2 C(2t, A)x dt,$$

который, очевидно, является ограниченным при $A \in \mathcal{C}(M, 0)$.

Предложение 6.2.1 ([242])**.** *Пусть* $0 \leqslant a \leqslant b$*. Тогда*

$$F_a F_b x = F_b F_a x = 2 \int\limits_0^a F_u x du + (b-a) F_a x, \quad x \in E.$$

Предложение 6.2.2 ([242])**.** *Пусть при некоторых* $0 \leqslant a \leqslant b$ *выполняется равенство* $2 \int\limits_a^b F_t x dt = (b-a)(F_a x + F_b x)$ *при любых* $x \in E$*. Тогда открытый интервал* $(-b^2, -a^2) \subseteq \rho(A)$*.*

Предложение 6.2.3 ([242])**.** *Для оператора* F_a *при* $a \in \mathbb{R}_+$ *выполняются равенства*

$$F_a^k = (k-1)k \int\limits_0^a (a-t)^{k-2} F_t dt, \quad k = 2, 3, ...,$$

$$\exp(itF_a) = I + itF_a - t^2 \int\limits_0^a e^{it(a-s)} F_s \, ds.$$

Пусть C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ такова, что оператор

$$E_a x := s\text{-}\lim_{\alpha \to 0+} E_{a,\alpha} x :=$$

$$:= s\text{-}\lim_{\alpha \to 0+} \int\limits_{\alpha+i0}^{\alpha+ia} \Big(\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1} + \overline{\lambda} R(\overline{\lambda}^2 I - A)^{-1} \Big) x d\lambda \qquad (6.1)$$

(где $\lambda = \alpha + i\tau$) линеен и непрерывен при всех $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Предложение 6.2.4 ([242]). *Имеются примеры равномерно ограниченных C_0-косинус оператор-функций, для которых семейство $\{E_a\}$ из (6.1) не определено.*

Предложение 6.2.5 ([242]). *Пусть для C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$ определено семейство (6.1) и $E_a = E_b$ при некоторых $0 < a < b$. Тогда*

$$(-b^2, -a^2) \cap \Big(R\sigma(A) \cup P\sigma(A)\Big) = \varnothing.$$

Предложение 6.2.6 ([242]). *Пусть функция $E_{a,\alpha}x$ ограничена при $a \in [0, \overline{a}]$ и $\alpha \in [0, \overline{\alpha}]$ с любыми $\overline{a}, \overline{\alpha} \geqslant 0, \overline{\alpha} \neq 0$. Тогда при всех $x \in E$ и $a \in [0, \overline{a}]$ существует $E_a x$, оператор E_a ограничен и при всех $0 \leqslant a \leqslant b$ выполняется соотношение $E_a E_b = E_b E_a = \pi i E_a$, причем при почти всех $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ имеет место равенство $E_a x = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{sin(at)}{t} C(t, A)x dt$ в случае сходимости интеграла.*

Обозначим далее для $0 \leqslant a \leqslant b$ интервал $\Delta := (-b^2, -a^2)$ и $E_\Delta := E_b - E_a$.

Предложение 6.2.7 ([242]). *В условиях Предложения 6.2.6 для любых двух интервалов Δ_1 и Δ_2 имеем*

$$E_{\Delta_1} E_{\Delta_2} = E_{\Delta_2} E_{\Delta_1} = E_{\Delta_1 \cap \Delta_2}.$$

Предложение 6.2.8 ([242]). *Пусть $\|E_{\psi,\varphi}x\| \leqslant const$ при любых $\psi \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\varphi \in \mathbb{R}_+$, причем $E_a = E_b$ при некоторых $0 \leqslant a \leqslant b$. Тогда $(-b^2, -a^2) \subseteq \rho(A)$.*

Предложение 6.2.9 ([242]). *Пусть в условиях Предложения 6.2.6 функция $E_a x$ при любом $x \in E$ непрерывна в точке $a_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Тогда $-a_0^2 \notin R\sigma(A)$.*

Предложение 6.2.10 ([242]). *Пусть пространство E - рефлексивно и сильно выпукло с дифференцируемой по Гато нормой, $A \in \mathcal{C}(M, 0)$, а оператор $C(t, A)$ при любом $t \in R$ имеет вещественный спектр. Тогда $R\sigma(A) = \varnothing$.*

Предложение 6.2.11 ([12]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(1, 0)$ и $\mathcal{A}$ - оператор из Теоремы 3.2.1. Тогда при $t \in [\ln 2, \infty)$*

$$\|C'(t, A)\|_{B(E^1, E)} \leqslant t \cdot \ln 2, \ \|S(t, A)\|_{B(E, E^1)} \leqslant t + 1,$$

и резольвента $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ удовлетворяет оценке

$$\|R(\lambda; \mathcal{A})\| \leqslant (\operatorname{Re}\lambda - \ln 2)^{-1} \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re}\lambda > \ln 2.$$

Предложение 6.2.12 ([4], [5]). *Пусть* $0 \notin \sigma(A)$ *и* $A \in \mathcal{C}(M,0)$. *Тогда*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|S(t,A)\| \leqslant \frac{\pi}{2} dist\left(0, \sqrt{\sigma(A)}\right) \sup_{t\in\mathbb{R}} \|C(t,A)\|.$$

Предложение 6.2.13 ([4], [5]). *Для того, чтобы при* $A \in \mathcal{C}(M,0)$ *множество* $\{x \in E : \sup_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+} \|S(t,A)x\| < \infty\}$ *было плотно в* E, *необходимо и достаточно выполнения одного из условий:*

(i) $s\text{-}\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n R(\varepsilon_n, A)x = 0$ *для любого* $x \in E$ *и некоторой последовательности* $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_+$ *такой, что* $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$;

(ii) *множество* $\mathcal{R}(A)$ *плотно в* E ;

(iii) $\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$.

Предложение 6.2.14 ([105]). *Оператор* $A \in \mathcal{C}(M,0)$ *удовлетворяет условию (F) тогда и только тогда, когда для каждого отрезка* $[a,b]$ *выполняется условие*

$$\sup\left\{\| \exp(tG|_{D(G,\mu)})\| \, : \mu \in \mathbb{N}, t \in [a,b]\right\} < \infty.$$

Предложение 6.2.15 ([176]). *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,0)$. *Тогда оператор* iA *порождает* α*-раз проинтегрированную группу при* $\alpha > \frac{1}{2}$.

Предложение 6.2.16 ([137]). *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,0)$ *и* $E = H$. *Тогда существует самосопряженный оператор* Q *и константа* $M > 0$ *такие, что* $(\sqrt{3}(2M+1))^{-1}I \leqslant Q \leqslant MI$ *и оператор* $QC(t,A)Q^{-1}$ *является самосопряженным при каждом* $t \in \mathbb{R}$. *При этом* $C(t,A) = Q^{-1}cos(tL)Q$ *и* $L^* = L \leqslant 0$, *где* $L := QAQ^{-1}$.

Предложение 6.2.17 ([144]). *При* $A \in \mathcal{C}(M,0)$, $x \in D(A)$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+} \|S(t,A)Ax\|^2 \leqslant 4 \sup_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+} \|C(t,A)Ax\| \cdot \sup_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+} \|C(t,A)x\|.$$

Предложение 6.2.18 ([205]). *Пусть* $A \in \mathcal{C}(1,0)$, *и*

$$C_m(t) := \sum_{j=0}^{m} C_{2m}^{2j} \left(\frac{t}{2m}\right)^{2j} A^j \left(\frac{2m}{t}\right)^{4m} \left((\frac{2m}{t})^2 I - A\right)^{-2m},$$

где C_{2m}^{2j} *- биномиальные коэффициенты.*

Тогда $\lim_{m\to\infty} C_m(t)x = C(t,A)x$ *для всех* $x \in E$ *и* $\|\Big(C_m(t) - C(t,A)\Big)x\| \leqslant t^2\|Ax\|/\sqrt{m}$ *для всех* $x \in D(A),\ m \geqslant 2$.

Предложение 6.2.19 ([220])**.** *Функции* $C(\cdot,A)x$ *и* $S(\cdot,A)x$ *равномерно ограничены при любом* $x \in E$ *тогда и только тогда, когда существует константа* $M \geqslant 1$ *такая, что при* $\operatorname{Re} z \geqslant \omega$

$$\left\|\frac{d^k}{dz^k}(z^2I - A)^{-1}\right\|,$$

$$\left\|z\frac{d^k}{dz^k}R(z^2I-A)^{-1} + k\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z^2I-A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{Mk!}{|z|^{k+1}},$$

$$k \in \mathbb{N}.$$

Предложение 6.2.20 ([176])**.** *Пусть оператор* A *порождает* C_0*-косинус оператор функцию, такую, что для* $S(\cdot,A)$ *- соответствующей* C_0*-синус оператор функции, имеет место оценка* $\|S(t,A)\| \leqslant Mt,\ t \in \overline{\mathbb{R}_+}$*. Тогда оператор* iA *порождает* α*-раз проинтегрированную полугруппу при* $\alpha > \frac{3}{2}$.

§ 6.3. Асимптотика функций $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$

В этом разделе изучается асимптотическое поведение C_0-семейств $F(t)$ и $G(t)$ при $t \to \infty$. Рассмотрим ситуацию в предположении существования вещественного λ_0 и отличного от нуля ограниченного оператора $P \in B(E)$ таких, что

$$\lim_{t\to\infty} 2e^{-\lambda_0 t}\ C(t,A)x = Px \quad \text{для всех} \quad x \in E. \tag{6.2}$$

Ясно, что в этом случае найдется константа $M_1 \geqslant 1$ такая, что

$$\|C(t,A)\| \leqslant M_1 e^{\lambda_0 t} \quad \text{при} \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{6.3}$$

В силу тождества

$$2e^{-\lambda_0 2t}(C(2t,A)+I) = 2e^{-\lambda_0 t}C(t,A)2e^{-\lambda_0 t}C(t,A) \tag{6.4}$$

в случае (6.2) число λ_0 не может быть отрицательным, т.к. тогда $e^{-\lambda_0 2t} \to \infty$ при $t \to \infty$ и сходимости нет.

В случае $\lambda_0 = 0$, мы имеем из (6.4) $P + 2I = P^2$. С другой стороны, полагая $t \to \infty$ и $s \to \infty$ в уравнении косинуса (см. (i) на стр. 29), имеем $2P = P^2$. Следовательно, $C(t,A) \to P/2 = I$ при $t \to \infty$. Полагая $t \to \infty$ в равенстве (i) со стр. 29, получим $C(s,A) = I$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Заметим в связи с этими простыми рассуждениями, что в [78] сделано бессодержательное допущение о сходимости $C(t,A)$ к P при $t\to\infty$.

Отметим попутно, что в случае $C(t,A)\to P$ при $t\to\infty$ из (iv) Предложения 2.4.1 следует, что $F(t)x = 2^{-1}t^2\lambda^3\hat{F}(\lambda)x$ (для любого $\lambda>\omega$), который не сходится при $t\to\infty$, если $x\notin\mathcal{N}(\hat{F}(\lambda))$. Та же самая ситуация - для $G(\cdot)$.

Таким образом, случай $\lambda_0=0$ не интересен, и мы будем считать далее, что $\lambda_0>0$. Из (6.4) ясно, что оператор P - есть проектор.

Известно, что генератор C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot,A)$ порождает также C_0-полугруппу $\exp(\cdot A)$, определенную формулой (2.12).

Как будет показано в следующей теореме, сходимость $2e^{-\lambda_0 t}\ C(t,A)$ к P при $t\to\infty$ влечет сходимость $e^{-\lambda_0^2 t}\exp(tA)$ к P в той же самой топологии.

Теорема 6.3.1. *Пусть условие (6.2) выполняется с* $\lambda_0\in\mathbb{R}_+$. *Тогда* P *- проектор с областью значения* $\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(\lambda_0^2I-A)$ *и ядром* $\mathcal{N}(P)=\overline{\mathcal{R}(\lambda_0^2I-A)}$. *Если, кроме того,* P *имеет конечный ранг и* $\|2e^{-\lambda_0 t}C(t,A)-P\|\to 0$ *при* $t\to\infty$, *тогда* $\lambda_0^2>E\omega(A)$, $B\sigma(A)=\ \{\lambda_0^2\ \}$ *и* λ_0^2 *- простой полюс резольвенты* $(\lambda I-A)^{-1}$.

Доказательство. Мы докажем, что C_0-полугруппа $e^{-\lambda_0^2 t}\exp(tA)$ сходится к P сильно при $t\to\infty$. Тогда из эргодической теоремы (см. [73]) следует, что P - проектор с $\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(\lambda_0^2I-A)$ и $\mathcal{N}(P)=\overline{\mathcal{R}(\lambda_0^2I-A)}$.

Имеем

$$e^{-\lambda_0^2 t}\exp(tA)x=$$

$$=\frac{e^{-\lambda_0^2 t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}}e^{\lambda_0 s}\left(2e^{-\lambda_0 s}C(s,A)-P\right)x\,ds+$$

$$+\frac{e^{-\lambda_0^2 t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}}e^{\lambda_0 s}\,dsPx.$$

Первый член $Q_1(t)$ справа сходится к нулю, а второй член $Q_2(t)$ – к Px при $t\to\infty$. Действительно,

$$\frac{e^{-\lambda_0^2 t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}}e^{\lambda_0 s}ds=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{(s-2\lambda_0 t)^2}{4t}}ds=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\lambda_0\sqrt{t}}^\infty e^{-u^2}du$$

сходится к $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = 1$ при $t \to \infty$. Поэтому $Q_2(t)$ сходится к Px при $t \to \infty$.

Пусть $\epsilon > 0$ достаточно мало и пусть $\tau \in \mathbb{R}_+$ настолько велико, что $\|2e^{-\lambda_0 s}C(s,A)x - Px\| \leqslant \epsilon$ для всех $s \geqslant \tau$. Тогда величина

$$\|Q_1(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-\lambda_0^2 t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\tau} e^{-\frac{s^2}{4t}}e^{\lambda_0 s}\|(2e^{-\lambda_0 s}C(s,A) - P)x\|ds +$$

$$+\epsilon\frac{e^{-\lambda_0^2 t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}}e^{\lambda_0 s}ds\|x\|,$$

и, следовательно, ограничена константой 2ϵ при $t \to \infty$. Т.е. $Q_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Если $\|2e^{-\lambda_0 t}C(t,A) - P\| \to 0$ при $t \to \infty$, то подобным же образом доказывается, что $\|e^{-\lambda_0^2 t}\exp(tA) - P\| \to 0$ при $t \to \infty$. Когда P имеет конечный ранг, полугруппа $\exp(\cdot A)$ выходит на предел с показателем роста λ_0^2. Из Теоремы в [288] следует, что $\lambda_0^2 > E\omega(A)$, $B\sigma(A) = \{\lambda_0^2\}$, и λ_0^2 - простой полюс резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$.

Нам понадобится следующая

Лемма 6.3.1 (см. [15], Лемма 7.3.1)**.** *Если сильно непрерывная функция $f(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \to E$ - такова, что $\lim_{t\to\infty} f(t) = \varphi$, $\varphi \in E$, то для любого λ с $Re\lambda > 0$ мы имеем*

$$e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}f(s)\,ds \ \to \varphi/\lambda \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \tag{6.5}$$

Предложение 6.3.1. *Пусть C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot,A)$ удовлетворяет (6.2) с $\lambda_0 > 0$. Тогда $2e^{-\lambda_0 t}S(t,A) \to P/\lambda_0$ и $2e^{-\lambda_0 t}\int_0^t S(s,A)ds \to P/\lambda_0^2$ сильно при $t \to \infty$.*

Доказательство. Имеют место равенства

$$2e^{-\lambda_0 t}S(t,A) = e^{-\lambda_0 t}\int_0^t e^{\lambda_0 s}2e^{-\lambda_0 s}C(s,A)ds$$

и

$$2e^{-\lambda_0 t}\int_0^t S(s,A)ds = e^{-\lambda_0 t}\int_0^t e^{\lambda_0 s}e^{-\lambda_0 s}\int_0^s e^{\lambda_0 \eta}2e^{-\lambda_0 \eta}C(\eta,A)d\eta ds.$$

Утверждение теперь следует из Леммы 6.3.1.

Теорема 6.3.2 ([236]). *Пусть C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ удовлетворяет условию (6.2) с $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$. Тогда для каждого $\lambda > \lambda_0$ и $x \in E$ мы имеем*

$$s\text{-}\lim_{t\to\infty} 2e^{-\lambda_0 t}F(t)x = \lambda(\lambda^2/\lambda_0^2 - 1)P\hat{F}(\lambda)x,$$

который равен $\dfrac{1}{\lambda_0^2}(A_s - A)x$, если $x \in D(A)$ и $\hat{F}(\lambda)x \in \mathcal{N}(\lambda_0^2 I - A)^{-1}$ одновременно, и равен нулю, если $\hat{F}(\lambda)x \in \overline{\mathcal{R}(\lambda_0^2 I - A)^{-1}}$.

Доказательство. Для $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ запишем равенство

$$2e^{-\lambda_0 t}F(t)x = 2e^{-\lambda_0 t}\int_0^t S(s,A)\lambda^3\hat{F}(\lambda)x ds - 2e^{-\lambda_0 t}(C(t,A)-I)\lambda\hat{F}(\lambda)x.$$

Используя Предложение 6.3.1, Предложение 2.4.1 (iv) и полагая $t \to \infty$, мы получаем доказываемый результат.

Аналогично, используя Предложение 6.3.1 и Предложение 2.4.1 (v), получаем

Теорема 6.3.3 ([236]). *Пусть C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ удовлетворяет условию (6.2) с $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$. Тогда для каждого $\lambda > \lambda_0$ и $x \in E$ имеем*

$$\lim_{t\to\infty} 2e^{-\lambda_0 t}G(t)x = \hat{G}(\lambda)\lambda(\lambda^2/\lambda_0^2 - 1)Px,$$

который равен $\frac{1}{\lambda_0^2}(A_c - A)x$, если $x \in \mathcal{N}(\lambda_0^2 I - A)^{-1}$, и равен нулю, если $x \in \overline{\mathcal{R}(\lambda_0^2 I - A)^{-1}}$.

Как упоминалось выше, если $C(t, A)$ сходится сильно при $t \to \infty$, то $C(\cdot, A) \equiv I$, и $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ растут. Далее мы будем рассматривать поведение $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ в предположении, что

$$\sup_{t>0} \|t^{-2}\int_0^t\int_0^s C(u,A)\ du\ ds\| < \infty \ \text{ и } \ t^{-2}C(t,A) \to 0 \qquad (6.6)$$

сильно при $t \to \infty$. Нам понадобится следующее

Предложение 6.3.2 ([255]). *При выполнении предположения (6.6) мы имеем:*

(i) *отображение $P : x \to \lim_{t\to\infty} 2t^{-2}\int_0^t\int_0^s C(u,A)x\, du\, ds$ - есть проектор с $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(P) = \overline{\mathcal{R}(A)}$ и $D(P) = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$;*

(ii) *$x := -\lim_{t\to\infty} 2t^{-2}\int_0^t\int_0^s\int_0^u\int_0^v C(\tau,A)y\ d\tau\ dv\ du\ ds$ существует, тогда и только тогда, когда $y \in A(D(A) \cap \overline{\mathcal{R}(A)})$ ($= \mathcal{R}(A)$ в случае, если $C(\cdot, A)$ - (C,2)-эргодична, то есть $D(P) = E$). Кроме того, этот элемент x - единственное* *решение уравнения $Ax = y$ в $\overline{\mathcal{R}(A)}$, то есть $x = \tilde{A}^{-1}y$, где $\tilde{A} = A|_{\overline{\mathcal{R}(A)}}$.*

Используя Предложение 2.4.1 (iv) и вышеупомянутое Предложение, мы получаем

Теорема 6.3.4 ([236]). *В предположении (6.6) справедливы следующие утверждения:*

(i) *предел $y = \lim_{t\to\infty} 2t^{-2}F(t)x$ существует, тогда и только тогда, когда $\hat{F}(\lambda)x \in \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$ для некоторого (и всех) $\lambda > \omega$. Когда предел существует, то $y = \lambda^3 P\hat{F}(\lambda)x$ и не зависит от λ;*

(ii) *Для $\hat{F}(\lambda)x \in \mathcal{N}(A)\oplus\overline{\mathcal{R}(A)}$, $z = \lim_{t\to\infty} 2t^{-2}\int_0^t\int_0^s F(\tau)x\,d\tau ds$ существует если и только если $\hat{F}(\lambda)x \in A(D(A)\cap\mathcal{R}(A))$ для некоторого (и всех) $\lambda > \omega$. В этом случае, $z = -\lambda(\lambda^2 I - A)\tilde{A}^{-1}\hat{F}(\lambda)x$, который не зависит от λ.*

Доказательство. Из (iv) Предложения 2.4.1 мы имеем

$$\frac{2}{t^2}F(t)x = \frac{2}{t^2}(I - C(t,A))\lambda\hat{F}(\lambda)x + \\ + \frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s C(\tau,A)\lambda^3\hat{F}(\lambda)x\,d\tau ds, \tag{6.7}$$

и

$$\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s F(\tau)xd\tau ds = \\ = \frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s\int_0^u\int_0^v C(\tau,A)\lambda^3\hat{F}(\lambda)x\,d\tau dv du ds - \\ -\frac{2}{t^2}\int_0^t\int_0^s C(\tau,A)\lambda\hat{F}(\lambda)x\,d\tau ds + \lambda\hat{F}(\lambda)x. \tag{6.8}$$

Тогда утверждения (i) и (ii) следуют из (6.7) и (6.8) соответственно, как следствия Предложения 6.3.2.

В силу Предложения 2.4.1 (v), Предложения 6.3.2 и Предложения 2.4.2 (ii), имеем следующую теорему:

Теорема 6.3.5. *В предположении (6.6) имеют место следующие утверждения:*

(i) *Если $x \in \mathcal{N}(A)\oplus\overline{\mathcal{R}(A)}$, то*

$$s\text{-}\lim_{t\to\infty} 2t^{-2}G(t)x = A_c Px;$$

(ii) *Если* $x \in A(D(A) \cap \mathcal{R}(A))$, *тогда*

$$s\text{-}\lim_{t\to\infty} 2t^{-2} \int_0^t \int_0^s G(\tau)x \; d\tau ds = -(A_c - A)\tilde{A}^{-1}x = x - A_c\tilde{A}^{-1}x,$$

где $\tilde{A} = A|_{\overline{\mathcal{R}(A)}}$.

Глава 7

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Эргодические свойства C_0-полугрупп операторов рассмотрены, например, в [15], [18], [64], [73].

§ 7.1. Стандартные пределы

Предложение 7.1.1 ([144]). *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,0)$. *Для любого* $x = y\dot{+}z \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T C(t,A)xdt - z \right\| = O\Big(|T|^{-1}\Big),$$

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T S(t,A)xdt - \frac{T}{2}z \right\| = O\Big(|T|^{-1}\Big) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Предложение 7.1.2 ([144]). *В случае* $A \in \mathcal{C}(M,0)$ *и рефлексивного* E *имеем* $E = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A)$, *причем для каждого* $x \in E$ *имеет место сильная сходимость величины* $\frac{1}{T}\int\limits_0^T C(t,A)x\,dt$ *к* x *при* $T \to \infty$.

Следующее определение для C_0-косинус оператор-функций аналогично Определению 7.1.8 из [15] $\rightsquigarrow$ стр. 69 для C_0-полугрупп.

Определение 7.1.1. C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется *слабо (сильно, равномерно)* (C,α) *эргодической на бесконечности*, если оператор $C_t^\alpha[C(\cdot,A)]x \;:= \alpha t^{-\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} C(s,A)x\,ds$ существует при всех $t > 0$; $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \|C_t^\alpha[C(\cdot,A)]x\| dt \; < \infty$ при всех $x \in E$ и $\lambda > \max(0,\omega(A))$ И если предел $(C,\alpha)\text{-}\lim \exp(\cdot A) := \lim_{t\to\infty} CH(t,\alpha)$ существует в слабой (сильной, равномерной) операторной топологии. Это так называемый *предел по Чезаро*.

Определение 7.1.2. C_0-косинус оператор функция $C(\cdot, A)$ называется *слабо (сильно, равномерно) эргодической на бесконечности в смысле Абеля*, если предел

$$(A)\text{-}\lim_{t\to\infty} C(t,A) := \lim_{\lambda\to 0+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t,A)dt \equiv$$
$$\equiv \lim_{\lambda\to 0+} \lambda^2 R(\lambda^2, A) \qquad (7.1)$$

существует в соответствующей операторной топологии.

Полагая $t \to 0+$ вместо $t \to \infty$ или $\lambda \to \infty$ вместо $\lambda \to 0+$, получим определения эргодичности в нуле.

Теорема 7.1.1 ([73]). *Если при фиксированном $\alpha \geqslant 0$ существует предел $(C,\alpha)\text{-}\lim_{\xi\to\infty} x(\xi) = y \in E$, то при $\beta \geqslant \alpha$ существуют пределы $(C,\beta)\text{-}\lim_{\xi\to\infty} x(\xi) = A\text{-}\lim_{\xi\to\infty} x(\xi) = y$.*

Предложение 7.1.3 ([256]). *C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$, заданная на пространстве Гротендика E, является сильно $(C,1)$ эргодичной тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

(i) $\|S(t,A)\| = O(t)$ *при* $t \to \infty$;

(ii) $s\text{-}\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1} C(t,A)S(s,A) = 0$ *при всех* $s \in \mathbb{R}_+$;

(iii) $w^*\text{-}cl(\mathcal{R}(A^*)) = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$.

Предложение 7.1.4 ([256]). *В условиях Предложения 7.1.3 с пространством E, обладающим еще и свойством Данфорда - Петтиса, C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ является равномерно $(C,1)$ эргодичной тогда и только тогда, когда имеют место условие (i) из Предложения 7.1.3,*

$\|C(t,A)S(s,A)\| = O(t)$ *при* $t \to \infty$ *для каждого* $s \in \mathbb{R}_+$ *и, наконец,* $w^*\text{-}cl(\mathcal{R}(A^*)) = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$.

Положим $T(t,A) := \int_0^t (t-s)C(s,A)ds$ и определим $Q^2_{w^*}$ как на стр. 106.

Предложение 7.1.5 ([256]). *Пусть E — пространство Гротендика и $K(t,Q)$ - w^*-непрерывная C_0-косинус оператор-функция. Если $||T(t,A)|| = O(t^2)$ при $t \to \infty$ и $w^* - \lim\limits_{t\to\infty} t^{-2} K(t,Q)T(s)^* x^* = 0$ при всех $s \in \mathbb{R}_+$, то $\mathcal{R}(Q^2_{w^*}) = \mathcal{N}(Q)$, $\quad \mathcal{N}(Q^2_{w^*}) = \mathcal{R}(Q)$, $\quad D(Q^2_{w^*}) = E^*$.*

Более того, если $s\text{-}\lim\limits_{t\to\infty} t^{-2} K(t,Q)T(s)^* = 0$ при всех $s \in \mathbb{R}_+$, то C_0-косинус оператор-функция $K(\cdot, Q)$, сильно $(C,2)$ эргодична.

Предложение 7.1.6 ([256]). *C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ на пространстве Гротендика E является сильно $(C, 2)$ эргодичной тогда и только тогда, когда*

(i) $\|T(t, A)\| = O(t^2)$ *при* $t \to \infty$;

(ii) $s\text{-}\lim\limits_{t\to\infty} t^{-2} C(t, A) T(s, A) = 0$ *при всех* $s \in \mathbb{R}_+$;

(iii) $w^*\text{-}cl(\mathcal{R}(A^*)) = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$.

Предложение 7.1.7 ([256]). *Пусть в условиях Предложения 7.1.6 пространство E обладает свойством Данфорда - Петтиса. В этом случае C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ равномерно $(C, 2)$ эргодична тогда и только тогда, когда $||T(t)|| = O(t^2)$, $||C(t, A)T(s, A)|| = O(t^2)$ при $t \to \infty$ и $s \in \mathbb{R}_+$, а также $w^*\text{-}cl(\mathcal{R}(A^*)) = \mathcal{R}(A^*)$.*

Для любого $x \in E$ положим $P_c x := s\text{-}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} S(t, A)x$,

$$P_a x := s\text{-}\lim_{\lambda\to 0+} \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} C(t, A) x dt$$

и

$$P_t x := s\text{-}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C(kt, A)x \right).$$

Предложение 7.1.8 ([254]). *При $A \in \mathcal{C}(M, 0)$ операторы P_c и P_a совпадают и являются проекторами. Имеют место соотношения:*

$$\mathcal{R}(P_c) = \mathcal{N}(A) = \bigcap_{s>0} \mathcal{N}(C(s, A) - I),$$

$$\mathcal{N}(P_c) = \overline{\mathcal{R}(A)} = \overline{\bigcup_{s>0} \mathcal{R}(C(s, A) - I)},$$

$$D(P_c) = \bigcap_{s>0} \mathcal{N}\Big(C(s, A) - I\Big) \oplus \bigcup_{s>0} \mathcal{R}\Big(C(s, A) - I\Big) =$$

$$= \{x \in E : \exists\, \{t_n\}, t_n \to \infty,\ w\text{-}\lim_{n\to\infty} (S(t_n, A)x)/t_n \text{ существует}\}.$$

Предложение 7.1.9 ([254]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(M, 0)$. При каж-*

дом $t \in \mathbb{R}_+$ оператор P_t есть проектор и

$$\mathcal{R}(P_t) = \mathcal{N}(C(t,A) - I), \quad \mathcal{N}(P_t) = \overline{\mathcal{R}(C(t,A) - I)},$$
$$D(P_t) = \mathcal{N}(C(t,A) - I) \oplus \overline{\mathcal{R}(C(t,A) - I)} =$$
$$= \Big\{ x \in E : \exists \{n_k\}, n_k \to \infty,$$
$$w\text{-}\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{n_k} \sum_{l=0}^{n_k-1} C(lt,A)x \right) \quad \text{существует} \Big\}.$$

Предложение 7.1.10 ([254]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(M,0)$. Пусть существует $\delta > 0$ такое, что оператор $C(t,A) + I$ обратим при $t \in (0,\delta)$ (в частности, это имеет место если $\|C(t,A) - I\| < 2$ при $t \in (0,\delta)$). Тогда $P_t = P_c$ при всех $t \in (0, 2\delta)$.*

Рассмотрим оператор

$$H_t^\beta[C(\cdot,A)]x = \frac{\beta}{t^\beta} \int_0^t s^{\beta-1} C(s,A)x\, ds \qquad t > 0,\, x \in X. \qquad (7.2)$$

Теорема 7.1.2 ([175]). *Пусть $C(\cdot,A)$ – ограниченная C_0-косинус оператор функция в банаховом пространстве E. Следующие утверждения эквивалентны*

(i) $0 \in C\sigma(A) \cup \rho(A)$;

(ii) функция $C(\cdot,A)$ является H_t^β-устойчивой для всех $\beta > 0$;

(iii) $\lim_{n\to\infty} H_{t_n}^{\beta_0}[C(\cdot,A)] = 0$ в слабой операторной топологии для некоторого $\beta_0 > 0$ и некоторой положительной последовательности $\{t_n\}$ сходящейся к ∞.

Из доказательства этой теоремы ясно, что ограниченность $C(\cdot,A)$ не является необходимой для импликации *(iii)* $\Longrightarrow$ *(i)*.

Хорошо известно, что обобщенное решение абстрактной задачи Коши

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \qquad u(0) = x, \quad u'(0) = y$$

дается формулой $u(t) = C(t,A)x + S(t,A)y$.

Теорема 7.1.3 ([175]). *Пусть $C(\cdot,A)$ – ограниченная C_0-косинус оператор-функция в банаховом пространстве E и предположим, что $0 \in C\sigma(A) \cup \rho(A)$. Тогда обобщенное решение $u(t)$ H_t^β-устойчиво для всех $\beta > 0$, всех $x \in E$ и всех y из некоторого плотного подмножества E.*

Теорема 7.1.4 ([254]). *Пусть $C(\cdot,A)$ – ограниченная косинус оператор-функция в банаховом пространстве E и предположим, что $0 \in \rho(A) \cup C\sigma(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $y \in A\Big(D(A) \cap \overline{\mathcal{R}(A)}\Big)$*;*

(ii) $x := -\lim_{t\to\infty} 2t^{-2}\int_0^t\int_0^s\int_0^u\int_0^v C(\tau,A)y\ d\tau\ dv\ du\ ds$ *существует ;*

(iii) для некоторой последовательности $\{t_m\}$ *слабый предел* $x := -w\text{-}\lim_{t_m\to\infty} 2t_m^{-2}\int_0^{t_m}\int_0^s\int_0^u\int_0^v C(\tau,A)y\ d\tau\ dv\ du\ ds$ *существует.*

Такое x *есть единственное решение уравнения* $Ax = y$ *в* $\overline{\mathcal{R}(A)}$*, т.е.* $x = (\tilde{A})^{-1}y$*,, где* $\tilde{A} = A|_{\overline{\mathcal{R}(A)}}$*.*

Теорема 7.1.5 ([175])**.** *Пусть* $C(\cdot,A)$ *– ограниченная косинус оператор-функция в банаховом пространстве* E*. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $0 \in \rho(A) \cup C\sigma(A)$;

(ii) Для всех $\beta > 0$ *имеем* $s\text{-}\lim_{t\to\infty} C_t^\beta[C(\cdot,A)] = 0$;

(iii) Для некоторого $\beta_0 > 0$ *и некоторой положительной последовательности* $\{t_n\}$*, сходящейся к* ∞ *при* $n \to \infty$ *имеем* $w\text{-}\lim_{n\to\infty} C_{t_n}^{\beta_0}[C(\cdot,A)] = 0$*.*

Утверждение $\lim_{t\to\infty} C_t^\beta[u(\cdot)] = 0$, аналогичное Теореме 7.1.3, (для обобщенного решения $u(\cdot)$ уравнения второго порядка) может быть доказано тем же путем.

§ 7.2. Тауберова теорема

Как отмечалось, для косинус операторной функции $C(t,A)$ понятие устойчивости бессмысленно, поскольку из сходимости $C(t,A) \to P \in B(E)$ при $t \to \infty$ следует, что $C(t,A) \equiv I$. Ясно, что проинтегрированные полугруппы или косинус-функции не обладают свойствами асимптотической сходимости, потому что они естественно полиномиально возрастают [113].

С другой стороны, можно рассмотреть усреднение по Чезаро косинус операторных функций. Необходимым и достаточным условием того, что ограниченная косинус операторная функция является (C,β)-устойчивой при любом $\beta > 0$, т.е. $1/t^\beta\int_0^t s^{\beta-1}C(s)ds \to 0$ сильно при $t \to \infty$, является то, что $0 \in \rho(A) \cup C\sigma(A)$, как это мы видели в предыдущем параграфе. Поэтому поведение (C,β)-средних определяется только точкой 0. Известно, что по крайней мере для полиномиально ограниченных C_0-полугрупп поведение средних Чезаро определяется поведением резольвенты в окрестности нуля [167]. Теперь приступим к доказательству того, что для косинус операторных функций ситуация очень похожа.

Чтобы усмотреть как поведение средних Чезаро тесно связано с поведением резольвенты полиномиально ограниченной косинус операторной функции в окрестности нуля, рассмотрим основной пример $n \times n$ нильпотентной матрицы

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $Q^n = 0$ и $\operatorname{ch}(t\sqrt{Q}) = I + Q\dfrac{t^2}{2!} + \cdots + Q^{n-1}\dfrac{t^{2(n-1)}}{(2n-2)!}$; поэтому косинус операторная функция $\operatorname{ch}(t\sqrt{Q})$, $t \geqslant 0$, конечно, полиномиально ограничена. Резольвента Q задается как

$$\begin{aligned}(\lambda^2 I - Q)^{-1} &= \lambda^{-2}\left(I - \frac{Q}{\lambda^2}\right)^{-1} \\ &= \lambda^{-2}\left(I + \frac{Q}{\lambda^2} + \frac{Q^2}{\lambda^4} + \cdots + \frac{Q^{n-1}}{\lambda^{2(n-1)}}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, при $\alpha = 2n-2$, имеем

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda^{2+\alpha}(\lambda^2 I - Q)^{-1} = Q^{n-1}$$

и $\|\lambda^{2+\alpha}(\lambda^2 I - Q)^{-1}\| \leqslant n$ при всех $|\lambda| \leqslant 1$.

С точки зрения сходимости по Чезаро имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}} \int_0^t \operatorname{ch}(s\sqrt{Q})\,ds = \frac{Q^{n-1}}{(2n-1)!},$$

и, более общо,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\alpha+m}} \int_0^t (t-s)^{m-1} \operatorname{ch}(s\sqrt{Q})\,ds = \\ = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha+m+1)} Q^{n-1},\end{aligned} \tag{7.3}$$

при всех $m = 1, 2, \dots$.

Для установления основного результата этого парагафа введем сначала следующие обозначения.

Пусть A — генератор полиномиально ограниченного косинуса, действующего на банаховом пространстве E, т.е. существуют числа $M > 0$ и $\beta \geqslant 0$ такие, что

$$\|C(t, A)\| \leqslant M(1+t)^\beta, \quad \text{при всех } t \geqslant 0. \tag{7.4}$$

Резольвента $(\lambda^2 I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt$ оператора A необходимо удовлетворяет оценке

$$\|(\lambda^2 I - A)^{-1}\| \leqslant M \int_0^\infty e^{-\Re\lambda t}(1+t)^{\beta+1}\, dt$$
$$\leqslant M 2^{\beta+1}\left(\int_0^1 e^{-\Re\lambda t}\, dt + \int_0^\infty e^{-\Re\lambda t} t^{\beta+1}\, dt\right)$$
$$\leqslant M 2^{\beta+1}\left(\frac{1}{\Re\lambda} + \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\Re\lambda)^{\beta+2}}\right)$$
$$\text{для всех } \lambda \in \mathbb{C} \text{с } \Re\lambda > 0. \tag{7.5}$$

Пусть $P \in B(E)$ — ограниченный линейный оператор.

Теорема 7.2.1 ([168]). *Пусть $\alpha > 0$ и выполняется (7.4). Тогда условия*

i) *$\lambda^{\alpha+2}(\lambda^2 I - A)^{-1} \to P$ в сильной операторной топологии при $\lambda \to 0^+$ в $\mathbb{R}$;*

ii) *существуют $C > 0, N \geqslant 0$ и $\rho_0 > 0$ такие, что*

$$\|\rho^{2+\alpha}(\rho^2 e^{i2\varphi} I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{\cos^N(\varphi)},\ 0 < \rho \leqslant \rho_0,\ \varphi \in (-\pi/2, \pi/2);$$

необходимы и достаточны для существования положительного целого m такого, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{(\Gamma(m) t^{m+\alpha})} \int_0^t (t-s)^{m-1} C(s,A)x\, ds = Px \tag{7.6}$$

для каждого $x \in E$.

Замечание 7.2.1. Поскольку для оператора A, порождающего полиномиально оганиченный косинус-распределение, можно найти соответствующий сильно непрерывный m раз проинтегрированный косинус [77], [213], [214], то такая же теорема должна выполняться и в случае оператор-функций распределений.

Замечание 7.2.2. Предположим, что $\lambda^2(\lambda^2 I - A)^{-1} \to P$ при $\lambda \to 0+$, т.е. i) выполняется с $\alpha = 0$. Тогда из тождества Гильберта получаем, что

$$\lambda^2\mu^2(\lambda^2 I - A)^{-1}(\mu^2 I - A)^{-1} =$$
$$= \frac{\lambda^2\mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}((\mu^2 I - A)^{-1} - (\lambda^2 I - A)^{-1}). \tag{7.7}$$

Теперь, полагая $\lambda = \sqrt{2}\mu$, а затем переходя к пределу при $\mu \to 0+$, получаем из (7.7), что $P^2 = P$, т.е. P — проектор. В случае, когда $\alpha > 0$ в i), оператор P уже не является проектором и из 7.7) следует, что P обладает свойством $P^2 = 0$.

Глава 8

РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫЕ C_0-КОСИНУС ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ

Как и в случае полугрупп операторов, непрерывность по норме для косинус оператор-функций является сильно ограничительным требованием, поскольку влечет ограниченность производящего оператора. Условия порождения косинус оператор-функции для инфинитезимального оператора A более ограничительны, чем условия порождения полугрупп операторов.

§ 8.1. Непрерывность по норме

Вполне естественно, что ограниченность A вытекает в случае косинус оператор-функций при менее слабых дополнительных предположениях, чем в случае полугрупп операторов. Так, например, условие $\|tA\exp(-tA)\| \leqslant C$ влечет ограниченность A при $C = 1/e$ (см. [15]), а в случае косинус оператор-функций для ограниченности A достаточно ограниченности $\|AS(t,A)\| \leqslant$ *const* с любой константой.

Определение 8.1.1. C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ непрерывна в равномерной операторной топологии *(непрерывна по норме)*, если функция $C(\cdot, A) : \mathbb{R} \to B(E)$ непрерывна в операторной норме.

Предложение 8.1.1 ([270])**.** *Пусть C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ непрерывна в равномерной операторной топологии. Тогда $A \in B(E)$ и*

$$C(t,A) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} A^k/(2k)!, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8.1}$$

причем ряд сходится равномерно по t на каждом конечном отрезке $[0, T]$.

Иногда в литературе ряд (8.1) по аналогии со скалярным случаем записывают как $\operatorname{ch}(t\sqrt{A})$.

Заметим, что C_0-синус оператор-функция $S(\cdot, A)$, как это следует из ее определения, всегда равномерно непрерывна по $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 8.1.2 ([269])**.** *Пусть $A \in B(E)$. Тогда ряд (8.1) есть C_0-косинус оператор-функция, производящий оператор которой есть A.*

Теорема 8.1.1 ([84]). *Каждое из следующих условий эквивалентно условию непрерывности по норме $C(\cdot, A)$:*

(i) $\lim_{t\to 0} \|C(t,A) - I\| = 0$ *;*

(ii) $\lim_{t\to 0} \|t^{-1}S(t,A) - I\| = 0$ *;*

(iii) производящий оператор A ограничен;

(iv) $\mathcal{R}(C(t,A)) \subseteq E^1$ *при всех* $t \in (\alpha, \beta)$ *с какими-нибудь* $\alpha < \beta$*;*

(v) включение $\mathcal{R}(S(t,A)) \subseteq D(A)$ и сильная непрерывность функции $t \to AS(t,A)$ имеют место при всех $t \in (\alpha,\beta)$ с какими-нибудь $\alpha < \beta$.

Предложение 8.1.3 ([5]). *Производящий оператор A C_0-косинус оператор-функции с неквазианалитическим весом χ ограничен тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(i) для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $\sup_{0<t<\varepsilon} \|C(t,A) - I\| < 1$;

(ii) C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ есть сужение на $\mathbb{R}$ целой функции $\tilde{C}(\cdot) : \mathbb{C} \to B(E)$ экспоненциального типа (равного $r(A)$).

Предложение 8.1.4 ([270]). *Пусть C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ сильно дважды дифференцируема в нуле. Тогда $A \in B(E)$.*

Предложение 8.1.5 ([205]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(M, 0)$. Тогда оператор $A \in B(E)$ тогда и только тогда, когда спектр $\sigma(A)$ ограничен.*

Предложение 8.1.6. *Пусть C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ непрерывна по норме. Тогда*

(i) $\lim_{t\to 0} \|\frac{2}{t^2}\int_0^t S(s,A)ds - I\| = 0$;

(ii) при достаточно малых h оператор $\int_0^h S(s,A)ds$ ограниченно обратим;

(iii) при достаточно малых h имеет место равенство

$$A = (C(h,A) - I)\left(\int_0^h S(s,A)ds\right)^{-1}.$$

Определение 8.1.2. *Пространством Гротендика* называют такое банахово пространство, в котором каждая w^*-сходящаяся в E^* последовательность будет и w-сходящейся.

Определение 8.1.3. Говорят, что банахово пространство E обладает *свойством Данфорда-Петтиса*, если $\langle x_n, x_n^* \rangle \to 0$ как только x_n сходится к нулю слабо в E и x_n^* сходится к нулю слабо в E^*.

Предложение 8.1.7 ([256]). *Любая C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$, заданная на пространстве Гротендика со свойством Данфорда-Петтиса (таково, например, $E = L^\infty$), является непрерывной по норме, т.е. $A \in B(E)$.*

Прежде чем сформулировать следующее предложение напомним [145], что если E является H.I. пространством и $B \in B(E)$, то существует такая единственная точка $\lambda_B \in \sigma(B)$, что оператор $B - \lambda_B I$ является строго сингулярным. Кроме того, $B - \lambda_B I$ является оператором Рисса.

Предложение 8.1.8 ([245]). *Пусть E является H.I. банаховым пространством и $C(\cdot, A)$ удовлетворяет условию (7.4). Тогда $A \in B(E)$ и существует положительное целое m такое, что $(A - \lambda_A I)^m$ — компактный оператор.*

Предложение 8.1.9 ([5]). *Если $B \in B(E)$ и C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, B)$ равномерно ограничена по $t \in \mathbb{R}$, то имеет место неравенство Бернштейна*

$$\|B\| \leqslant r(B) \cdot \sup_{t \in \mathbb{R}} \|C(t, B)\|,$$

где $r(B)$ - спектральный радиус оператора B.

Предложение 8.1.10 ([25], [239]). *Пусть $B \in B(E)$. Тогда функции $C(t, -B^2)x$ и $S(t, -B^2)y$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$ ограничены при любых $x, y \in E$ тогда и только тогда, когда на E существует такая эквивалентная норма $\|\cdot\|_*$, что $\|exp(itB)\|_* \leqslant 1$ при $t \in \mathbb{R}$ (такие операторы B называются эквивалентно эрмитовыми на E).*

Предложение 8.1.11 ([25], [239]). *Оператор $B \in B(E)$ эквивалентно эрмитов на E тогда и только тогда, когда существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\|\sin(tB)\| \leqslant C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Предложение 8.1.12 ([83]). *Пусть в банаховой алгебре $\mathcal{B}$ с единицей задана C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$, $A \in \mathcal{B}$. Тогда при $\nu^2 > \sup_{\lambda \in \sigma(A)}(|\lambda| + \operatorname{Re}\lambda)/2$ имеем*

$$C(t, A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu - i\infty}^{\nu + i\infty} e^{\lambda t} \lambda R(\lambda^2, A) d\lambda, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

$$S(t, A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu - i\infty}^{\nu + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda^2, A) d\lambda, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Предложение 8.1.13 ([97]). *Если для C_0-косинус оператор-функции $\mathcal{R}(S(t, A)) \subseteq D(A)$ при $t \in \mathbb{R}$ и $\|AS(t, A)\| \leqslant const$ при $t \in [a, b]$, $a < b$, то $A \in B(E)$.*

Предложение 8.1.14 ([97]). *Если для C_0-косинус оператор-функции $SV\Big(C(\cdot,A),t\Big) \leqslant const$ при некотором $t \in \mathbb{R}_+$, то $A \in B(E)$.*

§ 8.2. Положительность семейств возмущений

Определение 8.2.1. В случае когда E является банаховой решеткой с положительным конусом E_+, мы говорим, что функция $\mathcal{L}(\cdot)$ на E *положительна*, если для каждого $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$ оператор $\mathcal{L}(t)$ положителен (пишем $\mathcal{L}(t) \succeq 0$) в том смысле, что $\mathcal{L}(t)E_+ \subseteq E_+$.

В случае, когда E является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, мы говорим, что $\mathcal{L}(\cdot)$ положителен (пишем $\mathcal{L}(t) \geqslant 0$), если для каждого $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ оператор $\mathcal{L}(t)$ положителен в том смысле, что $(\mathcal{L}(t)x,x) \geqslant 0$ для всех $x \in E$.

Предложение 8.2.1. *[196] C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot,A)$ доминирует I, то есть $C(\cdot,A)-I$ положителен, в смысле банаховой решетки или в смысле гильбертова пространства, только тогда, когда генератор A ограничен и положительнен.*

Следующие предложения являются переформулированием свойств C_0-семейства мультипликативного возмущения и C_0- семейства аддитивного возмущения.

Пусть $F_B^{\mu}(\cdot)$ и $G_B^{\mu}(\cdot)$ — функции, определенные для $B \in B(E)$ формулами

$$F_B^{\mu}(t)x := (A-\mu)\int_0^t S(s,A)Bx\,ds, \quad x \in E,\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{8.2}$$

$$G_B^{\mu}(t)x := B(A-\mu)\int_0^t S(s,A)x\,ds, \quad x \in E,\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Тогда $F_B^{\mu}(\cdot)$ - C_0-семейство мультипликативного возмущения и $G_B^{\mu}(\cdot)$ – C_0-семейство аддитивного возмущения.

Предложение 8.2.2 ([236]). *Пусть E банахова решетка. Каждое C_0-семейство мультипликативного возмущения $F_B^{\mu}(\cdot)$ для C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot,A)$ на E, определенное в (8.2) с $\mu \leqslant 0$ и $B \succeq 0$, положительно, если и только если оператор A положителен. То же самое имеет место для C_0-семейства аддитивного возмущения.*

Предложение 8.2.3 ([236]). *Пусть E – гильбертово пространство. Каждое C_0-семейство мультипликативного возмущения $F_B^{\mu}(\cdot)$ для C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot,A)$ на E, определенное в (8.2) с $\mu \leqslant 0$ и $B \geqslant 0$ и коммутирующее с*

$C(\cdot, A)$, *положительно если и только если оператор* A *положителен. То же самое имеет место для* C_0*-семейства аддитивного возмущения.*

Глава 9

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ C_0-КОСИНУС ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ

Напомним вкратце определение почти периодичности оператор-функций.

Определение 9.1 Функция $f(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \to E$ называется *почти периодической*, если для каждого $\epsilon > 0$ множество $J(f, \epsilon) = \{\tau > 0 : \|f(t+\tau) - f(t)\| \leqslant \epsilon$ для всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ относительно плотно в $\overline{\mathbb{R}}_+$. То есть существует такое $l \in \mathbb{R}_+$, что каждый подинтервал из $\overline{\mathbb{R}}_+$ длины l пересекается с $J(f, \epsilon)$. Оператор-функция $Q(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \to B(E)$ называется *почти периодической*, если для каждого $x \in E$ функция $Q(\cdot)x$ почти периодична.

§ 9.1. Почти периодичность основных семейств

Определение 9.1.1. C_0-косинус оператор-функция или C_0-синус оператор-функция называются *почти периодическими (п.п.)* или *равномерно п.п.*, если при любом $x \in E$ функции $C(\cdot, A)x$ или $S(\cdot, A)x$ являются п.п. (равномерно п.п.).

Предложение 9.1.1 ([100]). *Если* E *секвенциально слабо полно, то слабо п.п.* C_0*-косинус оператор-функция является почти периодической.*

Теорема 9.1.1 ([60]). C_0*-косинус оператор-функция* $C(\cdot, A)$ *является почти периодической тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

(i) C_0*-косинус оператор-функция* $C(\cdot, A)$ *равномерно ограничена;*

(ii) спектр $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_-$*;*

(iii) система собственных векторов производящего оператора A *тотальна в пространстве* E.

Если при этом $\mu \in \sigma(A)$ *- изолированная точка спектра, то* μ *является простым полюсом резольвенты* $(\lambda I - A)^{-1}$ *и* $E = \overline{\mathcal{R}(\mu I - A)} \oplus \mathcal{N}(\mu I - A)$.

Теорема 9.1.2 ([60]). *Задача Коши (3.1) имеет п.п. обобщенное решение для любых* $u^0, u^1 \in E$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия (i)-(iii) Теоремы 9.1.1 и* $0 \in \rho(A)$.

Теорема 9.1.3 ([60]). *C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ и C_0-синус оператор-функция $S(\cdot, A)$ являются равномерно п.п. тогда и только тогда, когда выполнены три условия:*

(i) C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ и C_0-синус оператор-функция $S(\cdot, A)$ равномерно ограничены по $t \in \mathbb{R}$;

(ii) множество $\sigma(A)$ является гармоническим подмножеством в $\mathbb{R}_-$ и $0 \in \rho(A)$;

(iii) система собственных векторов производящего оператора A тотальна в пространстве E.

Предложение 9.1.2 ([60]). *Если C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ равномерно п.п., то $\sigma(A)$ состоит из простых полюсов резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$. В этом случае $\sigma(A) = P\sigma(A)$.*

Предложение 9.1.3 ([160]). *Следующие условия эквивалентны:*

(i) C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ периодична как оператор-функция;

(ii) C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ сильно периодична;

(iii) C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ слабо периодична.

Теорема 9.1.4 ([139], [204]). *Равномерно ограниченная C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ периодична с периодом 2π тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

(i) спектр $\sigma(A) \subseteq \{l : l = -k^2, k \in \mathbb{Z}\}$;

(ii) спектр $\sigma(A)$ состоит из простых полюсов резольвенты;

(iii) система собственных векторов производящего оператора A тотальна в пространстве E.

При выполнении условий (i)-(iii) проекторы Рисса даются формулами

$$P(-k^2)x = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(ks)C(s,A)x\,ds & \text{при} \quad k \neq 0, \\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} C(s,A)x\,ds & \text{при} \quad k = 0 \end{cases}$$

причем при $x \in D(A)$ имеет место равенство

$$C(t, A)x = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(kt)P(-k^2)x, \tag{9.1}$$

где ряд сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 9.1.4 ([139]). *В случае, когда $E = H$ и $C(\cdot, A) - 2\pi$ -периодична, равенство (9.1) имеет место при всех $x \in E$, и сходимость ряда равномерна по $t \in \mathbb{R}$.*

Теорема 9.1.5 ([61]). *Функция $C(t,A)u^0 + S(t,A)u^1$ является 2π- периодической при любых $u^0, u^1 \in E$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (i)-(iii) Теоремы 9.1.4 и $0 \in \rho(A)$.*

Предложение 9.1.5 ([139]). *C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ является периодической периода T тогда и только тогда, когда функция $F(z) := (1-e^{-Tz})zR(z^2, A)$ может быть аналитически продолжена до целой функции $\tilde{F}(z)$ такой, что при $|z| > r$ справедлива оценка*

$$\|\tilde{F}(z)\| \leqslant Me^{(q|z|^{2-\varepsilon})}, \quad \text{где} \quad q, M, r, \varepsilon > 0. \tag{9.2}$$

Предложение 9.1.6 ([220]). *Равномерно корректная задача Коши (3.1) имеет периодические решения периода T тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{C}(M, 0)$ и функция $F(z)/z$ может быть аналитически продолжена до целой функции $Q(z)$ такой, что при $|z| > r$ для $Q(z)$ справедлива оценка (9.2).*

Предложение 9.1.7 ([137]). *Пусть C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ задана в гильбертовом пространстве H и $C(\cdot, A)$ слабо п.п. Тогда имеет место равенство $C(t, A) = Q^{-1}C(t, V)Q$, где V - самосопряженный оператор $V := \sum_{\lambda \geqslant 0} \lambda P(\lambda)$, а $P(\lambda)$ - семейство взаимно ортогональных проекторов.*

Предложение 9.1.8 ([204]). *Из периодичности C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot, A)x$ при каждом $x \in D(A)$ следует периодичность $C(\cdot, A)$.*

Предложение 9.1.9 ([5]). *Пусть $\sqrt{\sigma(-A)} \cap \mathbb{R}_+$ - не более, чем счетное множество. Тогда для почти периодичности всех решений задачи (3.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(i) C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ равномерно ограничена по $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $0 \in \rho(A)$;

(iii) для каждой предельной точки $\lambda_0 \in \sqrt{\sigma(A)}$ найдется последовательность $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$, сходящаяся к нулю при $n \to \infty$, такая, что $s\text{-}\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(\varepsilon_n + i\lambda_0)\Big((\varepsilon_n + i\lambda_0)\cdot I - A\Big)^{-1} x = 0$ при каждом $x \in E$.

Предложение 9.1.10 ([5]). *C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ п.п. в равномерной операторной топологии тогда и только тогда, когда она равномерно ограничена на $\mathbb{R}$ и $\sqrt{\sigma(A)}$ — гармоническое подмножество $i\mathbb{R}$.*

Предложение 9.1.11 ([5]). *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ *и* $\sqrt{\sigma(-A)}$ *не имеет предельных точек в* $\mathbb{R}_+$. *Тогда*

(i) линейная оболочка собственных и корневых векторов A *плотна в* E, *если существует такая функция* $\chi(t)$, *что*

$$\|C(t,A)\| \leqslant \chi(t) \text{ и } \chi(t) \leqslant C(1+|t|)^{\gamma} \text{ при } t \in \mathbb{R}, \gamma \geqslant 0; \tag{9.3}$$

(ii) C_0*-косинус оператор-функция* $C(\cdot,A)$ *при выполнении условия* $\lim_{t\to\infty}\chi(t)/t = 0$, *где* $\chi(\cdot)$ *– функция из (9.3), периодична с периодом 1 тогда и только тогда, когда* $\sigma(A) \subseteq \{-(2\pi k)^2 : k \in \mathbb{N}\}$.

В [159] рассмотрены асимптотические почти-периодические по Степанову полугруппы операторов и косинус оператор-функции.

§ 9.2. Почти периодичность семейств $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$

Предложение 9.2.1. *Если непрерывная функция* $f(\cdot)\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \to E$ *сходится к некоторому элементу* $\varphi \in E$ *при* $t \to \infty$, *тогда*

$$2t^{-2}\int_0^t sf(s)\ ds \ \to \varphi \text{ при } t \to \infty. \tag{9.4}$$

Доказательство. Ясно, что, как и в случае Леммы 6.3.1 (см. также [15], Лемма 7.3.1.), достаточно рассмотреть случай $\varphi = 0$. Положим $t = \tau + \zeta$ и запишем

$$\frac{2}{t^2}\int_0^t sf(s)\ ds = \frac{2}{(\tau+\zeta)^2}\int_0^{\tau} sf(s)ds + \\ + \frac{2}{(\tau+\zeta)^2}\int_{\tau}^{\tau+\zeta} sf(s)\ ds. \tag{9.5}$$

Поскольку

$$\left\|\frac{2}{(\tau+\zeta)^2}\int_{\tau}^{\tau+\zeta} sf(s)ds\right\| \leqslant \sup_{t\geqslant\tau}\|f(t)\|$$

для всех ζ и τ и $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, мы можем выбрать τ настолько большим, что второй член в (9.5) становится меньшим, чем некоторое $\epsilon > 0$. Затем можно выбрать столь большое ζ, что первый член в (9.5) также становится меньше, чем ϵ. Это доказывает (9.4) с $\varphi = 0$.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие того, чтобы каждое C_0-семейство мультипликативного возмущения (или каждое C_0-семейство аддитивного возмущения) являлось почти периодическим.

Теорема 9.2.1 ([236]). *Каждое C_0-семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ для $C(\cdot, A)$ почти периодично, тогда и только тогда, когда $C(\cdot, A)$ почти периодическая и $0 \in \rho(A)$. То же самое утверждение справедливо и для C_0-семейства аддитивного возмущения.*

Доказательство. Пусть $C(\cdot, A)$ почти периодична. Тогда условие $0 \in \rho(A)$ влечет почти периодичность функции $\int_0^t S(s, A)\, ds = \int_0^t S(s, A) A A^{-1} ds = (C(t, A) - I) A^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, из Предложения 2.4.1 (iv) следует почти периодичность $F(\cdot)$.

Обратно, если каждое C_0-семейство мультипликативного возмущения почти периодично, тогда два частных C_0-семейства мультипликативного возмущения $C(t, A) - I$ и $\int_0^t S(s, A) ds$ - почти периодические функции. Если $x \in \mathcal{N}(A)$, тогда $x = C(s, A)x - \int_0^s S(u, A) A x du = C(s, A)x$ для всех $s \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и $x = 2t^{-2} \int_0^t S(s, A) x ds \to 0$ при $t \to \infty$, потому что почти периодическая функция ограничена. Следовательно A - инъективен. Затем, так как почти периодическая функция эргодична (см., например, [75], стр. 21), то предел $\frac{1}{s} \int_0^s \int_0^u S(v, A)x\ dv\ du$ существует при $s \to \infty$ для каждого $x \in E$. В силу Предложения 9.2.1, предел

$$\frac{2}{t^2} \int_0^t s \frac{1}{s} \int_0^s \int_0^u \int_0^v C(\tau, A) x d\tau dv du ds$$

существует при $t \to \infty$ для любого $x \in E$. Поскольку $C(\cdot, A)$ равномерно ограничена, то из Предложения 6.3.2 (то есть [237] - Теорема 3.7) имеем $\mathcal{R}(A) = E$. Следовательно, $0 \in \rho(A)$.

Замечание 9.2.1 ([60]). Предположения, что $C(\cdot, A)$ почти периодична и $0 \in \rho(A)$, эквивалентны условию, что каждое обобщенное решение задачи Коши (3.1) почти периодично.

Из Теоремы 9.2.1 можно вывести следующую теорему.

Теорема 9.2.2. *Каждое C_0-семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ для $C(\cdot, A)$ является периодическим тогда и только тогда, когда $C(\cdot, A)$ периодическая и $0 \in \rho(A)$. В этом случае, $F(\cdot)$ и $C(\cdot, A)$ имеют одинаковый период. То же самое утверждение истинно для C_0-семейств аддитивного возмущения.*

Глава 10

КОМПАКТНОСТЬ В ТЕОРИИ C_0-КОСИНУС ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

Свойства компактности широко используются в разных аспектах теории разрешающих семейств. Будем обозначать множество компактных операторов, действующих в E, через $B_0(E)$ (или $B_0(E,F)$ в случае разных пространств).

§ 10.1. Компактные основные семейства

Определение 10.1.1. C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot,A)$ называется *компактной* – мы пишем $C(\cdot,A) \in B_0(E)$, если оператор $C(t,A) \in B_0(E)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$. C_0-синус оператор-функция $S(\cdot,A)$ называется *компактной*, если оператор $S(t,A) \in B_0(E)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 10.1.1 ([270]). *Если оператор* $C(t,A) \in B_0(E)$ *при каждом* $t \in (\alpha,\beta)$ *при некоторых* $\alpha < \beta$, *то* C_0*-косинус оператор-функция* $C(\cdot,A) \in B_0(E)$ *и* C_0*-синус оператор-функция* $S(\cdot,A) \in B_0(E)$.

Предложение 10.1.2 ([270]). *Если оператор* $S(t,A) \in B_0(E)$ *при каждом* $t \in (\alpha,\beta)$ *при некоторых* $\alpha < \beta$, *то* C_0*-синус оператор-функция* $S(\cdot,A) \in B_0(E)$, $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 10.1.3 ([62]). *Если* $\dim E = \infty$, *то ни для какого* $t_0 > 0$ *операторы* $C(t_0,A)$ *и* $C(2t_0,A)$ *не могут быть компактными одновременно.*

Предложение 10.1.4 ([270]). *В условиях Предложения 10.1.1 с необходимостью* $dimE < \infty$.

Теорема 10.1.1 ([270]). *Следующие условия эквивалентны:*
(i) C_0*-синус оператор-функция* $S(\cdot,A) \in B_0(E)$;

(ii) резольвента $(\lambda^2 I - A)^{-1} \in B_0(E)$ *для любого* λ *с* $\operatorname{Re}\lambda > \omega_c(A)$.

Теорема 10.1.2 ([62]). *Следующие условия эквивалентны:*
(i) производящий оператор $A \in B_0(E)$;

(ii) оператор $\lambda^2(\lambda^2 I - A)^{-1} - I \in B_0(E)$ *для каждого* $\lambda > \omega_c(A)$;
(iii) оператор $S(t,A) - tI \in B_0(E)$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$;
(iv) оператор $C(t,A) - I \in B_0(E)$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 10.1.5 ([158]). *Пусть оператор* $C(t,A) - I \in B_0(E)$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда оператор* $\lambda(\lambda I - A)^{-1} - \mu(\mu I - A)^{-1} \in B_0(E)$ *при всех* $\lambda,\mu \in \rho(A)$ *таких, что* $\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu > \omega_c(A)$.

Предложение 10.1.6 ([158])**.** *Пусть оператор* $C(t,A)-I\in B_0(E)$ *при каждом* $t\in(\alpha,\beta)$ *при некоторых* $\alpha<\beta$. *Тогда оператор* $C(t,A)-I\in B_0(E)$ *при любом* $t\in\mathbb{R}$.

Предложение 10.1.7 ([158])**.** *Если оператор* $S(t,A)-tI\in B_0(E)$ *при каждом* $t\in(\alpha,\beta)$ *при некоторых* $\alpha<\beta$, *то оператор* $S(t,A)-tI\in B_0(E)$ *при любом* $t\in\mathbb{R}$.

Предложение 10.1.8 ([59])**.** *Пусть* C_0*-синус оператор-функция* $S(\cdot,A)$ *и оператор-функция* $C(t,A)-I$ *компактны при каждом* $t\in\mathbb{R}$. *Тогда пространство* E *с необходимостью конечномерно.*

Доказательство. В силу наших предположений из Теоремы 10.1.1 и Теоремы 10.1.2 следует, что резольвента $(\lambda I-A)^{-1}$ и оператор $\lambda(\lambda I-A)^{-1}-I$ компактны при некотором $\lambda\neq 0$. Отсюда следует, что I является компактным оператором, т.е. E конечномерно.

Определим множества

$$NBI_0=\{t>0: \text{оператор } C(t,A)$$
$$\text{не имеет ограниченного обратного}\},$$
$$NBI_1=\{t>0: \text{оператор } S(t,A)$$
$$\text{не имеет ограниченного обратного}\}.$$

Предложение 10.1.9 ([158])**.** *Пусть оператор* $C(t,A)-I\in B_0(E)$ *при всех* $t\in\mathbb{R}$. *Тогда множества* NBI_0 *и* NBI_1 *одновременно либо пусты, либо являются бесконечными мощности континуум и существуют константы* $\alpha_0,\alpha_1>0$ *такие, что* $NBI_j\subseteq(\alpha_j,\infty)$, $j=0,1$.

§ 10.2. Компактность разности косинусов

Многие системы с распределенными параметрами могут быть приведены к виду

$$v'(t)=Av(t)+Bu(t),\ v(0)=v_0,\ t\in\mathbb{R}_+, \tag{10.1}$$

где A порождает C_0-полугруппу в фазовом гильбертовом или баховом пространствах E, а B — оператор управления, действующий из пространства управлений в фазовое пространство. При построении обратной связи $u(t)=Fv(t)$ с некоторым оператором обратной связи из фазового пространства в пространство управлений, замкнутая система приобретает вид

$$v'(t)=(A+BF)v(t),\ v(0)=v_0,\ t\in\mathbb{R}_+. \tag{10.2}$$

В контексте теории стабилизации, желательно выбрать оператор обратной связи F с тем, чтобы замкнутая система приобрела свойства устойчивости, которые не имеет исходная система. Важный класс физических приложений составляет класс операторов F, для которых BF компактен в фазовом пространстве. Когда BF компактен, в [287] впервые доказано, что полугруппы $\exp((A+BF)t$ и $\exp(tA)$ компактны для любого положительного t. Следовательно,

$$\omega_{ess}(A) = \omega_{ess}(A+BF), \tag{10.3}$$

где ω_{ess} обозначает существенную скорость роста ассоциированной полугруппы. Свойство (10.3) выполняется для любых двух C_0-полугрупп, если только их разность компактна для некоторого $t > 0$ (см. теорему 3.52 в [201]). Это составляет осному "метода компактности", который использовался для изучения стабилизации систем теории упругости (см. [244]) и спектрального свойства транспортного уравнения (см. [280]). Метод компакности был сформулирован впервые в [273] для гильбертовых пространств и позже был обобщен на банаховы пространства в [149]; он утверждает, что компактное возмущение не может сделать систему экспоненциально устойчивой, если она асимптотически, но не экспоненциально устойчива.

Это обстоятельство привело к общему изучению необходимых и достаточных условий компактности разности двух C_0-полугрупп. Недавний результат [189] состоит в том, что $\exp(tA) - \exp(tB)$ компактна для некоторого $t > 0$ в том и только том случае, если $R(\lambda, A) - R(\lambda, B)$ компактна при условии непрерывности нормы.

С другой стороны, большинство управляемых гиперболических систем более удобно записывать в виде эволюционного уравнения второго, а не первого порядка в абстрактном пространстве (см. [18]), [248]:

$$v''(t) = Av(t) + Bu(t),\ v(0) = v_0,\ v'(0) = v_1,\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{10.4}$$

Система (10.4) может быть приведена к уравнению первого порядка (3.5), но, тем не менее, здесь имеются некоторые проблемы, поскольку $\mathcal{A}$ не порождает C_0-полугруппы на $E \times E$. В связи с этим интересен вопрос о компактности разности двух C_0-косинус оператор-функций.

Пусть $C(t, A)$ и $C(t, B)$ — косинус оператор-функции на банаховом пространстве E соответственно порожденные A и B и удовлетворяющие неравенствам $\|C(t, A)\|$, $\|C(t, B)\| \leqslant Me^{w|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, для некоторых постоянных M, $w \geqslant 0$. Обозначим также $\Delta_{A,B}(t) = C(t, A) - C(t, B)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 10.2.1 ([190]). *Пусть $\Delta_{A,B}(t)$ непрерывна по норме при $t > 0$. Тогда при всех $\lambda > w^2$ оператор $R(\lambda; A) - R(\lambda; B)$ компактен в том и только том случае, если $\Delta_{A,B}(t)$ компактна при $t \geqslant 0$.*

Можно охарактеризовать непрерывность по норме в гильбертовом пространстве аналогично теореме 2.5 in [189], а доказательство этого — простая модификация.

Предложение 10.2.1. *Пусть A и B порождают косинус–функции $C(t, A)$ и $C(t, B)$ соответственно на гильбертовом пространстве H, а $\|C(t, A)\|, \|C(t, B)\| \leqslant Me^{\omega t}$ для некоторых постоянных $M \geqslant 1, \omega \in \mathbb{R}$. Тогда разность $C(t, A) - C(t, B)$ непрерывна по норме при $t > 0$ в том и только том случае, если для любого $\sigma > \omega$*

$$\lim_{|r|\to\infty} \|(\sigma + ir)\Big(R((\sigma + ir)^2, A) - R((\sigma + ir)^2, B)\Big)\| = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^\infty \|(\sigma \pm ir)\Big(R((\sigma \pm ir)^2, A) - R((\sigma \pm ir)^2, B)\Big)x\|^2 dr = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^\infty \|(\sigma \pm ir)\Big(R((\sigma \pm ir)^2, A^*) - R((\sigma \pm ir)^2, B^*)\Big)y\|^2 dr = 0$$

равномерно при $x \in H, y \in H^*$ with $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$.

Случай синус-функций более простой.

Теорема 10.2.2 ([190]). *Пусть $S(t, A)$ и $S(t, B)$ — соответствующие синус-функции для $C(t, A)$ и $C(t, B)$. Тогда разность $S(t, A) - S(t, B)$ компактна при $t > 0$ в том и только том случае, если разность $R(\lambda; A) - R(\lambda; B)$ компактна при $\lambda > w^2$.*

Установим теперь аналогичный результат для косинуса как это сделано в [189], предложение 2.7.

Предложение 10.2.2 ([190]). *Предположим, что $\Delta_{A,B}(t)$ компактна при $t > 0$ и непрерывна по норме в $t = 0$. Тогда*

$$\lim_{h\to 0} \|\Delta_{A,B}(t + h) - 2\Delta_{A,B}(t) + \Delta_{A,B}(t - h)\| = 0 \quad \text{для любого } t \geqslant 0. \tag{10.5}$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta_{A,B}(t+h) + \Delta_{A,B}(t-h) - 2\Delta_{A,B}(t) =$$
$$= \Big(C(t+h,A) + C(t-h,A)\Big) -$$
$$-\Big(C(t+h,B) + C(t-h,B)\Big) - 2\Delta_{A,B}(t) =$$
$$= 2C(t,A)C(h,A) - 2C(t,B)C(h,B) - 2\Delta_{A,B}(t) =$$
$$= 2\Big(C(t,A)C(h,A) - C(h,A)C(t,B)\Big) +$$
$$+2\Big(C(h,A)C(t,B) - C(t,B)C(h,B)\Big) - 2\Delta_{A,B}(t) =$$
$$= 2C(h,A)\Delta_{A,B}(t) + 2\Delta_{A,B}(h)C(t,B) - 2\Delta_{A,B}(t) =$$
$$= 2[C(h,A) - I]\Delta_{A,B}(t) + 2\Delta_{A,B}(h)C(t,B) \to 0 \ \text{ при } \ h \to 0.$$

Замечание 10.2.1. В доказательстве теоремы 10.2.1 на самом деле использовалось (10.5), а не непрерывность по норме разности $\Delta_{A,B}(\cdot)$.

Теорема 10.2.3 ([190]). *Пусть $\Delta_{A,B}(t)$ непрерывна по норме по t в 0. Тогда $\Delta_{A,B}(t)$ компактна при $t > 0$ в том и только том случае, если $R(\lambda; A) - R(\lambda; B)$ компактна при $\lambda > w^2$ и выполняется* (10.5).

Предложение 10.2.3 ([190]). *Предположим, что выполнены условия теоремы 12.2.1 (соотв. теоремы 12.3.1), Тогда $\Delta_{A,A(I+B)}(t)$ (соотв. $\Delta_{A,(I+B)A}(t)$) компактна при $t > 0$ в том и только том случае, если $\Delta_{A,A(I+B)}(t)$ (соотв. $\Delta_{A,(I+B)A}(t)$) удовлетворяет (10.5) и $R(\lambda; A) - R(\lambda; A(I+B))$ (соотв. $R(\lambda; A) - R(\lambda; (I+B)A)$) компактна при достаточно больших λ.*

Мы завершим этот раздел сравнением результатов о разности полугрупп и косинус оператор функций. Сначала рассмотрим ограниченные возмущения. Хорошо известно, что когда A порождает C_0-полугруппу $\exp(tA)$, то $A + B$, $B \in B(E)$, также порождает C_0-полугруппу $\exp t(A+B)$. В [299] показано, что $\exp t(A+B) - \exp(tA)$ непрерывна по норме при $t > 0$ в том и только том случае, если она компактна при $t > 0$. Что же касается случая косинуса, то условие компактности может быть снято.

Теорема 10.2.4 ([190]). *Пусть A — генератор косинус-функции $C(t,A)$, $B \in B(E)$. Тогда $\Delta_{A+B,A}(t)$ непрерывна по норме по $t \in \mathbb{R}$.*

Сопоставляя теоремы 10.2.1 и 10.2.4, имеем следующее утверждение.

Теорема 10.2.5 ([190]). *Пусть* $B \in B(E)$ *и* A *порождает косинус–функцию. Тогда* $\Delta_{A+B,A}(t)$ *компактна при* $t > 0$ *в том и только том случае, если* $R(\lambda; A+B) - R(\lambda; A)$ *компактна при достаточно больших* λ.

Предложение 10.2.4 ([190]). *Предположим, что* C_0*-полугруппы* $\exp tA$ *и* $\exp(tB)$ *коммутируют и* $D(B) \subseteq D(A)$. *Предположим также, что* $\exp(tB)$ *—* C_0*-группа. Если* $\Theta(t) := \exp(tA) - \exp(tB)$ *компактна при всех* $t > 0$, *то* $A = B + K$, *где оператор* K *компактен.*

Доказательство. Можно написать

$$\exp(-tB)\Theta(t) = \exp(-tB)\exp(tA) - I,\ t \in \mathbb{R}_+.$$

По предположению, оператор $\exp(-tB)\exp(tA) - I$ компактен для любого $t > 0$ и, кроме того, $\exp(-tB)\exp tA$ — C_0-полугруппа с генератором $A - B$. Из [108] следует, что оператор $A - B$ компактен.

Для косинусов с ограниченными генераторами также справедливо

Предложение 10.2.5 ([190]). *Пусть оператор* $B \in B(E)$. *Тогда* $\Delta_{A,B}(t)$ *компактна в том и только том случае, если разность* $A - B$ *компактна.*

Доказательство. Компактность $\Delta_{A,B}(t)$ для любого $t > 0$ влечет, что (см. [281]) разность $R(\mu; A) - R(\mu; B)$ компактна для некоторого μ. В таком случае оператор $I - (\mu I - B)R(\mu; A)$ компактен. Это означает, что $(\mu I - B)R(\mu; A)$ — фредгольмов оператор индекса нуль, т.е. он имеет замкнутую область значений $\mathcal{R}((\mu I - B)R(\mu; A)) = E$. Так как $\mu - B$ взаимнооднозначно на E, то получаем, что $\mathcal{R}(R(\mu; A)) = E$. По теореме Банаха $\mu I - A$ ограничен. Так как оператор A ограничен, то имеем $\left\| \dfrac{2}{t^2} \int_0^t S(s, A)\, ds - I \right\| \to 0$ при $t \to 0$. Следовательно, операторr $\int_0^t S(s, A)\, ds$ обратим. Если $\Delta_{A,B}(t)$ компактна, то $B \int_0^t (S(s, B) - S(s, A))\, ds$ также компактна. Теперь из того, что

$$\Delta_{A,B}(t) = (A - B) \int_0^t S(s, A)\, ds - B \int_0^t (S(s, B) - S(s, A))\, ds$$

следует, что разность $A - B$ — компактный оператор.

Обратно, если $A - B$ — компактный оператор, то A ограничен и

$$R(\lambda; A) - R(\lambda; B) = R(\lambda; A)(B - A)R(\lambda; B)$$

компактен, так что компактность $\Delta_{A,B}(t)$ следует из теоремы 10.2.1.

В следующем примере A и B оба порождают C_0-полугруппу и косинус-функцию. Оператор $\exp(tA)-\exp(tB)$ компактен при всех $t>0$, но разность $C(t,A)-C(t,B)$ не компактна.

Пример 10.2.1 ([190])**.** Пусть $E=l^1$ и пусть $\{e_n\}$ — стандартный базис для него, т.е. $e_n=(0,...,0,1,0,...,0,...)$, где 1 стоит на месте $n^{\text{–той}}$ координаты. Пусть

$$Ax:=\sum_{n=1}^{\infty}-n(x,e_n)e_n,\quad Bx:=\sum_{n=1}^{\infty}-(n+n^2)(x,e_n)e_n,$$

где $x=(x^1,x^2,...,x^n,...)$, $(x,e_n)=x^n$, $\|x\|_{l^1}=\sum_{i=1}^{\infty}|x^i|$. Тогда C_0-полугруппы, ими порожденные, — это

$$\exp(tA)x=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nt}(x,e_n)e_n,$$
$$\exp(tB)x=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(n+n^2)t}(x,e_n)e_n.$$

Косинус-функции задаются формулой

$$C(t,A)x=\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nt)(x,e_n)e_n,$$
$$C(t,B)x=\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n+n^2)t(x,e_n)e_n.$$

Так как $e^{-nt}-e^{-(n+n^2)t}\to 0$ при $n\to\infty$, то оператор $\exp(tA)-\exp(tB)$ можно аппроксимировать по норме последовательностью операторов с областями значений конечной размерности $S_N(t)x=\sum_{n=1}^{N}\Big(e^{-nt}-e^{-(n+n^2)t}\Big)(x,e_n)e_n$. Так что оператор $\exp(tA)-\exp(tB)$ компактен при $t\geqslant 0$. Тем не менее, $C(t,A)-C(t,B)$ не компактна. В самом деле, возьмем $t=\pi/2$ и выберем $\{y_k\}:=\{(\delta_n^{2k+1})\}\in l^1$, где δ_i^j — дельта-символ Кронекера. Теперь при $n=2k+1$ получаемs $nt=k\pi+\pi/2$ и $(n+n^2)t=2k^2\pi+3k\pi+\pi$. Так что имеем $\cos(nt)-\cos((n+n^2)t)=\pm 1$, когда k в точности делится на 2, выбираем $+$; в противном случае —

—. Таким образом,

$$(C(\pi/2,A)-C(\pi/2,B))y_k=\{[\cos(nt)-\cos(n+n^2)t]\delta_n^{2k+1}\}=$$
$$=\{\pm\delta_n^{2k+1}\},$$

что означает, что $\|[C(\pi/2,A)-C(\pi/2,B)](y_k-y_m)\|_{l^1}=2$ при $k\neq m$. Значит нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности из последовательности $\{[C(\pi/2,A)-C(\pi/2,B)]y_k\}$. Можно также увидеть, что $C(t,A)-C(t,B)$ не непрерывна по норме по t. В самом деле, для каждого $t>0$, определим $s_k=t+\dfrac{1}{k+k^2}$. Тогда $s_k\to t$ при $k\to\infty$ и

$$\Big\|[C(t,A)-C(t,B)]-[C(s_k,A)-C(s_k,B)]\Big\|_{B(l^1)}=$$
$$=\Big\|\{[\cos(nt)-\cos(ns_k)]-[\cos(n+n^2)t-\cos(n+n^2)s_k]\}_{n=1}^{\infty}\Big\|_{l^\infty}\geqslant$$
$$\geqslant 2\Big|\sin\left(\frac{k}{2}(s_k+t)\right)\sin\left(\frac{k}{2}(s_k-t)\right)-$$
$$-\sin\left(\frac{k+k^2}{2}(s_k+t)\right)\sin\left(\frac{k+k^2}{2}(s_k-t)\right)\Big|=$$
$$=2\Big|\sin\left(\frac{k}{2}(s_k+t)\right)\sin\left(\frac{1}{2(1+k)}\right)-$$
$$-\sin((k+k^2)t+1/2))\sin\frac{1}{2}\Big|.$$

Ясно, что $\sin\frac{1}{2(1+k)}\to 0$ при $k\to\infty$. Но $\sin((k+k^2)t+1/2))$ не сходится к 0 при $k\to\infty$ для любого $t>0$! Для доказательства предположим противное: $\sin((k+k^2)t+1/2))\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда $\sin((k+1+(k+1)^2)t+1/2)\to 0$ $k\to\infty$. Теперь поскольку

$$\sin((k+1+(k+1)^2)t+1/2)=$$
$$=\sin(((k+k^2)t+1/2)+2(k+1)t)$$
$$=\sin((k+k^2)t+1/2))\cos(2(k+1)t)+$$
$$+\cos((k+k^2)t+1/2))\sin(2(k+1)t),$$

то получаем, что $\sin(2(k+1)t)\to 0$ при $k\to\infty$, потому что $\cos((k+k^2)t+1/2)$ не может сходиться к 0 в соответствии с соотношением $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Следовательно, $\sin(2(k+1+1)t)\to 0$ при $k\to\infty$. Таким образом, из $\sin(2(k+1+1)t)=\sin(2(k+1)t)\cos(2t)+\cos(2(k+1)t)\sin(2t)$ получаем $\sin(2t)\to 0$ при $k\to\infty$. Поэтому имеем $t=n\pi/2$ для некоторых $n\in\mathbb{N}$. Но для таких t находим, что $\sin((k+k^2)t+1/2)) = \pm\sin(1/2)$, это противоречит предположению о сходимости к 0. Это означает, что разность $C(t,A)-C(t,B)$ не непрерывна по норме.

Обратного не может быть: справедливо

Предложение 10.2.6 ([190])**.** *Предположим, что A и B порождают C_0-косинус-функции $C(t,A)$ и $C(t,B)$. Если разность $C(t,A)-C(t,B)$ компактна при $t>0$, то разность* $\exp(tA)-\exp(tB)$ *также компактна. Кроме того, если $C(t,A)-C(t,B)$ непрерывна по норме при $t>0$, то разность $C(t,A)-C(t,B)$ компактна при $t>0$ в том и только том случае, если* $\exp(tA)-\exp(tB)$ *компактна.*

Доказательство. Так как разность $C(t,A)-C(t,B)$ компактна, то из [281] следует, что $S(t,A)-S(t,B) = \int_0^t (C(s,A)-C(s,B))ds$ также компактна, что влечет, что $R(\lambda;A)-R(\lambda;B)$ компактна по теореме 10.2.2. Кроме того, так как $\exp(tA)$ и $\exp(tB)$ аналитичны, то разность $\exp(tA)-\exp(tB)$ непрерывна по норме, а компактность $\exp(tA)-\exp(tB)$ следует из теоремы 2.3 в [189]. Если дополнительно $C(t,A)-C(t,B)$ непрерывна по норме, то из компактности $\exp(tA)-\exp(tB)$ следует, что $R(\lambda;A)-R(\lambda;B)$ компактна. Теперь компактность $C(t,A)-C(t,B)$ следует из теоремы 10.2.1.

Следующее утверждение обобщает предложение 2.7 из [189].

Предложение 10.2.7 ([281])**.** *Пусть $D(A)\subseteq D(B)$, где A порождает аналитическую полугруппу* $\exp tA$*, а B — генератор C_0-полугруппы* $\exp(tB)$*. Если $\Theta(t) := \exp(tA)-\exp(tB)$ компактна при $t>0$, то $\Theta(t)$ непрерывна по норме при $t\geqslant 0$.*

§ 10.3. Компактность семейств $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$

Определение 10.3.1. C_0-семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ (соотв. C_0-семейство аддитивного возмущения $G(\cdot)$) называется *компактным*, если операторы $F(t)$ (соотв. $G(t)$) компактны для каждого $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$.

Предложение 10.3.1. *Если C_0-синус оператор-функция $S(\cdot,A)$ компактна и если семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ - непрерывно по норме в нуле, тогда $F(\cdot)$ компактно. То же самое справедливо и для C_0-семейства аддитивного возмущения.*

Доказательство. Интегрируя равенство (2.1) по t от 0 до τ , получаем

$$\int_\tau^{\tau+h} F(\eta)x\,d\eta - \int_{\tau-h}^{\tau} F(\eta)x\,d\eta = 2S(\tau,A)F(h)x. \tag{10.6}$$

Компактность $S(\cdot, A)$ влечет компактность левой части (10.6) для любых $\tau, h \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Поскольку $F(\cdot)$ равномерно непрерывна, мы можем взять в (10.6) производную по τ без потери свойства компактности, так что получающаяся левая часть в (10.6) остается компактным оператором. Используя условия $F(0) = 0$ и равномерную непрерывность $F(\cdot)$ и устремляя τ к нулю, получаем, что $F(h)$ компактен для каждого $h \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Требование равномерной непрерывности в Предложении 10.3.1 является и необходимым, как показывает

Предложение 10.3.2 ([236]). *Если семейство мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ компактно, то семейство $F(\cdot)$ равномерно непрерывно на $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

Доказательство. Поскольку $F(\cdot)$ компактно, то преобразование Лапласа $\hat{F}(\cdot)$ также компактно (см. [281]). В силу формулы (iv) Предложения 2.4.1 утверждение доказано, поскольку сильная сходимость становится равномерной сходимостью после умножения на компактный оператор справа.

Предложение 10.3.3 ([236]). *Пусть C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ на банаховом пространстве E такова, что каждое из семейств мультипликативного возмущения $F(\cdot)$ (или C_0-семейств аддитивного возмущения $G(\cdot)$) для $C(\cdot, A)$ компактно. Тогда E должно быть конечномерно.*

Доказательство. По предположению, два частных семейства мультипликативного возмущения

$$F_1(t) = C(t, A) - I \quad \text{и} \quad F_2(t) = \int_0^t S(s, A)\, ds$$

компактны. Тогда, поскольку мы знаем (см. Теорему 10.1.2), что оператор $C(t, A) - I$ компактен для всех $t \in \mathbb{R}_+$, тогда и только тогда, когда генератор A компактен, то семейство $C(\cdot, A)$ непрерывно по норме на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Таким образом, оператор $C(0, A) = I$, являющийся пределом по норме компактных операторов $2t^{-2}F_2(t)$ при $t \to 0$, является компактным. Отсюда следует, что E конечномерно.

Глава 11

СОПРЯЖЕННЫЕ КОСИНУС ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ

Сопряженные по Филлипсу косинус оператор-функции мало рассматривались в литературе, с одной стороны, в силу тесных аналогий с теорией C_0-полугрупп операторов, а с другой – в силу отсутствия сильно значимых приложений. Мы по существу воспользуемся свойствами $C(\cdot,A)^{\odot}$ в теории возмущений при рассмотрении теорем о возвышении.

§ 11.1. Сопряженные по Филлипсу C_0-косинус оператор-функции

Обозначим через $C(t,A)^{\odot}$, $t\in\mathbb{R}$, сужение $C(t,A)^*|_{E^{\odot}}$, $t\in\mathbb{R}$, где $E^{\odot}\subseteq E$ - подпространство, на котором сопряженное семейство $C(\cdot,A)^*$ сильно непрерывно в нуле.

Предложение 11.1.1 ([221]). *Для C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot,A)$, заданной в E, имеем*
(i) если $x^*\in D(A^*)$, то при любом $t\in\mathbb{R}$

$$C(t,A)^*x^*\in D(A^*)\quad \text{и}\quad A^*C(t,A)^*x^*=C(t,A)^*A^*x^*$$

и при любом $x\in E$ выполняется равенство

$$\langle x,(C(t,A)^*-I^*)x^*\rangle=\int_0^t(t-s)\langle x,C(s,A)^*A^*x^*\rangle ds;$$

(ii) включение $x^*\in D(A^*)$ имеет место тогда и только тогда, когда существует предел

$$w^*\text{-}\lim_{s\to 0+}(2/s^2)(C(s,A)^*-I^*)x^*=y^*,\quad \text{причем}\quad A^*x^*=y^*.$$

Теорема 11.1.1 ([221]). *В обозначениях Предложения 11.1.1 имеем*
(i) подпространство $E^{\odot}=\overline{D(A^*)}$, где замыкание понимается в сильной топологии пространства E^*;
(ii) подпространство $E^{\odot}$ инвариантно относительно $C(t,A)^*$, и $C(t,A)^{\odot}$, $t\in\mathbb{R}$, является C_0-косинус оператор-функцией на $E^{\odot}$;
(iii) производящий оператор $A^{\odot}$ C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot,A)^{\odot}$ является максимальным из сужений оператора A^* на $E^{\odot}$, (т.е $A^{\odot}$ - часть оператора A^* на $E^{\odot}$);
(iv) если E рефлексивно, то $E^{\odot}=E^*$ и $A^{\odot}=A^*$;
(v) при каждом $t\in\mathbb{R}_+$ оператор $C(t,A)^*$ является w^*-замыканием оператора $C(t,A)^{\odot}$.

Предложение 11.1.2 ([221]). *Для любого $x^*\in D(A^*)$ имеем*

$$||(C(t,A)^*-I^*)x^*||\leqslant(t^2/2))||A^*x^*||\cdot\sup_{0\leqslant s\leqslant t}||C(s,A)||.$$

§ 11.2. Сопряженные семейства

Определение 11.2.1. Оператор - функция $K(t)$, $t \in \mathbb{R}$, заданная в пространстве E^* и удовлетворяющая в нем условиям $K(0) = I^*$ и функциональному уравнению косинуса (см. (i) на стр. 29), называется *w^*-непрерывной* C_0-косинус оператор-функцией, если при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ оператор $K(t)$ непрерывен в пространстве E^* в w^*-топологии (пишут $w^* - w^*$-непрерывен) и для любого $x^* \in E^*$ функция $t \to K(t)x^*$ является w^*-непрерывной в E^* по $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 11.2.1 ([256]). *Оператор $Q \in L(E^*)$ является $w^* - w^*$ замкнутым тогда и только тогда, когда он является сопряженным к плотно определенному и замкнутому оператору $\mathcal{Q} \in \mathcal{C}(E)$. Более того, $D(Q) = E^*$ тогда и только тогда, когда $D(\mathcal{Q}) = E$ и в этом случае оба $\mathcal{Q}$ и Q являются ограниченными, причем $\|\mathcal{Q}\| = \|Q\|$.*

Теорема 11.2.1 ([256]). *Для того, чтобы оператор-функция $K(t)$ на E^* была w^*-непрерывной C_0-косинус оператор-функцией, необходимо и достаточно, чтобы $K(\cdot) = C(\cdot, A)^*$, где $C(\cdot, A)$ некоторая C_0-косинус оператор-функция. Если Q – производящий оператор $K(t)$, $t \in \mathbb{R}$, (в смысле w^*-топологии) и A производящий оператор C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$, то $Q = A^*$.*

Для w^*-непрерывной C_0-косинус оператор-функции с производящим оператором Q примем обозначение $K(t, Q)$.

Предложение 11.2.2 ([256]). *В обозначениях Теоремы 11.2.1 следующие условия эквивалентны:*

(i) элемент $x^* \in D(Q)$;

(ii) $||K(t,Q)x^* - x^*|| = O(t^2)$ *при* $t \to 0$;

(iii) $\overline{\lim}_{t\to 0+} t^{-2}||K(t,Q)x^* - x^*|| < \infty$.

Предложение 11.2.3 ([256]). *Пусть $Q \in L(E^*)$. Оператор Q порождает w^*-непрерывную C_0-косинус оператор-функцию тогда и только тогда, когда он w^* - плотно определен, $w^* - w^*$ - замкнут и существуют константы $M > 0$ и $\omega > 0$ такие, что при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ точка $\lambda^2 \in \rho(Q)$ и*

$$\left\| \frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda(\lambda^2 I^* - Q)^{-1}) \right\| \leqslant \frac{Mm!}{(\lambda-\omega)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Предложение 11.2.4 ([256]). *Если множество $\mathcal{D} \subseteq D(Q)$ w^*-плотно в $D(Q)$ и инвариантно относительно w^*-непрерывной C_0-косинус оператор-функции $K(\cdot, Q)$, то $\mathcal{D}$ есть w^*-сердцевина оператора Q.*

Предложение 11.2.5 ([256]). *Для w^*-непрерывных C_0-косинус оператор-функций $K(t,Q_1), K(t,Q_2)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) области определения $\quad D(Q_1) \subseteq D(Q_2)$;

(ii) $\|(K(t,Q_1) - K(t,Q_2))x^*\| = O(t^2)$ *при* $t \to 0$ *для любого* $x^* \in D(Q_1)$.

Предложение 11.2.6 ([256]). *Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\|K(t,Q_1) - K(t,Q_2)\| = O(t^2)$ $\quad$ *при* $\quad t \to 0$;

(ii) $D(Q_1) = D(Q_2)$ *и* $Q_2 - Q_1$*-ограниченный оператор на* $D(Q_1)$;

(iii) $D(Q_1) \subseteq D(Q_2)$ *и* $Q_2 - Q_1$*-ограниченный оператор на* $D(Q_1)$;

(iv) $D(Q_2) \subseteq D(Q_1)$ *и* $Q_2 - Q_1$*-ограниченный оператор на* $D(Q_2)$.

Более того, в этих случаях

$$||Q_2 - Q_1|| \leqslant \underline{\lim}_{t\to 0} 2t^{-2}||K(t,Q_1) - K(t,Q_2)|| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}_+} 2t^{-2}||K(t,Q_1) - K(t,Q_2)||,$$

причем равенства достигаются, например, на сжимающих w^*-непрерывных C_0-косинус оператор-функциях.

Предложение 11.2.7 ([256]). *Если* $K(t,Q_1) - K(t,Q_2) = o(t^2)$ *при* $t \to 0$, *то* $K(t,Q_1) = K(t,Q_2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 11.2.8 ([256]). *Для w^*-непрерывной C_0-косинус оператор-функции $K(t,Q)$, $t \in \mathbb{R}$, имеем*

$$\mathcal{N}(Q) = \bigcap_{t>0} \mathcal{N}\Big(K(t,Q) - I^*\Big),$$

и w^*-$cl(\mathcal{R}(Q))$ *есть* w^*-$cl(\bigcup_{t>0} \mathcal{R}\Big(K(t,Q) - I^*\Big))$.

Если E является пространством Гротендика, то

$$\overline{\mathcal{R}(Q)} = w\text{-}cl\left(\bigcup_{t>0} \mathcal{R}\Big(K(t,Q) - I^*\Big)\right) =$$
$$= \overline{span\{\mathcal{R}(K(t,Q) - I^*) : t \in \mathbb{R}_+\}},$$

где замыкание понимается в сильной топологии E^*.

Введем обозначения

$$Q_s^1 := s\text{-}\lim_{t\to\infty} t^{-1}S(t,A)^*,$$

$$Q_w^1 := w\text{-}\lim_{t\to\infty} t^{-1}S(t,A)^*,$$

$$Q_{w^*}^1 := w^*\text{-}\lim_{t\to\infty} t^{-1}S(t,A)^*.$$

Предложение 11.2.9 ([256])**.** *Предположим, что при $Q = A^*$ выполнены условия*

(a) $\|S(t,A)\| = O(t)$ при $t\to\infty$;

(b) $w^*\text{-}\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\bigg((K(t+s,Q) - K(t-s,Q)\bigg)S(s,A)^*x^* = 0$ при всех $x^*\in E$ и $s\in\mathbb{R}_+$.

Тогда

(i) $Q_s^1 \subseteq Q_w^1 \subseteq Q_{w^*}^1$ - являются проекторами, причем $||Q_{w^*}^1\| \leqslant \underline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1}||S(t,A)||$, а $D(Q_s^1)\subseteq D(Q_w^1)$ и $D(Q_{w^*}^1)$ сильно замкнуты;

(ii) $\mathcal{R}(Q_s^1) = \mathcal{R}(Q_w^1) = \mathcal{R}(Q_w^1) = \mathcal{N}(Q)$, $\mathcal{N}(Q_s^1)\subseteq\mathcal{N}(Q_w^1)\subseteq \overline{\mathcal{R}(Q)}$ и

$$\mathrm{Sh} := \overline{\operatorname{span}\{\mathcal{R}(K(t,Q)-I^*) : t>0\}} \subseteq \mathcal{N}(Q_{w^*}^1) \subseteq w^*\text{-}cl(\mathcal{R}(Q)).$$

Если условие (b) заменить на более сильное условие

(b') $s\text{-}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\bigg(K(t+s,Q) - K(t-s,Q)\bigg)S(s,A)^* = 0$ при всех $s\in\mathbb{R}_+$, то $\mathrm{Sh}\subseteq\mathcal{N}(Q_s^1)$.

Предложение 11.2.10 ([256])**.** *Пусть выполнены условия (a) и (b) из Предложения 11.2.9 и E - пространство Гротендика. Тогда*

$$\mathcal{R}(Q_{w^*}^1) = \mathcal{N}(Q), \quad \mathcal{N}(Q_{w^*}^1) = \overline{\mathcal{R}(Q)}$$

и

$$D(Q_{w^*}^1) = \mathcal{N}(Q)\oplus\overline{\mathcal{R}(Q)} = E^*.$$

Если же выполнено и условие (b'), то $K(\cdot,Q)$ сильно $(C,1)$ эргодична, т.е. $D(Q_s^1) = E^*$.

Определение 11.2.2. Обозначим через Q_s^2, Q_w^2 и $Q_{w^*}^2$ чезаровские $(C,2)$-осреднения соответственно определению чезаровских $(C,1)$-осреднений Q_s^1, Q_w^1 и $Q_{w^*}^1$.

Предложение 11.2.11 ([256]). *Пусть* $\|T(t,A)\| = O(t^2)$ *при* $t \to \infty$ *и* $s\text{-}\lim\limits_{t\to\infty} t^{-2}K(t,Q)x^* = 0$ *при всех* $x^* \in D(Q)$. *Тогда* $Q_s^2 = Q_w^2 \subseteq Q_{w^*}^2$ *- ограниченные проекторы такие, что*

$$\|Q_{w^*}^2\| \leqslant \varliminf_{t\to\infty} 2t^{-2}||T(t,A)||, \quad \mathcal{R}(Q_s^2) = \mathcal{R}(Q_{w^*}^2) = \mathcal{N}(Q),$$

$$\mathcal{R}(Q) = \mathcal{N}(Q_s^2) \subseteq \mathcal{N}(Q_{w^*}^2) \subseteq w^*\text{-}cl(\mathcal{R}(Q)).$$

Подпространства $D(Q_s^2)$ *и* $D(Q_{w^*}^2)$ *сильно замкнуты в* E^* *и* $D(Q_s^2) = \mathcal{N}(Q) \oplus \overline{\mathcal{R}(Q)} = \{x^* \in E^* : \exists\, t_n \to \infty :$ $\lim\limits_{n\to\infty} 2t_n^{-2}T(t_n)x^*$ *существует*$\}$.

Предложение 11.2.12 ([256]). *Пусть*

$$Gx^* := s\text{-}\lim_{t\to 0+} t^{-1}S(t,A)^*x^*$$

для тех $x^* \in E^*$, *для которых предел существует. Тогда для* w^**-непрерывной* C_0*-косинус оператор-функции* $K(\cdot,Q)$ *с* $Q = A^*$, *имеем*

$$D(G) = \overline{\bigcup_{t>0} \mathcal{R}(S(t,A)^*)} = \{x^* \in E^* : \exists\, t_n \to \infty :$$
$$w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} t_n^{-1}S(t_n,A)^*x^* \text{ существует}\}.$$

При этом $G = I_{D(G)}$.

Глава 12

ВОЗМУЩЕНИЯ C_0-КОСИНУС ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

Теория возмущений C_0-косинус оператор-функций интересным образом отличается от теории возмущений полугрупп. С одной стороны, производящий оператор C_0-косинус оператор-функции лежит в более узком, чем $\mathcal{G}(M,\omega)$, классе операторов, например, он всегда порождает аналитическую C_0-полугруппу и поэтому достаточно просто определены его дробные степени $(-A)^\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. С другой стороны, до сих пор нет полной ясности, является ли возмущение M.Watanabe наиболее сильным возмущением и что происходит с SV мультипликативного семейства возмущений, если $SV(F(\cdot),t) = O(t^\alpha)$, $t \to 0+$, при некотором $0 < \alpha < 1$.

§ 12.1. Общие мультипликативные теоремы

Приведем следующую теорему (см. [191], Теорема 3.10) для $C(\cdot, A)$, которая удобна для практических приложений и будет использоваться нами несколько раз.

Теорема 12.1.1. *C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$, удовлетворяющая оценке $\|C(t,A)\| \leqslant Me^{\omega t}$ для всех $t \geqslant 0$, есть косинус оператор-функция с производящим оператором A тогда и только тогда, когда условие $\lambda > \omega$ влечет $\lambda^2 \in \rho(A)$ и имеет место*

$$\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t, A)\, dt.$$

Предложение 12.1.1 ([237])**.** *Пусть A – плотно определенный замкнутый линейный оператор в банаховом пространстве E и $\Re \in B(X)$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Если оператор $\Re A$ порождает C_0-косинус оператор-функцию $\tilde{C}(\cdot, A)$, то оператор $A\Re$ также порождает C_0-косинус оператор-функцию.

(ii) Если оператор $A\Re$ порождает C_0-косинус оператор-функцию $\hat{C}(\cdot, A)$ и при некотором вещественном λ оператор $\lambda - \Re A$ обратим, то оператор $\Re A$ также порождает C_0-косинус оператор-функцию.

(iii) Если оператор $A\Re$ порождает C_0-косинус оператор-функцию $\check{C}(\cdot, A)$ и $D((A\Re)^*) = D(A^*)$, то оператор $\Re A$ также порождает C_0-косинус оператор-функцию.

Определение 12.1.1. Говорят, что оператор $\Re \in B(E)$ принадлежит классу $M1(A)$ мультипликативных возмущений генератора A косинус операторной функции $C(\cdot, A)$, если оператор $B = \Re - I$ удовлетворяет условию $(M1)$:

Для всех непрерывных функций $f \in C([0,t]; E)$

$(M1_a)$ $\int_0^t S(t-s, A) B\, f(s) ds \in D(A)$,

$(M1_b)$ $\|A \int_0^t S(t-s, A) B f(s) ds\| \leqslant M\gamma_B(t) \|f\|_{[0,t]}$,

где $\gamma_B : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — некоторая непрерывная неубывающая функция с $\gamma_B(0) = 0$, а $\|f\|_{[0,t]} = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} \|f(s)\|$.

Замечание 12.1.1. Если $B + I \in M1(A)$, то $\|C(t+h, A)B - C(t,A)B\| \to 0$ при $h \to 0$ для любого t. Чтобы показать это, положим сначала в $(M1_b)$ $f(t) = x$ при $t \geqslant 0$. Тогда $\|(C(h,A) - I)B\| \to 0$ при $h \to 0$. Это вместе с тем, что $(C(\cdot, A) - I)B$ — C_0-семейство мультипликативных возмущений приводит к нашему утверждению.

Теорема 12.1.2 ([237])**.** *Пусть A — инфинитезимальный генератор косинус операторной функции $C(\cdot, A)$ на E. Если* *оператор $\Re$ принадлежит $M1(A)$, то $A\Re$ и $\Re A$ являются генераторами C_0-косинус операторных функций. Кроме того, C_0-косинус операторная функция $\Im(\cdot)$, порожденная $A\Re$ удовлетворяет соотношению $\|\Im(t) - C(t,A)\| = O(\gamma_B(t))\,(t \to 0^+)$.*

Замечание 12.1.2. (i) Если $(M1_a)$ и $(M1_b)$ выполняются для всех функций из плотного подмножества $C([0,t];E)$, то в силу замкнутости A, легко видеть, что они в действительности выполняются для всех f из $C([0,t];E)$. Следовательно, поскольку $(M1_a)$ выполняется для всех f из $C^1([0,t];E)$, которое плотно в $C([0,t];E)$, условие $(M1)$ можно заменить на эквивалентное условие

$$\|A\int_0^t S(t-s,A)Bf(s)ds\| \leqslant M\gamma_B(t)\|f\|_{[0,t]} \quad \text{при всех } \; f \in C^1([0,t];E). \tag{12.1}$$

Таким образом, нужно проверить только $(M1')$ на практике.
(ii) Если $(M1)$ выполняется с некоторым $\gamma_B(t) = o(t^2)$, то $\Im(\cdot) \equiv C(\cdot,A)$ (см. [237] Corollary 3.6), так что $A(I+B) = A$ и AB=0. Обратно, из последнего условия следует, что $C(\cdot,A)B = B$, а значит $A\int_0^t S(t-s,A)Bf(s)ds \equiv 0$ для всех $f \in C([0,t],X)$. Таким образом, $(M1)$ выполняется с некоторым $\gamma_B(t) = o(t^2)$ в том и только том случае, если $AB = 0$, и в этом случае $(M1)$ действительно выполняется с $\gamma_B(\cdot) \equiv 0$.

Пусть $(Z, |\cdot|)$ — банахово пространство, удовлетворяющее условию (Z) относительно $C(\cdot,A)$:
(Z_a) Z непрерывно вложено в E,
(Z_b) для всех непрерывных функций $\phi \in C([0,t],Z)$

$$\int_0^t S(t-s,A)\phi(s)ds \in D(A),$$

(Z_c) $\|A\int_0^t S(t-s,A)\phi(s)ds\| \leqslant \gamma(t)\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|\phi(s)|_Z$,

где $\gamma(\cdot) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная неубывающая функция с $\gamma(0) = 0$.

Легко проверяется условие (Z) для пространств $\mathcal{D}(A)$ и класса Фавара $(Fav_{C(\cdot)}, |\cdot|_{Fav_{C(\cdot)}})$. В самом деле, если $Z = \mathcal{D}(A)$, то выполняется (Z) с $\gamma(t) = O(t^2)$ при $t \to 0^+$.

Следствие 12.1.1. *Если Z – банахово пространство, удовлетворяющее условию (Z), то $I + B(E,Z) \subseteq M1(A)$, так что для любого $B \in B(E,Z)$ и $A(I+B)$ и $(I+B)A$ — генераторы косинус операторных функций.*

Определение 12.1.2. Говорят, что оператор $\Re \in B(E)$ принадлежит классу $M2(A)$ мультипликативных возмущений генератора A косинус операторной функции $C(\cdot, A)$, если оператор $B = \Re - I$ удовлетворяет соотношению

$$\delta_B(t) := \sup\{\int_0^t \|BS(s,A)Ax\| ds : x \in D(A), \|x\| \leqslant 1\} \to 0$$
$$\text{при } t \to 0^+. \tag{12.2}$$

Замечание 12.1.3. Как показал Фатторини [129] в случае $E = L_p$, имеем $\|AS(t,A)x\| = O(t^{2\alpha-1})$ при $t \to 0$ для $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $x \in D((A-cI)^\alpha)$. Поэтому $\Re \in M2(A)$, например, если $B = (A - cI)^{-\beta}$ при $\beta \geqslant 1/2$.

Теорема 12.1.3 ([237]). *Пусть A — инфинитезимальный генератор косинус операторной функции $C(\cdot, A)$ на E. Если оператор $\Re$ принадлежит $M2(A)$, то и $\Re A$ и $A\Re$ — генераторы C_0-косинус операторных функций. Кроме того, C_0-косинус операторная функция $C_1(\cdot)$, порожденная $\Re A$, удовлетворяет соотношению $\|C_1(t) - C(t,A)\| = O(\delta_B(t))\,(t \to 0^+)$.*

§ 12.2. Возмущения семейством $F(\cdot)$

Для любых фиксированного λ и оператора $B \in B(E)$ пусть $F_{B,\lambda}(\cdot)$ и $G_{B,\lambda}(\cdot)$ — функции, определенные как

$$F_{B,\lambda}(t)x := (\lambda^2 - A)\int_0^t S(s,A)Bx\,ds =$$
$$= \lambda^2 \int_0^t S(s,A)Bxds - (C(t,A) - I)Bx,\ x \in E,\ t \geqslant 0, \tag{12.3}$$

$$G_{B,\lambda}(t)x := B(\lambda^2 - A)\int_0^t S(s,A)x\,ds =$$
$$= \lambda^2 B \int_0^t S(s,A)xds - B(C(t,A) - I)x,\ x \in E,\ t \geqslant 0. \tag{12.4}$$

Следующая теорема дает характеризацию $M1(A)$ в терминах полувариации $F_{B,\lambda}(\cdot)$.

Теорема 12.2.1 ([237]). *Оператор $\Re \in B(E)$ принадлежит $M1(A)$, т.е. $B = \Re - I$ удовлетворяет условию $(M1)$, тогда и только тогда, когда $SV(F_{B,\lambda}(\cdot), t) = o(1)\,(t \to 0^+)$ для некоторого (и всех) $\lambda > \omega$. Кроме того, в условии $(M1_b)$ можно выбрать $\gamma_B(t) = SV(F_{B,\lambda}(\cdot), t)$ в случае $SV(F_{B,\lambda}(\cdot), t) = O(t^2)$, и $\gamma_B(t) = O(t^2)$ в случае $SV(F_{B,\lambda}(\cdot), t) = o(t^2)$.*

Теперь из теоремы 12.2.1 можно вывести следующую теорему об аддитивном возмущении.

Теорема 12.2.2. *Пусть A — генератор C_0-косинус операторной функции $C(\cdot, A)$ на E. Если $P \in B(\mathcal{D}(A), E)$ таково, что*

$$\int_0^t S(t-s)Pg(s)ds \in D(A), \tag{12.5}$$

$$\|A\int_0^t S(t-s)Pg(s)ds\| \leqslant \gamma_P(t) \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|g(s)\|_{\mathcal{D}(A)} \tag{12.6}$$

для всех $g \in C([0,t], \mathcal{D}(A))$ и некоторой функции $\gamma_P(\cdot)$ с $\gamma_P(t) = o(1)\,(t \to 0^+)$, то операторы $A+P$ и $A+(A-\lambda)P(A-\lambda)^{-1}\,(\lambda > \omega)$ являются генераторами C_0-косинус оператор-функций.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что A обратим, так что $A + P = (I + PA^{-1})A$. В ввиду теоремы 12.2.1, нужно только проверить условие $(M1)$ для оператора $B = PA^{-1}$. В самом деле, если $f \in C([0,t]; E)$, то $A^{-1}f \in C([0,t], \mathcal{D}(A))$, так что полагая $g = A^{-1}f$ в (12.5) и (12.6), имеем

$$\int_0^t S(t-s,A)Bf(s)ds = \int_0^t S(t-s,A)P(A^{-1}f)(s)ds \in D(A)$$

и

$$\|A\int_0^t S(t-s,A)Bf(s)ds\| \leqslant \gamma_P(t) \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|A^{-1}f(s)\|_{\mathcal{D}(A)} \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_P(t)(\|A^{-1}\|+1)\|f\|_{[0,t]}.$$

Следствие 12.2.1. *Пусть A — генератор косинус операторной функции $C(\cdot)$ на E. Если P — непрерывный оператор, действующий из $D(A)$ в Z (Z — банахово пространство, удовлетворяющее условию (Z)), то $A+P$ и $A+(A-\lambda)P(A-\lambda)^{-1}$ $(\lambda > \omega)$ — генераторы косинус операторных функций.*

Доказательство. Предположим, что $P \in B(\mathcal{D}(A), Z)$, и пусть $g \in C([0,t], D(A))$. Тогда $Pg \in C([0,t]; Z)$ и, в силу условия (Z), $\int_0^t S(t-s,A)Pg(s)ds \in D(A)$ и

$$\|A\int_0^t S(t-s)Pg(s)ds\|$$
$$\leqslant \gamma_P(t) \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |Pg(s)|_Z \leqslant \gamma_P(t)\|P\|_{B(\mathcal{D}(A),Z)} \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|g(s)\|_{\mathcal{D}(A)}.$$

Теперь результат следует из теоремы 12.2.2.

§ 12.3. Возмущения семейством $G(\cdot)$, аддитивные возмущения

Следующая теорема дает характеризацию $M2(A)$ в терминах сильной вариации $G_{B,\lambda}(\cdot)$ при $x \in D(A)$, более точно, с помощью

$$\beta(G_{B,\lambda}(\cdot),t) := \sup\{Var(G_{B,\lambda}(\cdot)x,t);\ x \in D(A), \|x\| \leqslant 1\}. \quad (12.7)$$

Теорема 12.3.1 ([237]). *Оператор $\Re \in B(E)$ принадлежит $M2(A)$, т.е. $B = \Re - I$ удовлетворяет условию $(M2)$, тогда и только тогда, когда $\beta(G_{B,\lambda}(\cdot),t) = o(1)\,(t \to 0^+)$ для некоторого (и любого) $\lambda > \omega$. Кроме того, $\beta(G_{B,\lambda}(\cdot),t)$ и функция $\delta_B(t)$ в условии $(M2)$ имеет тот же порядок сходимости в нуле, если только она имеет порядок не больший, чем $O(t^2)$.*

Доказательство. Из (12.4) можно увидеть, что

$$\mathrm{Var}(G_{B,\lambda}(\cdot)x,t) = \mathrm{Var}(BC(\cdot,A)x,t) + \lambda^2\|B\|\int_0^t \|S(s,A)x\|ds$$

если вариация существует. Поскольку при $x \in D(A)$

$$\mathrm{Var}(BC(\cdot,A)x,t) = \int_0^t \|\frac{d}{ds}BC(s,A)x\|ds = \int_0^t \|BS(s,A)Ax\|ds,$$

имеем, что $\|\beta(G_{B,\lambda}(\cdot),t) - \delta_B(t)\| \leqslant \lambda^2\|B\|\int_0^t \|S(s,A)\|ds \leqslant \lambda^2\|B\|Me^{\omega t}t^2$. Следовательно, $\delta_B(t)$ стремится к 0 при $t \to 0^+$ тогда и только тогда, когда $\beta(G_{B,\lambda}(\cdot),t)$ стремится к нулю. Они имеют одинаковый порядок сходимости в нуле, если одна из них имеет порядок, меньший или равный чем $O(t^2)$.

Вообще говоря, $M1(A)$ и $M2(A)$ являются собственными подмножествами $I + B(E)$. Каждое из условий $M1(A) = I + B(E)$ и $M2(A) = I + B(E)$ эквивалентно тому, что A ограничен. В самом деле, если для любого $B \in B(E)$ оператор $(I+B)A$ порождает косинус операторную функцию, то при $B = -2I$ получаем, что $-A$ также порождает косинус операторную функцию. Следовательно, и A и $-A$ порождают аналитические полугруппы, а значит A ограничен.

Из Теоремы 12.3.1 выводим следующую теорему об аддитивном возмущении.

Теорема 12.3.2 ([237]). *Пусть A — генератор C_0-косинус операторной функции $C(\cdot)$ на E. Если P — оператор, удовлетворяющий условиям*

$$D(A) \subset D(P) \text{ и } P(\lambda^2 I - A)^{-1} \in B(E) \text{ для некоторого } \lambda > \omega; \quad (12.8)$$

$$\theta_P(t) := \sup\{\int_0^t \|PS(s)x\| ds; x \in D(A), \|x\| \leqslant 1\} < 1 \quad \text{для некоторого } t > 0, \tag{12.9}$$

то операторы $A+P$ *и* $A+(A-\lambda)P(A-\lambda)^{-1}$ *являются генераторами* C_0*-косинус оператор-функций. Кроме того,* C_0*-косинус оператор-функция* $C_1(\cdot)$*, порожденная* $A+P$ *удовлетворяет соотношению* $\|C_1(t) - C(t,A)\| = O(\theta_P(t))\,(t \to 0^+)$.

Доказательство. Можно считать, что A обратим, так что $A + P = (I + PA^{-1})A$. Положим $B = PA^{-1}$. Тогда $\int_0^t \|BS(s)Ax\| ds \leqslant \int_0^t \|PS(t)x\| ds$ при всех $x \in D(A)$. Сдедовательно, из (12.9) следует, что $\delta_B(t) \leqslant \theta_P(t) < 1$ при некотором $t > 0$, а заключение следует из теоремы 12.3.1.

Из теоремы 12.2.2 можно вывести следующую теорему возмущения Ватанабе [284], теорема 2.

Следствие 12.3.1 ([237]). *Пусть* A *— генератор* C_0*-косинус оператор-функции* $C(\cdot, A)$ *на* E*. Если* $P \in B(E^1, E)$*, то* $A + P$ *и* $A + (A-\lambda)P(A-\lambda)^{-1}\,(\lambda > \omega)$ *— генераторы косинус операторных функций. Кроме того,* C_0*-косинус–функция* $C_1(\cdot)$*, порожденная* $A + P$ *удовлетворяет соотношению* $\|C_1(t) - C(t,A)\| = O(t)\,(t \to 0^+)$.

Доказательство. В [252] доказано, что из $P \in B(E^1, E)$ следует (12.8) . Для доказательства (12.9) , предположим, что $x \in D(A)$. Тогда для $t \in [0,1]$ имеем

$$\|PS(t,A)x\| \leqslant \|P\|_{B(E^1,E)} \|S(t,A)x\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \|P\|_{B(E^1,E)} [\|S(t,A)x\| + \sup_{0 \leqslant \eta \leqslant 1} \|AS(\eta,A)S(t,A)x\|] \leqslant K\|x\|.$$

Поэтому $\theta_P(t) = O(t)\,(t \to 0^+)$ и значит утверждение следует из теоремы 12.3.2.

Из теоремы 12.3.2 можно также вывести следующее следствие: при $a = \infty$, оно является теоремой A из [259] (см. также [252], следствие 2.1]), а когда $a < \infty$, оно является следствием 2.2 из [252], которое содержит теорему 3.2 из [259].

Следствие 12.3.2 ([237]). *Пусть* A *— генератор косинус операторной функции* $C(\cdot)$ *на* E*. Пусть* P *— оператор, удовлетворяющий условиям* (12.8) *и*

$$L(\lambda) := \sup\{\int_0^a e^{-\lambda s} \|PS(s)x\| ds;\; x \in D(A), \|x\| \leqslant 1\} < \infty \tag{12.10}$$

для некоторых $a \in (0,\infty]$ *и* $\lambda > \omega$. *Пусть* $L(\infty) := \lim_{\lambda\to\infty} L(\lambda)$. *Тогда для каждого* ε *с* $|\varepsilon| < L(\infty)^{-1}$, $A+\varepsilon P$ *and* $A+\varepsilon(A-\lambda)P(A-\lambda)^{-1}\,(\lambda > \omega)$ *являются генераторами* C_0*-косинус оператор-функций.*

Доказательство. Выберем числа $0 < \mu < \mu_1 < \mu_2 < 1$ такие, что $|\varepsilon| = \mu L(\infty)^{-1}$. Фиксируем настолько большое λ, что $L(\lambda)/L(\infty) < \frac{\mu_1}{\mu}$, а затем фиксируем настолько малое $t \in (0,a)$, что $e^{\lambda t} < \frac{\mu_2}{\mu_1}$. Тогда при всех $x \in D(A)$ с $\|x\| \leqslant 1$ имеем

$$\int_0^t \|\varepsilon PS(s,A)x\| ds \leqslant |\varepsilon| e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} \|PS(s,A)x\| ds \leqslant$$
$$|\varepsilon| e^{\lambda t} L(\lambda) = e^{\lambda t} \mu L(\lambda)/L(\infty) \leqslant \frac{\mu_2}{\mu_1} \mu \frac{\mu_1}{\mu} = \mu_2 < 1,$$

т.е. $\theta_{\varepsilon P}(t) < 1$. Утверждение теперь следует из теоремы 12.3.2.

Из этого следствия Симудзу и Миядера смогли вывести обобщение (следствие 2.2 в [259]) теоремы возмущения Фатторини [136] и Тревиса и Вебба [272]. Последняя теорема утверждает, что если замкнутый оператор P удовлетворяет соотношениям $D(A) \subset D(P)$ и $PS(\cdot,A)x \in C([0,1];E)$ для любого $x \in E$, то $A+P$ является генератором C_0-косинус операторной функции. Это также является непосредственным следствием теоремы 12.3.2 как это ясно из соотношения $\theta_P(t) = O(t)\,(t \to 0^+)$.

Рассмотрим далее возмущения смешанного типа, вызванные C_0-семейством мультипликативных и аддитивных возмущений. Таким образом, следующие две теоремы непосредственно следуют из теорем 12.2.1, 12.3.1 и следствия 12.3.1.

Теорема 12.3.3 ([237]). *Если* C_0*-семейство мультипликативного возмущения* $F(\cdot)$ *при* $C(\cdot,A)$ *локально имеет ограниченную полувариацию и если* $SV(F(\cdot),t) = o(1)\,(t \to 0^+)$, *то оператор* $A_1 := A(I-\lambda\hat{F}(\lambda)) + \lambda^3\hat{F}(\lambda)$, $\lambda > \omega$, *является инфинитизимальным генератором некоторой* C_0*-косинус операторной функции* $C_1(\cdot)$.

Теорема 12.3.4 ([237]). *Если* C_0*-семейство аддитивных возмущений* $G(\cdot)$ *при* $C(\cdot,A)$ *имеет локально ограниченную сильную вариацию и если* $\beta(F(\cdot),t) = o(1)\,(t \to 0^+)$, *то оператор* $A_2 := (I-\lambda\hat{G}(\lambda))A + \lambda^3\hat{G}(\lambda)$, $\lambda > \omega$, *является инфинитезимальным генератором некоторой* C_0*-косинус операторной функции* $C_2(\cdot)$.

§ 12.4. Сравнение косинус оператор-функций

В этом параграфе даются некоторые характеризации свойства, что $\|C(t,A_1)-C(t,A)\| = O(t^2)\,(t\to 0^+)$, а далее применяем теорему 12.1.3 с тем, чтобы показать, что $\|C(t,A_1)-C(t,A)\| = O(t^2)\,(t\to 0^+)$ и $D(A)\subseteq D(A_1)$ в том и только том случае, если A_1 — ограниченное аддитивное возмущение A.

Теорема 12.4.1 ([237]). *Пусть $C(\cdot,A)$ — C_0-косинус операторная функция, а A_1 — линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) A_1 порождает C_0-косинус операторную функцию $C(\cdot,A_1)$, удовлетворяющую условию

$\|C(t,A_1)-C(t,A)\| = O(t^2)\,(t\to 0^+)$;

(ii) Существует $B\in B(E,Fav_{C(\cdot,A)})$ такой, что $A_1 = A(I-B)+\lambda^2 B$ для некоторого $\lambda>\omega$;

(iii) Существует $B\in B(E)$ такой, что функция $F(\cdot)\equiv F_{B,\lambda}(\cdot)$, определенная в (12.3), квадратично липшицева и $A_1 = A(I-\lambda\hat F(\lambda))+\lambda^3\hat F(\lambda)$;

(iv) A_1 порождает косинус операторную функцию $C(\cdot,A_1)$, $D(A_1^*) = D(A^*)$, а $A_1^*-A^*$ — ограниченный оператор, действующий из $D(A^*)$ в E^*;

(v) A_1 порождает косинус операторную функцию $C(\cdot,A_1)$ и $\|(\lambda^2 I-A_1)^{-1}-(\lambda^2 I-A)^{-1}\| = O(\lambda^{-4})\,(\lambda\to\infty)$.

Доказательство. Доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) аналогично доказательству таковой для C_0-полугрупп. Пусть B — оператор, определенный как $Bx := x-(\lambda^2 I-A)^{-1}(\lambda^2 I-A_1)x$ для $x\in D(A_1)$. Так как для всех $x\in D(A_1)$

$$\|Bx\| =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\|x-\lambda^2(\lambda^2 I-A)^{-1}x+\frac{2}{\eta^2}(\lambda^2 I-A)^{-1}(C(\eta,A_1)x-x)\| =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\|x-\lambda^2(\lambda^2 I-A)^{-1}x+\frac{2}{\eta^2}(\lambda^2 I-A)^{-1}(C(\eta,A)x-x)-$$

$$-\frac{2}{\eta^2}(\lambda^2 I-A)^{-1}(C(\eta,A)x-C(\eta,A_1)x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\eta\to 0}\|(\lambda^2 I-A)^{-1}\|\frac{2}{\eta^2}\|C(\eta,A)-C_1(\eta,A_1)\|\|x\| \leqslant$$

$$\leqslant K\|(\lambda^2-A)^{-1}\|\,\|x\|,$$

то B ограничен и может быть продолжен до ограниченного оператора (также обозначаемого через B), действующего во всем пространстве E. Для того, чтобы показать, что B непрерывно отображает E в $Fav_{C(\cdot,A)}$, положим $y = Bx$ при $x\in D(A_1)$.

Тогда

$$\limsup_{\eta\to 0}\frac{2}{\eta^2}\|C(\eta,A)y-y\|$$

$$\leqslant \limsup_{\eta\to 0}\frac{2}{\eta^2}(\|(\lambda^2\eta^2-C(\eta,A)+I)(x+y)-(\lambda^2\eta^2-C(\eta,A_1)+I)x\|$$

$$+\|C(\eta,A)x-C(\eta,A_1)x\|)+2\lambda^2\|y\|$$

$$\leqslant K\|x\|+2\lambda^2\|y\|\leqslant K(1+2\lambda^2\|(\lambda^2 I-A)^{-1}\|)\|x\|,$$

так что $|Bx|_{Fav_{C(\cdot,A)}}\leqslant K(1+(1+2\lambda^2)\|(\lambda^2 I-A)^{-1}\|)\|x\|$ при всех $x\in D(A_1)$ (и, следовательно, для всех $x\in E$). Из соотношения $(\lambda^2 I-A)(x-Bx)=(\lambda^2 I-A_1)x$ имеем $A_1x=A(I-B)x+\lambda^2 Bx$ для всех $x\in D(A_1)$, т.е. $A_1\subseteq A(I-B)+\lambda^2 B$. Поскольку $Fav_{C(\cdot,A)}$ удовлетворяет условию (Z), то из следствия 12.1.1 вытекает, что $A(I-B)+\lambda^2 B$ есть генератор C_0-косинус операторной функции и, следовательно, совпадает с A_1.

Применяя преобразование Лапласа к $F(\cdot)$, получаем, что $\hat{F}(\mu)=\lambda^2\mu^{-1}(\mu^2 I-A)^{-1}B-\mu(\mu^2 I-A)^{-1}B+\mu^{-1}B$, так что $B=\lambda\hat{F}(\lambda)$. Далее, используя (12.3), для всех $x\in E$ имеем

$$|\ \|F(t)x\|-\|(C(t,A)-I)Bx\|\ |\leqslant$$

$$\leqslant\|\lambda^2\int_0^t S(s,A)Bxds\|=O(t^2)\,(t\to 0^+),$$

откуда следует, что $B\in B(E,Fav_{C(\cdot,A)})$ тогда и только тогда, когда $\|F(t)\|=O(t^2)\,(t\to 0^+)$. Следовательно, (ii) и (iii) эквивалентны.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Ввиду теоремы 12.3.3, нужно показать только то, что если $F(t)=O(t^2)\,(t\to 0^+)$, то $Var(F(\cdot),t)=O(t^2)\,(t\to 0^+)$. Однако, в силу (12.3), это эквивалентно тому, чтобы показать, что из $\|(C(t,A)-I)B\|=O(t^2)\,(t\to 0^+)$ следует, что $Var(C(\cdot,A)B,t)=O(t^2)\,(t\to 0^+)$. Следовательно, предположим, что $\|(C(s,A)-I)B\|\leqslant Ks^2$ for $0\leqslant s\leqslant\tau$. Для любого подразбиения $\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$ of $[0,t]\subseteq[0,1]$ с $h_i=t_i-t_{i-1}\leqslant\tau$, пусть n_i — наибольшее целое, такое, что $n_ih_i\leqslant t_i$. Имеем

$$C(t_i,A)-C(t_{i-1},A)=C(t_{i-1},A)-C(t_{i-1,A}-C(t_i-t_{i-1}))+$$
$$+2C(t_{i-1},A)(C(t_i-t_{i-1},A)-I),$$

а значит

$$\|C(t_i,A)-C(t_{i-1},A)\|\leqslant\|C(t_i-n_ih_i,A)-C((n_i+1)h_i-t_i,A)\|+$$
$$+2KMe^{\omega t}n_ih_i^2\leqslant 2KMe^{\omega t}(n_i+2)h_i^2\leqslant 4KMe^{\omega t}th_i.$$

Поэтому
$$\sum_{i=1}^{n}\|C(t_i,A)-C(t_{i-1},A)\|\leqslant 4KMe^{\omega t}t\sum_{i=1}^{n}h_i\leqslant 4KMe^{\omega t}t^2.$$
Следовательно, $Var(C(\cdot,A)B,t)=O(t^2)\,(t\to 0^+)$.

Импликация (i) $\Leftrightarrow$ (iv) доказана в ([235], теорема 3.5).

Для доказательства импликации (iv) $\Rightarrow$ (v) запишем
$$\|(\lambda^2I-A_1)^{-1}-(\lambda^2I-A)^{-1}\|=$$
$$=\|(\lambda^2I-A_1^*)^{-1}(A_1^*-A^*)(\lambda^2I-A^*)^{-1}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|(\lambda^2I-A_1)^{-1}\|\|A_1^*-A^*\|\|(\lambda^2I-A)^{-1}\|=O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right).$$
Наконец, чтобы установить импликацию (v) $\Rightarrow$ (i), запишем (см. [235], теорема 3.9)
$$\|C(t,A_1)x-C(t,A)x\|=$$
$$=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^4\|(\lambda^2I-A_1)^{-1}(C(t,A_1)-C(t,A))(\lambda^2I-A)^{-1}x\|\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{\lambda\to\infty}\|\int_0^t S(t-s,A_1)\lambda^4((\lambda^2I-A_1)^{-1}-$$
$$-(\lambda^2I-A)^{-1})C(s,A)xds\|\leqslant Kt^2\|x\|.$$

Следовательно, возмущения смешанного типа вида $A_1=A(I-B)+\lambda^2B$ с $B\in B(E,Fav_{C(\cdot,A)})$ характеризуют те косинус операторные функции $C(\cdot,A_1)$, которые удовлетворяют соотношению $\|C(t,A_1)-C(t,A)\|=O(t^2)\,(t\to 0^+)$. В этом случае, хотя и $D(A_1^*)=D(A^*)$, область определения A_1 может не содержать области определения A. Какого рода косинус операторные функции $C(\cdot,A_1)$ обладают тем свойством, что $D(A)\subseteq D(A_1)$ и $\|C(t,A_1)-C(t,A)\|=O(t^2)\,(t\to 0^+)$? Ясно, что это — аддитивные возмущения A ограниченными операторами порождают C_0-косинус операторные функции с этим свойством. Следующая теорема показывает, что они действительно характеризуют это свойство. Другая характеризация — это возмущение смешанного типа вида $A_1=(I-B)A+\lambda^2B$ с $R(B^*)\subseteq Fav_{C^*(\cdot,A)}$.

Теорема 12.4.2. *Пусть $C(\cdot,A)$ — C_0-косинус операторная функция. Для любого оператора A_1 эквивалентны следующие утверждения:*

(i) $D(A)\subseteq D(A_1)$ и A_1 порождает косинус операторную фуекцию $C_1(\cdot)$ такую, что

$\|C(t,A_1)-C(t,A)\|=O(t^2)\,(t\to 0^+)$;

(ii) Существует оператор $B \in B(E)$ такой, что $R(B^*) \subseteq Fav_{C^*(\cdot,A)}$ и $A_1 = (I-B)A + \lambda^2 B$ для некоторого $\lambda > \omega$;

(iii) Существует $B \in B(E)$ такой, что функция $G(\cdot) \equiv G_{B,\lambda}(\cdot)$, определенная в (12.4), квадратично липшицева в 0 и $A_1 = (I - \lambda\hat{G}(\lambda))A + \lambda^3\hat{G}(\lambda)$;

(iv) $A_1 = A + Q$ для некоторого $Q \in B(E)$.

Доказательство. Импликация (iv) $\Rightarrow$ (1) очевидна. Докажем сначала импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii)+(iv). Так как $D(A) \subseteq D(A_1)$, то можно определить ограниченный оператор $B := I - (\lambda^2 I - A_1)(\lambda^2 I - A)^{-1} = (A_1 - A)(\lambda^2 I - A)^{-1}$ для $\lambda > \omega$. Затем имеем $A_1 x = (I-B)Ax + \lambda^2 Bx$ for $x \in D(A)$. Используя (12.4), можно написать

$$G(t)x = (A_1 - A)\int_0^t S(s,A)x\,ds,\ x \in E,\ t \geqslant 0.$$

Так как $\|(A_1 - A)x\| \leqslant \overline{\lim\limits_{t\to 0^+}} \frac{2}{t^2}\|(C(t,A_1) - C(t,A))x\| \leqslant K\|x\|$ для всех $x \in D(A)$, то оператор $A_1 - A$ допускает ограниченное продолжение $Q \in B(E)$. Таким образом, (iv) выполнено. Отсюда также следует, что

$$\|G(t)x\| \leqslant Var(G(\cdot)x,t) \leqslant \|Q\|\int_0^t \|S(s,A_1)x\| ds \leqslant$$
$$\leqslant \|Q\| M e^{\omega t} t^2 \|x\|,\ x \in E,$$

так что $\|G(t)\| \leqslant \beta(G_{B,\lambda}(t) = O(t^2)$. Из теорем 12.2.1 и 12.1.3 следует, что$(I-B)A + \lambda^2 B$ является генератором косинус операторной функции и, следовательно, совпадает с A_1. Далее, используя (12.4) для всех $x^* \in E^*$ имеем

$$|\ \|G^*(t)x^*\| - \|(C(t,A)^* - I^*)B^* x^*\|\ | \leqslant$$
$$\leqslant \|\lambda^2 \int_0^t S(s,A)^* B^* x^* ds\| = O(t^2)\,(t \to 0^+).$$

Следовательно, $\|G(t)\| = O(t^2)\,(t \to 0^+)$ в том и только том случае, если $R(B^*) \subseteq Fav_{C^*(\cdot,A)}$. Это, в частности, и заверщает доказательство (ii).

Для доказательства импликации (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), теперь осталось показать, что $B = \lambda\hat{G}(\lambda)$. Это может быть сделано с помощью преобразования Лапласа $G_{B,\lambda}(\cdot)$ в (12.4).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Достаточно показать, что из $R(B^*) \subseteq Fav_{C^*(\cdot,A)}$ следует ограниченность BA. В самом деле, для всех $x \in D(A)$

с $\|x\| \leqslant 1$ и для всех $x^* \in E^*$ имеем

$$|\langle BAx, x^*\rangle| = |\lim_{t\to 0} 2t^{-2}\langle (C(t,A)-I)x, B^*x^*\rangle|$$
$$\leqslant \overline{\lim_{t\to 0}} 2t^{-2}\|(C(t,A)^* - I^*)B^*x^*\|.$$

Из принципа равномерной ограниченности следует, что $\{BAx : x \in D(A), \|x\| \leqslant 1\}$ ограничен. Следовательно, оператор BA ограничен в $D(A)$.

§ 12.5. Сохранение свойств при аддитивных возмущениях

Предложение 12.5.1 ([221], [284]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ и $B \in B(E)$. Тогда оператор $A+B$ порождает C_0-косинус оператор-функцию и $\|C(t,A+B) - C(t,A)\| \to 0$ при $\|B\| \to 0$ равномерно по любому компакту из $\mathbb{R}$.*

Предложение 12.5.2 ([220]). *Если в условиях Предложения 12.5.1 $\tilde{\omega} > \omega + \frac{M}{\omega}\|B\|$, то существует такое число $\tilde{M} = \tilde{M}(\omega)$, что*

$$\|C(t,A+B)\| \leqslant \tilde{M}e^{\tilde{\omega}|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12.11}$$

Предложение 12.5.3 ([130]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$. Тогда для $x \in E$*

$$C(t,\zeta^2 I + A)x = C(t,A)x + \zeta t \int_0^t \frac{I_1(\zeta\sqrt{t^2-s^2})}{\sqrt{t^2-s^2}} C(s,A)x\, ds, \tag{12.12}$$

где I_1 – функция Бесселя и

$$\|C(t,A+\zeta^2 I)\| \leqslant M\, ch(\sqrt{\zeta^2+\omega^2}\, t) \quad \textit{при} \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

В [130], [262], [263] приведены также другие, более точные, оценки выражения $C(t, A \pm \zeta^2 I)$ для банаховых и гильбертовых пространств.

Предложение 12.5.4 ([252], [285]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ и $D(A) \subseteq D(G)$. Если существуют такие $\omega' \geqslant 0$ и $M' \geqslant 1$, что $\rho(A)$ содержит множество $\{z : z > \omega'\}$ и функция $G(z^2 I - A)^{-1}$ бесконечно дифференцируема, причем*

$$\frac{1}{n!}\|(z-\omega')^{n+1}\Big(\frac{d}{dz}\Big)^n \Big(G(z^2 I - A)^{-1}\Big)x\| \leqslant M'\|x\|$$

при $x \in E$ и любых $n \in \mathbb{N}$ и $z > \omega'$, то $A+G$ порождает C_0-косинус оператор-функцию.

Предложение 12.5.5 ([142]). *Если $A, G \in \mathcal{C}(M,\omega)$, то оператор $A+G$ (или его замыкание), вообще говоря, не обязан порождать C_0-косинус оператор-функцию даже в случае, когда $C(\cdot,A)$ и $C(\cdot,G)$ коммутируют. Однако, всегда $\overline{A+B} \in \mathcal{H}(\pi/2,\omega)$.*

Предложение 12.5.6 ([19]). *Пусть $A, G \in \mathcal{C}(M,\omega)$ и $D_1 := D(A) \cap D(G)$ плотно в E. Тогда на D_1 определена "обобщенная" косинус-функция (в смысле выполнения условий (i)-(ii) определения 2.3.1)*

$$\tilde{C}(t, A+G)x = C(t,A)x + \frac{t^2}{2}\int_0^1 j_1(t\sqrt{1-s^2}, A)C(ts, G)x\,ds,$$

где $j_1(t,A) := \frac{4}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-s^2}C(ts,A)x\,ds$, $x \in D_1$. Если $A+G$ порождает C_0-косинус оператор-функцию $C(t, A+G)$, то $C(t, A+G) = \tilde{C}(t, A+G)$, $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 12.5.7 ([272]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ и оператор $G \in \mathcal{C}(E)$ таков, что*

(i) для C_0-синус оператор-функции $\mathcal{R}(S(t,A)) \subseteq D(G)$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

(ii) функция $GS(t,A)$ сильно непрерывна по $t \in \mathbb{R}$.

Тогда оператор $A+G$ порождает C_0-косинус оператор-функцию. При этом

$$C(t, A+G)x = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{C}_k(t) \quad \text{и} \quad S(t, A+G)x = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{S}_k(t), \quad (12.13)$$

где $\hat{C}_0(t) := C(t,A)$, $\hat{C}_k(t) := \int_0^t C(t-s,A)G\hat{S}_{k-1}(s)\,ds$ и $\hat{S}_0(t) := S(t,A)$, $\hat{S}_k(t) := \int_0^t S(t-s,A)G\hat{S}_{k-1}(s)\,ds$ и ряды (12.13) сходятся абсолютно в $B(E)$.

Предложение 12.5.8 ([272]). *В условиях Предложения 12.5.7 имеет место равенство*

$$(\lambda I - A - G)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(G(\lambda I - A)^{-1})^k.$$

Предложение 12.5.9 ([270]). *Если в условиях Предложения 12.5.7 C_0-синус оператор-функция $S(\cdot,A)$ компактна, то и C_0-синус оператор-функция $S(\cdot, A+G)$ тоже компактна.*

Предложение 12.5.10 ([266]). *Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{C}(M,\omega)$ и $D(A_1) \subseteq D(A_2)$. Тогда*

$$C(t,A_1)x - C(t,A_2)x = \int_0^t S(t-s,A_2)(A_1-A_2)S(s,A_1)x\,ds$$

при всех $x \in D(A_1)$.

Теорема 12.5.1 ([266], [270]). *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ *и* $G \in \mathcal{C}(E)$ *таковы, что*
(i) $D(A) \subseteq D(G)$ *;*
(ii) существует непрерывная функция $K(t)$ *со свойством*

$$\|GS(t,A)x\| \leqslant K(t)\|x\| \quad \text{при всех} \quad x \in D(A).$$

Тогда оператор $A+G$ *порождает* C_0*-косинус оператор-функцию.*

Предложение 12.5.11 ([270]). *Пусть оператор* $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ *удовлетворяет условию (F) с оператором* $G \in \mathcal{C}(E)$*, причем для некоторого оператора* $Q \in \mathcal{C}(E)$ *выполняется условие* $D(G) \subseteq D(Q)$. *Тогда* $A+Q$ *порождает* C_0*-косинус оператор-функцию.*

Предложение 12.5.12 ([270]). *Пусть в Предложении 12.5.11 условие включения областей заменено на условие* $D(A) \subseteq D(Q)$. *Если оператор* Q *является* G*-ограниченным, то оператор* $A+Q$ *порождает* C_0*-косинус оператор-функцию.*

Предложение 12.5.13 ([259], [267]). *Пусть* $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$, $G \in \mathfrak{M}(C(t,A))$, $G(\lambda I - A)^{-1} \in B(E)$ *и* $|\varepsilon| < K_\infty^{-1}$. *Тогда оператор* $A + \varepsilon G$ *порождает* C_0*-косинус оператор-функцию,* $\lim_{\varepsilon\to 0}\|C(t,A+\varepsilon G) - C(t,A)\| = 0$ *равномерно на любом компакте из* $\mathbb{R}$ *и*

$$C(t,A+\varepsilon G) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overline{C}_k(t),$$

где $\overline{C}_0(t) := C(t,A)$; $C_k(t) := \int_0^t \overline{C}_{k-1}(t-s)GS(s,A)x\,ds$, $x \in D(A)$, $\overline{C}_k(t)$ *– непреывное расширение* $C_k(t)$ *на все* E *и* $\mathfrak{M}$ *- класс возмущений по Миядере.*

Предложение 12.5.14 ([207]). *Пусть* C_0*-косинус оператор-функции* $C(t,A_1)$ *и* $C(t,A_2)$ *таковы, что* $\|C(t,A_1)\| \leqslant Me^{\omega t}$ *и* $\|C(t,A_2)\| \leqslant Ne^{\nu t}$ *при* $t \in \overline{\mathbb{R}}$ *и* $\|(A_1 - A_2)x\| \leqslant a\|x\| + b\|A_1 x\|$ *при* $x \in D(A_1)$. *Тогда для* $z > \omega$ *имеем*

$$\|\Big(C(t,A_1) - C(t,A_2)\Big)(z^2 I - A_1)^{-1}\| \leqslant \begin{cases} \frac{MN}{2\nu} Q t sh(\omega t), \\ \frac{MN}{\omega^2-\nu^2} Q\Big(ch(\omega t) - ch(\nu t)\Big), \end{cases}$$

где $Q := (1+M)b + \frac{(a+b\omega^2)M}{z^2-\omega^2}$.

Предложение 12.5.15 ([207]). *Если в условиях Предложения 12.5.14* $a,b \to 0$*, то*

$$s\text{-}\lim_{a,b\to 0} C(t,A_2)x = C(t,A_1)x \quad \text{при} \quad x \in D(A_1).$$

Предложение 12.5.16. *Пусть* $K(t, A)$ – w^**-непрерывная косинус-функция и* B – w^*-w^* *непрерывный оператор на* E^*. *Тогда* $A + B$ *является* w^**-производящим оператором* w^**-непрерывной косинус-функции* $K(t, A + B)$ *и* $\lim_{\|B\|\to 0} \|K(t, A + B) - K(t, A)\| = 0$ *равномерно на любом компакте* $t \in [0, T]$.

§ 12.6. Интегральный оператор в $L^p([0, T]; E)$

Для C_0-групп операторов и C_0-косинус оператор функций можно сформулировать специфические теоремы о возмущении, которые предполагают некоторые условия "гиперболичности". Чтобы сделать это дадим некоторые определения.

Пусть $J \subseteq \mathbb{R}$ – некоторый интервал. Обозначим через $\Sigma(J; E)$ векторное пространство всех линейных комбинаций отображений в виде $\chi_j x$, где $x \in E$ и χ_j - характеристическая функция интервала $\mathcal{T} \subseteq J$, т.е. $\Sigma(J; E)$ - пространство ступенчатых функций.

Пусть $\{L(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ – сильно непрерывное семейство ограниченных операторов на E и пусть $A \in \mathcal{C}(E)$. Предположим, что справедливы следующие гипотезы:

H1. Для каждого $x \in E$ и $t \in \mathbb{R}$ интеграл $\int_0^t L(s)x\,ds \in D(A)$ и отображение $t \to A\int_0^t L(s)x\,ds$ непрерывно из $\mathbb{R}$ в E;

H2. Существуют подмножество $D^{\odot} \subseteq D(A^*)$ и константа $M \geqslant 1$ такие что

a) для любого $\phi^{\odot} \in D^{\odot}$ отображение $t \to L^*(t)A^*\phi^{\odot}$ непрерывно из $\mathbb{R}$ в E^*;

b) для каждого $x \in E$ найдется $\phi^{\odot} \in D^{\odot}$ такое, что $\|\phi^{\odot}\| \leqslant M$ и $\|x\| = \langle x, \phi^{\odot}\rangle$.

В силу H1 для любого $f(\cdot) \in \Sigma(\mathbb{R}; E)$ отображение $t \to A\int_0^t L(t-s)f(s)\,ds$ непрерывно из $\mathbb{R}$ в E и можно определить оператор $K : \Sigma(\mathbb{R}; E) \to C(\mathbb{R}; E)$ по формуле

$$(Kf)(t) := A\int_0^t L(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f(\cdot) \in \Sigma(J; E).$$

В силу H2 для каждого $g^{\odot}(\cdot) \in \Sigma(\mathbb{R}; D^{\odot})$ можно аналогично определить $K^{\odot} : \Sigma(\mathbb{R}; D^{\odot}) \to C(\mathbb{R}; E^*)$ по формуле

$$(K^{\odot}g^{\odot})(s) := \int_s^{\infty} L^*(t-s)A^*g^{\odot}(t)\,dt, \ s \in \mathbb{R}, \ g^{\odot}(\cdot) \in \Sigma(\mathbb{R}; D^{\odot}).$$

Пусть $T > 0$ конечно. Тогда операторы K и $K^{\odot}$ индуцируют операторы

$$
\begin{gathered}
(K_T f)(t) := A\int_0^t L(t-s)f(s)\,ds, \\
t\in[0,T], \quad f(\cdot)\in\Sigma(J;E).
\end{gathered}
\tag{12.14}
$$

и

$$
\begin{gathered}
(K_T^{\odot}g^{\odot})(s) := \int_s^T L^*(t-s)A^*g^{\odot}(s)\,ds, \\
s\in[0,T]; \quad g^{\odot}(\cdot)\in\Sigma(J;D^{\odot}).
\end{gathered}
$$

Пусть $p,q\in\overline{\mathbb{R}}_+$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Для $f(\cdot)\in L^p(J;E)$ и $g^*(\cdot)\in L^q(J;E^*)$ мы полагаем

$$
\langle\langle f,g\rangle\rangle = \int_J \langle f(s),g^*(s)\rangle\,ds
$$

и в силу теоремы Фубини имеем

$$
\langle\langle K_T f, g^{\odot}\rangle\rangle = \langle\langle f, K_T^{\odot}g^{\odot}\rangle\rangle,\ f(\cdot)\in\Sigma([0;T];E),\ g^{\odot}(\cdot)\in\Sigma([0;T];D^{\odot}).
$$

Заметим теперь, что если

$$
\begin{gathered}
|||K_T|||_{p_1,p_2} := \sup\Big\{||K_T f||_{L^{p_2}([0;T];E)} : \\
f(\cdot)\in\Sigma([0;T];E), \|f\|_{L^{p_1}([0,T];E)}=1\Big\} < \infty,
\end{gathered}
$$

то в силу плотности $\Sigma([0;T];E)$ в $L^{p_1}([0,T];E)$ и замкнутости оператора A, для любого $f(\cdot)\in L^{p_1}([0,T];E)$ элемент $K_T f(\cdot)\in L^{p_2}([0,T];E)$ и определен при почти всех $t\in[0,T]$ выражением (12.14). Обратим внимание на тот факт, что если $p_2=\infty$, то область определения K_T на самом деле лежит в $C([0,T];E)$ и $K_T : L^{p_1}([0;T];E)\to C([0;T];E)$ непрерывно. Аналогичные рассуждения приводят к непрерывности отображения $K_T^{\odot}: L^{q_2}([0;T];E^{\odot})\to C([0;T];E^*)$, где $E^{\odot}$ есть сильное замыкание $D^{\odot}$. Кроме того, используя H2 b), получаем

$$
|||K_T^{\odot}|||_{q_2,q_1} \leqslant |||K_T|||_{p_1,p_2} \leqslant M|||K_T^{\odot}|||_{q_2,q_1},
\tag{12.15}
$$

где $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$, $\quad\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=1$, и

$$
\begin{gathered}
|||K_T^{\odot}|||_{q_2,q_1} := \sup\Big\{||K_T^{\odot}g^{\odot}||_{L^{q_1}([0;T];E^*)} : \\
g^{\odot}\in\Sigma([0;T];D^{\odot}), \|g^{\odot}\|_{L^{q_2}([0;T];E^*)}=1\Big\}.
\end{gathered}
$$

§ 12.7. Теорема о возвышении для C_0-групп

Напомним, что для производящего оператора C_0-полугруппы $\exp(\cdot A)$ область определения $D(A^{\odot})$ является w^*-плотным в E^* множеством и $A^{\odot}$ является замкнутым оператором в $E^{\odot} = \overline{D(A^{\odot})}$.

Рассмотрим в этом разделе оператор K_T, определенный по формуле

$$(K_T f)(t) := A\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)\,ds, \quad t \in [0,T], \tag{12.16}$$

где оператор $B \in B(E)$.

Теорема 12.7.1 ([231]). *Пусть* $A \in \mathcal{GR}(M,\omega)$ *и* $K_T \in B\Big(L^{p_1}([0,T];E), L^{p_2}([0,T];E)\Big)$ *при некоторых* $p_1, p_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *и* $T \in \mathbb{R}_+$. *Тогда* $K_T \in B\Big(L^{p_1}([0,T];E), C([0,T];E)\Big)$ *и существует константа* $C > 0$ *такая, что*

$$\|K_T f\|_{C([0,\tau];E)} \leqslant C\|f\|_{L^{p_1}([0,\tau];E)} \text{ для любого } \tau \in [0,T]. \tag{12.17}$$

Определение 12.7.1. Мы говорим, что оператор K_T для C_0-группы $exp(\cdot A)$ удовлетворяет **условию HG**, если существуют константы $C, \tau > 0$ и $T > 0$ такие, что для любого $x \in E$ найдется функция $h_x(\cdot) \in C([-\tau,T];E)$ со свойствами

$(HG1)$ $\quad \|h_x(\cdot)\|_{C([-\tau,T];E)} \leqslant C\|x\|_E$;

$(HG2)$ $\quad Bh_x(t) = exp(tA)Bx, \quad -\tau \leqslant t \leqslant T-\tau.$

Условие HG для C_0-групп выполняется, например, в следующих двух случаях:

(i) когда B коммутирует с $\exp(\cdot A)$, в этом случае $h_x(t) = \exp(tA)x, \quad -\tau \leqslant t \leqslant T$;

(ii) когда B ограниченно обратим, в этом случае $h_x(t) = B^{-1}\exp(tA)Bx, \quad t \in [-\tau, T]$.

Теорема 12.7.2 ([231]). *Пусть выполнены условия Теоремы 12.7.1 и дополнительно удовлетворяется условие HG. Тогда* $K_T \in B\Big(L^1([0,T];E), C([0,T];E)\Big)$ *и существует константа* $C > 0$ *такая, что* $\|K_T f\|_{C([0,\tau];E)} \leqslant C\|f\|_{L^1([0,\tau];E)}$ *при любом* $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

Следствие 12.7.1 ([231]). *Пусть выполнены условия Теоремы 12.7.1. Тогда существуют константы* $L, \alpha > 0$, *такие что* $SV(K_T, T) \leqslant Le^{\alpha T}T^{1/p_1}, \quad T > 0$.

Следствие 12.7.2 ([231]). *Пусть $E = H$ – гильбертово, и выполнены условия Теоремы 12.7.1. Тогда существуют константы $L, \alpha > 0$, такие что* $SV(K_T, T) \leqslant Le^{\alpha T}T^{1/2}, \quad T > 0.$

§ 12.8. Теорема о возвышении для C_0-косинус оператор-функций

Пусть E – банахово пространство и $A : D(A) \subset E \to E$ – производящий оператор C_0-косинус оператор-функции $\{C(\cdot, A)\}$ в E. Рассмотрим также сопряженное семейство $\{C(\cdot, A)^*\}$. Хорошо известно, что это также косинус-семейство линейных ограниченных операторов на сопряженном пространстве, которое может, однако, не быть сильно непрерывным.

Напомним, что пространство $E^{\odot}$ определяется как

$$E^{\odot} = \{\, x^* \in E^* \,:\, s - \lim_{t\to 0} C(t, A)^* x^* = x^* \,\},$$

где предел понимается в сильной топологии пространства E^*.

С другой стороны, косинус оператор-функции могут изучаться через C_0-группы. Более точно, вводя пространство Кизынского E^1, можно свести рассмотрение к C_0-группе. Как мы знаем, семейство операторов $\{\exp(t\mathcal{A})\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ на $E^1 \times E$ определенное как

$$\exp(t\mathcal{A}) = U(t) = \begin{pmatrix} C(t, A) & S(t, A) \\ AS(t, A) & C(t, A) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad (12.18)$$

есть C_0-группа. Ее производящий оператор есть $\mathcal{A} : D(A) \times E^1 \subset E^1 \times E \to E^1 \times E$, он задается как $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть $B \in B(E)$ – линейный ограниченный оператор в E. Нетрудно проверить, что семейство $L(t) := S(t, A)B$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет всем условиям, приведенным в разделе 12.6 относительно $D^{\odot} = D(A^{\odot})$.

В этом разделе рассматривается непрерывность соответствующего оператора свертки

$$(K_T f)(t) := A \int_0^t S(t - s, A) B f(s)\, ds, \;\; t \in [0, T] \subset \overline{\mathbb{R}}_+, \qquad (12.19)$$

в $L^p([0, T]; E)$ нормах, $p \in [1, +\infty]$.

Заметим, что, в рассматриваемом случае косинус оператор-функций не очень легко непосредственно доказать, что $\|K_T\|_{B(L^{p_1}([0,T];E), L^{\infty}([0,T];E))}$ растет экспоненциально по T. Тем не менее, этот факт справедлив и установлен в Теореме о возвышении 12.8.1.

Естественно далее попытаться найти новый оператор свертки $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}$, построенный по группе $\mathcal{U}$, сводящий изучение K_T к изучению $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}$. Таким образом, результаты, имеющие место для

C_0-групп, непосредственно могут быть перенесены на косинус оператор-функции. Рассмотрим ограниченный на $E^1 \times E$ оператор

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

и соответствующий оператор свертки

$$(\mathcal{K}h)(t) = \mathcal{A}\int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{B}h(s)\,ds, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{12.20}$$

где $h = [g, f]^T \in \Sigma([0,T], E^1 \times E)$.

Для $T > 0$, определим также оператор свертки G_T : $\Sigma([0,T], E) \to C([0,T], E^1)$ посредством равенства

$$(G_T f)(t) = \int_0^t C(t-s, A)Bf(s)\,ds, \quad f \in \Sigma([0,T], E), \ \ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Далее мы имеем, что

$$(\mathcal{K}_T h)(t) = [(G_T f)(t), (K_T f)(t)]^T, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

для $h = [g, f]^T \in \Sigma([0,T], E^1 \times E)$.

Лемма 12.8.1 ([231])**.** *Пусть p_1, $p_2 \in [1, +\infty]$ и $T > 0$.*

(i) $\mathcal{K}_T$ непрерывно из $L^{p_1}([0,T], E^1 \times E)$ в $L^{p_2}([0,T], E^1 \times E)$ тогда и только тогда, когда G_T непрерывно из $L^{p_1}([0,T]; E)$ в $L^{p_2}([0,T], E^1)$, и K_T непрерывно из $L^{p_1}([0,T]; E)$ в $L^{p_2}([0,T]; E)$.

(ii) Пусть $T^* > T$. Если K_{T^*} непрерывно из $L^{p_1}([0,T^*], E)$ в $L^{p_2}([0,T^*], E)$ и если $p_2 = +\infty$, то $\mathcal{K}_T$ непрерывно из $L^{p_1}([0,T], E^1 \times E)$ в $L^{p_2}([0,T], E^1 \times E)$.

Утверждение (ii) леммы с $T = T^*$ и $1 \leqslant p_2 < +\infty$ также справедливо. Этот результат является следствием (см. Следствие 12.8.2) основной Теоремы о возвышении 12.8.1.

Теорема 12.8.1 ([231])**.** *Предположим, что существуют T_0 и $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ такие, что*

$$\|K_{T_0}\| \in B(L^{p_1}([0,T]; E), L^{p_2}([0,T]; E)).$$

Тогда существуют константы $L > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\|K_T\|_{B(L^{p_1}([0,T];E), C([0,T];E))} \leqslant Le^{\alpha T}, \qquad T > 0. \tag{12.21}$$

Следствие 12.8.1 ([231])**.** *Предположим, что условия Теоремы 12.8.1 выполнены. Тогда существуют $L > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что*

$$\mathrm{SV}(K_T, T) \leqslant Le^{\alpha T} T^{1/p_1}, \qquad T \in \mathbb{R}.$$

Следствие 12.8.2 ([231]). *Пусть* p_1, $p_2 \in [1, +\infty]$ *и* $T > 0$. *Тогда* $\|K_T\|_{B(L^{p_1}([0,T];E),L^{p_2}([0,T];E))} < +\infty$ *тогда и только тогда, когда* $\|\mathcal{K}_T\|_{B(L^{p_1}([0,T];E),L^{p_2}([0,T];E))} < +\infty$.

Следствие 12.8.3 ([231]). *Предположим, что* E *гильбертово пространство и что the предположения Теоремы 12.8.1 выполнены. Тогда существуют* $L > 0$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что*

$$\mathrm{SV}(K_T, T) \leqslant L e^{\alpha T} T^{1/2}, \qquad T > 0.$$

Полагая, в частности $p_1 = p_2 = +\infty$ в полученном утверждении, мы получаем следующее интересное

Следствие 12.8.4. *Предположим, что* E *гильбертово и что* $\mathrm{SV}(K_T, T_0) < +\infty$, *для некоторого* $T_0 > 0$. *Тогда существуют* $L > 0$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что*

$$\mathrm{SV}(K_T, T) \leqslant L e^{\alpha T} T^{1/2}, \qquad T \in \mathbb{R}_+.$$

Также, как и для C_0-групп, при некоторых дополнителных условиях можно усилить утверждение Теоремы 12.8.1.

Определение 12.8.1. Мы говорим, что оператор K_T в (12.19) удовлетворяет условию **HC**, если существуют константы $C_0 > 0$ и $T_0 > 0$ такие, что, для любого $x \in E$, существует функция $h_x \in L^\infty([0,T];E)$, обладающая свойствами

HC1 $\|h_x\|_{L^\infty([0,T];E)} \leqslant C\|x\|$

и

HC2 $Bh_x(t) = C(t-T, A)Bx, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$

Заметим, что по крайней мере в двух случаях условие **HC** выполнено, а именно, :

(i) когда B коммутирует с $C(t, A)$, при $t \in \mathbb{R}$, можно положить $h_x(t) = C(t-T, A)x$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и

(ii) когда B обратим, можно положить $h_x(t) = B^{-1}C(t - T, A)Bx$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 12.8.2 ([231]). *Допустим, что существуют* $T_0 > 0$ *и* $p_1, p_2 \in [1, \infty]$ *такие, что* $\|K_{T_0}\|_{B(L^{p_1}([0,T];E),L^{p_2}([0,T];E))} < \infty$. *Предположим также, что выполнено условие HC. Тогда существуют* $L > 0, \alpha > 0$ *такие, что* $\|K_T\|_{B(L^1([0,T];E),C([0,T];E))} < L e^{\alpha T}$.

§ 12.9. Возмущение C_0-групп операторов

В этом разделе мы используем теоремы о возвышении для изучения мультипликативных возмущений. Пусть $\exp(\cdot A)$ есть C_0-группа линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве E. Пусть $B \in B(E)$ - некоторый линейный ограниченный оператор в E. Основной вопрос – установить является ли "мультипликативно возмущенный" оператор $A_m = A(I + B)$, определенный на естественной области определения $D(A_m) = \{\, x \in E \,:\, (I+B)x \in D(A) \,\}$, инфинитезимальным оператором другой C_0-группы. Предположим сначала, что A_m есть инфинитезимальный оператор C_0-группы $\exp(\cdot A_m)$. Как и в случае полугрупп, нетрудно проверить, что для любого $x \in E$ имеет место следующее равенство:

$$\exp(tA_m)x = \exp(tA)x + \\ +A\int_0^t \exp((t-s)A)B\exp(sA_m)x\,ds, \quad t \in [0,T]. \tag{12.22}$$

Рассмотрим оператор свертки $K_T : \Sigma([0,T],E) \to C([0,T];E)$, определенный в (12.16). Предположим, что существует $T > 0$ такое, что $\mathrm{SV}(K_T,T) = \|K_T\|_{B(L^\infty([0,T];E),L^\infty([0,T];E))} < +\infty$. Тогда K_T можно рассматривать как ограниченный оператор $K_T : C([0,T];E) \to C([0,T];E)$. Равенство (12.22) означает, что для любого $x \in E$, отображение $f_{x,T} : [0,T] \to E$, определенное как $f_{x,T}(t) = \exp(tA_m)x$, для $t \in [0,T]$, удовлетворяет условию

$$f_{x,T}(t) = \exp(tA)x + (K_T f_{x,T})(t), \qquad t \in [0,T].$$

Справедливо и обратное. Для данного $x \in E$ изучим разрешимость в $C([0,T];E)$ уравнения в свертках

$$f(t) = \exp(tA)x + (K_T f)(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12.23}$$

а затем покажем, что $f(t)$ можно рассматривать как $\exp(tA_m)x$. Этот подход как и в разделе 12.1 осуществляется в два шага:

(Шаг 1) Доказать, что существует $T > 0$ такое, что K_T отображает непрерывно $C([0,T];E)$ в себя и

(Шаг 2) доказать, что

$$\mathrm{SV}(K_T,T) = \|K_T\|_{B(L^\infty([0,T];E),L^\infty([0,T];E))} < 1$$

для некоторого достаточно малого $T > 0$.

Если (Шаг 1) и (Шаг 2) выполнены то, в силу принципа сжимающих отбражений, уравнение (12.23) однозначно разрешимо. Поэтому, следуя разделу 12.1, получаем, что возмущенный оператор A_m есть производящий оператор C_0-полугруппы.

Теорема 12.9.1 ([231]). *Предположим, что существуют $T_0 > 0$, $1 \leqslant p_1 < +\infty$ и $1 \leqslant p_2 \leqslant +\infty$ такие, что $K_T \in B(L^{p_1}([0,T];E),L^{p_2}([0,T];E))$. Тогда существуют $L > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что для любого $T > 0$*

$$SV(K_T,T) \leqslant Le^{\alpha T}T^{1/p_1}. \tag{12.24}$$

Более того, оператор A_m порождает C_0-группу и

$$\|\exp(tA) - \exp(tA_m)\| = O(t^{1/p_1}) \text{ при } t \to 0. \tag{12.25}$$

Доказательство. Оценка (12.24), для $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ была получена в Следствии 12.7.1. Из этого факта следует, что утверждения (Шаг 1) и (Шаг 2) выполнены. Поэтому, как и в разделе 12.1, получаем, что A_m порождает C_0-полугруппу $\exp(tA_m)$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

С другой стороны, зафиксируем $T > 0$ и положим $M = \sup_{-T \leqslant t \leqslant T} \|\exp(tA_m)\|$. Тождество (12.22) совместно с (12.24) дает для $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\begin{aligned} \|\exp(tA_m) - \exp(tA)\| \leqslant \|K_t\|_{B(L^\infty([0,T];E),L^\infty([0,T];E))} \leqslant \\ \leqslant CLe^{\alpha T}|T|^{1/p_1}, \end{aligned} \tag{12.26}$$

откуда получаем (12.25) для $t \in \mathbb{R}$.

Остается показать, что A_m порождает C_0-группу и что (12.26) также имеет место для $t < 0$. Выберем $0 < T_0 \leqslant T$ так, чтобы $M^2 L e^{\alpha T_0} T_0^{1/p_1} \leqslant 1/2$. Возьмем $0 \leqslant t \leqslant T_0$. Тогда

$$\exp(tA_m) = \Big(\big(\exp(tA_m) - \exp(tA)\big) \exp(-tA) + I \Big) \exp(tA).$$

Далее, в силу (12.26) при $t > 0$ и в силу выбора T_0, мы также имеем

$$\|\Big(\exp(tA_m) - \exp(tA) \Big) \exp(-tA)\| \leqslant 1/2.$$

Следовательно, разложение в ряд показывает, что оператор $\exp(\cdot A_m)$ обратим и $\|\exp(tA_m)^{-1}\| \leqslant 2M$. Это по сути дела доказывает, что A_m порождает C_0-группу.

Наконец, снова используя разложение в ряд, получаем, что $0 \leqslant t \leqslant T_0$,

$$\begin{aligned} &\|\exp(-tA_m) - \exp(-tA)\| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} \|\Big(\exp(tA_m) - \exp(tA) \Big) \exp(-tA)\|^j = \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} (M^2 L e^{\alpha t} t^{1/p_1})^j \leqslant 2M^2 L e^{\alpha t} t^{1/p_1}, \end{aligned}$$

что доказывает (12.26) и для $t < 0$.

Заметим, что в этой теореме $1 \leqslant p_1 < +\infty$. Для гильбертовых пространств значение $p_1 = +\infty$ также допустимо. Действительно, используя Следствие 12.7.2 мы легко получаем следующую теорему.

Теорема 12.9.2 ([231]). *Предположим, что $E = H$ – гильбертово и что существуют $T_0 > 0$ и p_1, $p_2 \in [1, +\infty]$ такие, что $K_T \in B(L^{p_1}([0,T];E), L^{p_2}([0,T];E))$. Тогда существуют*

$L > 0$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что*

$$\mathrm{SV}(K_T, T) \leqslant Le^{\alpha T} T^{1/2}, \qquad T \in \mathbb{R}. \tag{12.27}$$

Более того, оператор A_m *порождает* C_0*-группу и*

$$\| \exp(tA) - \exp(tA_m) \| = O(t^{1/2}) \text{ при } t \to 0.$$

Наконец, при условии **HG** мы можем применить Теорему 12.7.2 которая приводит к следующей Теореме, справедливой для банаховых пространств.

Теорема 12.9.3 ([231])**.** *Пусть условие* **HG** *выполнено. Предположим также, что существуют* $T_0 > 0$ *и* $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ *такие, что* $\|K_{T_0}\|_{B(L^{p_1}([0,T_0],E), L^{p_2}([0,T_0],E))} < +\infty$*. Тогда* $A_m = A(I + B)$ *есть производящий оператор* C_0*-группы и имеет место оценка*

$$\| \exp(tA) - \exp(tA_m) \| = O(t) \text{ при } t \to 0.$$

Более того, если E *рефлексивно, то* B *принимает значения в области определения* A*,* AB *есть ограниченный оператор и* $A_m = A + AB$ *есть ограниченное возмущение* A*.*

§ 12.10. Возмущения C_0-косинус оператор-функций

Пусть $C(\cdot, A)$ есть C_0-косинус семейство линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве E с производящим оператором $A : D(A) \subseteq E \to E$. Взяв другой линейный ограниченный оператор B в E, поставим вопрос, будет ли мультипликативно возмущенный оператор $A_m = A(I + B)$, действующий на области определения $D(A_m) = \{ x \in E : (I + B)x \in D(A) \}$, производящим оператором другого C_0-косинус семейства. Предположим сначала, что A_m есть производящий оператор C_0-косинус семейства $C(\cdot, A_m)$. Мы уже знаем, что

$$C(t, A_m)x = C(t, A)x + A \int_0^t S(t - s, A) B C(s, A_m) x ds, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in E. \tag{12.28}$$

Действуя так же как и в Разделе 12.9, для фиксированного $x \in E$, мы приходим к уравнению в свертках

$$f(t) = C(t, A)x + (K_T f)(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12.29}$$

где K_T определено в (12.19), а f ищется в $C([0, T]; E)$. Как показано в разделе 12.1, если

(i) существует $T > 0$ такое, что K_T отображает непрерывно $C([0, T]; E)$ на себя и

(ii) $\mathrm{SV}(K_T, T) = \|K_T\|_{B(L^\infty([0,T];E), L^\infty([0,T];E))} < 1$ для достаточно малого $T > 0$,

то, в силу принципа сжимающих отображений, уравнение

(12.29) однозначно разрешимо и A_m есть производящий оператор C_0-косинус семейства.

Теорема 12.10.1 ([231]). *Предположим, что существуют $T_0 > 0$, $1 \leqslant p_1 < +\infty$ и $1 \leqslant p_2 \leqslant +\infty$ такие, что $\|K_T\|_{B(L^{p_1}([0,T];E),L^{p_2}([0,T];E))} < \infty$. Тогда существуют $L > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что для любого $T > 0$ выполнено неравенство*

$$\mathrm{SV}(K_T, T) \leqslant Le^{\alpha T} T^{1/p_1}. \tag{12.30}$$

Более того, оператор A_m порождает C_0-косинус оператор-функцию и

$$\|C(t, A) - C(t, A_m)\| = O(t^{1/p_1}) \text{ при } t \to 0. \tag{12.31}$$

Заметим, что в приведенной теореме $1 \leqslant p_1 < +\infty$. Используя Следствие 12.8.3, мы легко получаем следующую Теорему.

Теорема 12.10.2 ([231]). *Предположим, что $E = H$ гильбертово и что существуют $T_0 > 0$ и $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ такие, что $\|K_T\|_{B(L^{p_1}([0,T];E),L^{p_2}([0,T];E))} < +\infty$. Тогда существуют $L > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что*

$$\mathrm{SV}(K_T, T) \leqslant Le^{\alpha T} T^{1/2}, \qquad T > 0. \tag{12.32}$$

Более того, оператор A_m порождает C_0-косинус оператор-функцию и

$$\|C(t, A) - C(t, A_m)\| = O(t^{1/2}) \quad \text{при } t \to 0.$$

Теорема 12.10.3 ([231]). *Предположим, что условие* **HC** *выполнено. Предположим также, что существуют $T_0 > 0$ и $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ такие, что $\|K_{T_0}\|_{B(L^{p_1}([0,T_0];E),L^{p_2}([0,T_0];E))} < +\infty$. Тогда $A_m = A(I + B)$ есть производящий оператор C_0-косинус оператор-функции и имеет место оценка*

$$\|C(t, A) - C(t, A_m)\| = O(t) \quad \text{при } t \to 0.$$

Глава 13

НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим в банаховом пространстве E неоднородную задачу Коши

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u^0, \tag{13.1}$$

с оператором A, порождающим C_0-полугруппу. При $f \equiv 0$ корректная постановка таких задач подробно описана в главе 1 книги [15]. Формально, как и в конечномерном анализе, задача (13.1) имеет решение в виде

$$u(t) = \exp(tA)u^0 + \int_0^t \exp((t-s)A)f(s)\,ds, \quad t \in [0,T]. \tag{13.2}$$

Это так называемая формула вариации произвольной постояной. Представляют интерес свойства выражения $\int_0^t \exp((t-s)A)f(s)\,ds$ и соответствующие интерпретации решений в связи с представлением (13.2).

§ 13.1. Общие результаты

Из теории уравнений в частных производных известно, что задачи, записываемые в абстрактном виде (13.1), обычно рассматривают в пространствах типа $C([0,T];E)$ или $L^p([0,T];E)$. В этой главе мы и ограничимся этими двумя постановками.

Так, например, если функция $f(\cdot) \in C([0,T];E)$, то для C_0-полугруппы $\exp(\cdot A)$ будет непрерывным по $s \in [0,T]$ выражение $\exp((t-s)A)f(s)$, а, следовательно, существует и $\int_0^t \exp((t-s)A)f(s)\,ds$.

С другой стороны, если $u(\cdot)$ – решение задачи (13.1) с $f(\cdot) \in C([0,T];E)$, которое принадлежит $C([0,T];E) \cap C^1((0,T];E)$, то $\frac{d}{ds}\Big(\exp((t-s)A)u(s)\Big) = \exp((t-s)A)f(s)$ и, проинтегрировав по $(0,t)$, получим (13.2). Обратное, вообще говоря, неверно, т.к. функция $u(\cdot)$, заданная выражением (13.2), не обязана быть дифференцируемой.

В фольклере абстрактных дифференциальных уравнений хорошо известна

Теорема 13.1.1 ([18], [29]). *Пусть $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$, $u^0 \in D(A)$, и функция $f(\cdot)$ либо*

(i) $f(\cdot) \in C^1([0,T];E)$;

либо

(ii) $f(\cdot) \in C([0,T];E)$ принимет значения в $D(A)$ причем $Af(\cdot) \in C([0,T];E)$.

Тогда задача (13.1) имеет единственное представимое в виде (13.2) решение $u(\cdot) \in C^1([0,T];E)$ с начальным условием u^0.

В случае, когда $f(\cdot)$ удовлетворяет условию Гельдера:

$$\|f(t) - f(s)\| \leqslant M|t-s|^\gamma \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s,t \leqslant T, \tag{13.3}$$

с некоторыми константами $M > 0$ и $0 < \gamma \leqslant 1$, справедлива следующая

Теорема 13.1.2 ([18], [29]). *Пусть $A \in \mathcal{H}(\theta, \omega)$ и $f(\cdot)$ удовлетворяет условию Гельдера (13.3). Тогда функция $u(\cdot)$ из (13.2) принадлежит $C([0,T];E) \cap C^1((0,T];E)$ и является решением задачи (13.1) при любом $u^0 \in E$. Кроме того, $u(\cdot) \in C^1([0,T];E)$, если $u^0 \in D(A)$.*

В абстрактной форме может быть записана и теорема Коши-Ковалевской. Пусть $\{E_\theta : 0 \leqslant \theta \leqslant 1\}$ – банаховы пространства со свойствами $E_{\theta_2} \subseteq E_{\theta_1}$, если $\theta_1 < \theta_2$ и

$$\|x\|_{E_{\theta_1}} \leqslant \|x\|_{E_{\theta_2}} \quad \text{при любом} \quad x \in E_{\theta_2}.$$

Пусть L_α – множество линейных операторов $Q \in L(E_{\theta_2}, E_{\theta_1})$ при $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < 1$ таких, что

$$\|Qx\|_{E_{\theta_1}} \leqslant \frac{\alpha}{\theta_2 - \theta_1} \|x\|_{E_{\theta_2}} \quad \text{для любого} \quad x \in E_{\theta_2}.$$

Функция $A(t) : [0,T] \to L_\alpha$ называется непрерывной, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \in [0,T]$ и $\theta > \theta'$ существует такое $\delta > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$ имеем

$$\|(A(t) - A(t_0))x\|_{E_{\theta'}} \leqslant \varepsilon \|x\|_{E_\theta} \quad \text{при любом } x \in E_\theta.$$

Обратим внимание на тот факт, что пространство L_α - банахово с нормой

$$\|Q\|_{L_\alpha} = \sup_{0 \leqslant \theta' < \theta \leqslant 1} \sup_x (\theta - \theta') \|Qx\|_{E_{\theta'}} \|x\|_{E_\theta}^{-1}.$$

Теорема 13.1.3 ([27]). *Пусть $u^0 \in E_1$, $f(\cdot) \in C([-T,T];E_1)$ и $A(\cdot) \in C([-T,T];L_\alpha)$. Тогда*

1. Для каждого $\theta \in [0,1)$ существует функция $u(\cdot)$, определенная при $0 \leqslant t < T_s := \min(T, (1-\theta)(\alpha e)^{-1})$ и принимающая значения в E_θ. Функция $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, удовлетворяет уравнению

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t) \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant t < T_s \tag{13.4}$$

и условию $u(0) = u^0$.

2. Если для некоторых $\theta \in (0,1]$ и $0 < T' \leqslant T$ на множестве $[0,T']$ определены две функции со значениями в E_θ, непрерывно дифференцируемые, удовлетворяющие (13.4) и совпадающие при $t = 0$, то эти функции совпадают на $[0,T']$.

Для уравнения второго порядка в формуле типа (13.2) вместо $\exp(\cdot A)$ фигурируют $C(\cdot, A)$ и $S(\cdot, A)$. Тем не менее, зачастую технических различий в исследовании этих задач нет, и мы, как правило, ограничимся приведением доказательств только для случая уравнений второго порядка.

§ 13.2. Неоднородные уравнения в $C([0,T];E)$

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу (13.1) с оператором A, порождающим C_0-полугруппу.

Определение 13.2.1. *Классическим решением* задачи (13.1) называется такая функция $u(\cdot)$, что $u(\cdot) \in C^1([0,T];E)$, значения $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0,T]$ и выполняются равенства (13.1).

Предложение 13.2.1 ([232]). *Пусть $f(\cdot) \in L^1([0,T];E)$. Тогда для любого $u^0 \in E$ задача (13.1) имеет не более одного классического решения. Если она имеет классическое решение, то оно имеет вид (13.2).*

Определение 13.2.2. *Ослабленным решением* задачи (13.1) называется такая функция $u(\cdot) \in C([0,T];E)$, что $u'(\cdot) \in C((0,T];E)$ и уравнение (13.1) выполняется на $(0,T]$.

Теорема 13.2.1 ([45]). *Пусть задача (13.1) с $f(\cdot) \in C([0,T];E)$ и $u^0 \in D(A)$ имеет ослабленное решение $u(\cdot)$ и $\rho(A) \neq \varnothing$. Тогда $u(\cdot)$ задано в виде (13.2).*

Как уже отмечалось, функция $u(\cdot)$, заданная в виде (13.2), не является, вообще говоря, ни классическим ни ослабленным решением, поскольку она не обязана быть дифференцируемой.

Определение 13.2.3. Функция $u(\cdot) \in C([0,T];E)$, заданная в (13.2), называется *обобщенным решением* задачи (13.1).

Теорема 13.2.2 ([232]). *Пусть $A \in \mathcal{G}(M,-\omega)$ с $\omega > 0$ и функция $f(\cdot) : [0,\infty) \to E$ - ограниченная измеримая на $[0,\infty)$. Если $s\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t) = f_\infty$, то обобщенное решение $u(\cdot)$, определенное в (13.2), имеет поведение*

$$s\text{-}\lim_{t\to\infty} u(t) = -A^{-1} f_\infty.$$

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу Коши

$$u''(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = u^0, u'(0) = u^1, \quad (13.5)$$

с оператором A, порождающим C_0-косинус-оператор функцию.

Определение 13.2.4. Функция $u(\cdot)$ называется *классическим решением* задачи (13.5), если $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема, $u(t) \in D(A)$ для всех $t \in [0,T]$, и $u(\cdot)$ удовлетворяет равенствам (13.5).

Если $f(\cdot) \in C([0,T];E)$ и $u(\cdot)$ - классическое решение (13.5), то, рассмотрев выражение $\frac{d}{ds}\Big(C(t-s,A)u(s) + S(t-s,A)u'(s)\Big) =$

$S(t-s,A)f(s)$, и проинтегрировав его по $0 \leqslant s < t$, получим

$$u(t) = C(t,A)u^0 + S(t,A)u^1 + \int_0^t S(t-s,A)f(s)ds, \\ t \in [0,T], \tag{13.6}$$

Как и в случае C_0-полугрупп операторов, функция $u(\cdot)$, заданная в (13.6), не является, вообще говоря, классическим решением, так как не обязана быть дважды непрерывно дифференцируемой.

Предложение 13.2.2 ([128])**.** *Пусть $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ и либо*
(i) $f(\cdot), Af(\cdot) \in C([0,T);E)$ и $f(t) \in D(A)$ при $t \in [0,T]$, либо
(ii) $f(\cdot) \in C^1([0,T];E)$.

Тогда функция $u(\cdot)$ из (13.6) с $u^0 \in D(A)$ и $u^1 \in E^1$ является классическим решением задачи (13.5) на $[0,T]$.

Определение 13.2.5. Функция $u(\cdot) \in C([0,T);E)$, заданная выражением (13.6), называется *обобщенным решением* задачи (13.5).

Теорема 13.2.3 ([45])**.** *Пусть оператор $B = \sqrt{A}$ в задаче (13.5) имеет обратный $B^{-1} \in B(E)$ и является генератором C_0-группы, а функция $f(\cdot)$ обладает одним из свойств:*
(i) $f(\cdot) \in C^1([0,T);E)$;
(ii) функция $Bf(\cdot) \in C([0,T);E)$.

Тогда для любых $u^0 \in D(A)$ и $u^1 \in D(B)$ существует единственное классическое решение задачи (13.5), которое дается формулой (13.6) в виде

$$\begin{gathered} u(t) = \frac{1}{2}\Big(exp(tB) + exp(-tB)\Big)u^0 + \\ \frac{1}{2}\Big(exp(tB) - exp(-tB)\Big)B^{-1}u^1 + \\ +\frac{1}{2}\int_0^t \Big(exp((t-s)B) + exp(-(t-s)B)\Big)B^{-1}f(s)ds, \\ t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{13.7}$$

Теорема 13.2.4 ([103])**.** *Пусть $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$. Задача Коши*

$$u''(t) = Au(t) + f(t), \quad u(0) = x, \quad u'(0) = y, \tag{13.8}$$

имеет при любой 2π-периодической функции $f(\cdot) \in L^2_{loc}(\mathbb{R};E)$ единственное 2π-периодическое обобщенное решение класса C^1 тогда и только тогда, когда $1 \in \rho\Big(C(2\pi,A)\Big)$.

Заметим, что условие $1 \in \rho(C(\pi, A))$ эквивалентно тому, что $\{-4\pi^2 k^2/T^2\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \rho(A)$ и $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|k(4\pi^2k^2/T^2 + A)^{-1}\| < \infty$.

§ 13.3. Коэрцитивность в случае классических решений

Поскольку существование классического решения задачи (13.1) предполагает непрерывность производной функции $u(\cdot)$ на $[0, T]$, то в силу представления (13.2) естественно рассмотреть дифференцируемость выражения $(\exp(\cdot A) * f)(t)$ по переменной $t \in \mathbb{R}_+$.

Определение 13.3.1. Говорят, что C_0-полугруппа *exp*$(\cdot A)$, обладает свойством *максимальной регулярности* (короче, MR-свойством), если

$$\Big(\exp(\cdot A) * f\Big)(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$$

или, эквивалентно, $\Big(\exp(\cdot A) * f\Big)(\cdot) \in C\big([0, T]; \mathcal{D}(A)\big)$ для всех $f(\cdot) \in C([0, T]; E))$.

Предложение 13.3.1 ([121]). *Свертка* $(\exp(\cdot A) * f)(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$ *тогда и только тогда, когда* $(\exp(\cdot A)*f)(t) \in D(A)$ *при всех* $t \in [0, T]$ *и* $(\exp(\cdot A) * f)(\cdot) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A))$.

Предложение 13.3.2 ([121]). *Задача Коши (13.1) имеет классическое решение для любого* $f(\cdot) \in C([0, T]; E)$ *тогда и только тогда, когда* A *порождает* C_0*-полугруппу с MR-свойством.*

Предложение 13.3.3 ([268]). *Оператор* A *порождает* C_0*-полугруппу с MR-свойством тогда и только тогда, когда* $SV(\exp(\cdot A), t)$ *ограничена на* $[0, T]$.

Теорема 13.3.1 ([86], [121]). *Если* C_0*-полугруппа* $\exp(\cdot A)$ *обладает MR-свойством, то либо* A *ограничен, либо пространство* E *содержит замкнутое подпространство, изоморфное* c_0.

Как показано в [121], существуют неограниченные операторы на $E = c_0$, которые порождают C_0-полугруппы с MR-свойством.

Поскольку оператор A, порождающий C_0-полугруппу, замкнут, то по теореме о замкнутом графике в случае C_0-полугруппы с MR-свойством оператор $A(\exp(\cdot A) * f)$, определенный на всем $C([0, T]; E)$, непрерывен как оператор из $C([0, T]; E)$ в $C([0, T]; E)$. Это означает, что справедливо неравенство

$$\|A(\exp(\cdot A) * f)\|_{C([0,T];E)} \leqslant C\|f\|_{C([0,T];E)}$$

с некоторой константой C, не зависящей от $f(\cdot)$. Обобщая наглядность предыдущего неравенства для формулировки MR-свойства в пространстве $C([0, T]; E)$ на описание корректности постановки задачи Коши для неоднородного уравнения в пространствах типа C^α, h^α и т. п., мы приходим к следующему определению.

Определение 13.3.2. Пусть F –банахово пространство, являющееся подпространством исходного пространства E, $\Upsilon([0,T];E)$ - банахово пространство функций со значениями в E. Задача (13.1) называется *коэрцитивно разрешимой (КР)* в паре пространств $(F, \Upsilon([0,T];E))$ (т.е. решение $u(\cdot)$ обладает *свойством максимальной регулярности*), если при любом $u^0 \in F$ и при любой правой части $f(\cdot) \in \Upsilon([0,T];E)$ существут классическое решение $u(\cdot)$ задачи Коши (13.1) и для него имеет место неравенство коэрцитивности:

$$\begin{aligned} &\|u'(\cdot)\|_{\Upsilon([0,T];E)} + \|Au(\cdot)\|_{\Upsilon([0,T];E)} \leqslant \\ &\leqslant M(\|f(\cdot)\|_{\Upsilon([0,T];E)} + \|u_0\|_F) \end{aligned} \tag{13.9}$$

Формулировка данного определения весьма удобна. Так , например, из Определения 13.3.2 для $u(t) = t\exp(tA)u^0$ и $f(t) = \exp(tA)u^0$ и Предложения 13.3.3 тривиально следует

Предложение 13.3.4 ([268])**.** *Пусть A есть производящий оператор C_0- полугруппы и $SV(exp(\cdot A), t) < \infty$. Тогда полугруппа $exp(\cdot A)$ является аналитической.*

Однако, аналитичность C_0-полугруппы $\exp(\cdot A)$ не является достаточной для коэрцитивной разрешимости задачи (13.1) в $C([0,T];E)$ (см. [69]). Таким образом, учитывая Теорему 13.3.1, изучение коэрцитивности в пространстве $C([0,T];E)$ не очень интересно. Тем не менее можно доказать

Теорема 13.3.2 ([218])**.** *Пусть $-\infty < a < b < \infty, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty, \sigma \geqslant 0$ и $A \in \mathcal{H}(\theta, \beta)$. Тогда для любой $f \in B^\sigma_{p,q}((a,b);E)$ с $\sigma > 1/p$ или $\sigma = 1/p$ и $q = 1$ имеем $\exp(\cdot A) * f \in C^1((a,b);E) \cap C^1((a,b);\mathcal{D}(A))$ и (13.1) выполняется для любого $t \in (a,b)$ для функции $u(\cdot) = \exp(\cdot A) * f$.*

На самом деле в условиях предыдущей теоремы можно установить, что для любого $f \in B^\sigma_{p,q}((a,b);E) \cap L^1((a,b);E)$ следует, что $\exp(\cdot A) * f \in B^{\sigma+1}_{p,q}((a,b);E)$, где $a < a_1 < b$, и существует константа $c > 0$ со свойством

$$\|\exp(\cdot A) * f\|_{B^{\sigma+1}_{p,q}((a,b);E)} \leqslant c(\|f\|_{B^\sigma_{p,q}((a,b);E)} + \|f\|_{L^1((a,b);E)}).$$

Однако, такие оценки не являются коэрцитивными.

Предложение 13.3.5 ([68])**.** *Пусть $A \in \mathcal{H}(\theta, \omega)$, т.е. A порождает некоторую аналитическую C_0-полугруппу, $F =$*

$\mathcal{D}(A)$, *а* $\Upsilon([0,T];E))$ *- гельдеровское пространство функций* $C_0^\alpha([0,T];E)$, *для которых конечна норма*

$$\|f(\cdot)\|_{C_0^\alpha([0,T];E)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|_E + \sup_{0\leqslant t,\tau,t+\tau\leqslant T}\frac{\|f(t+\tau)-f(t)\|_E}{\tau^\alpha}t^\alpha.$$

Тогда задача Коши (13.1) коэрцитивно разрешима в паре пространств $(F, C_0^\alpha([0,T];E))$.

Теорема 13.3.3 ([1]). *Пусть* $v' = f(0) - Au(0) \in E_{\alpha-\gamma}$, $f \in C_0^{\beta,\gamma}([0,1];E_{\alpha-\gamma}), A \in \mathcal{H}(\theta,\omega)$ *при* $0 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha, 0 < \alpha < 1$. *Тогда существует единственное решение задачи (13.1),* $Au, u' \in C_0^{\beta,\gamma}([0,1];E_{\alpha-\gamma})$, $u' \in C([0,1];E_{\alpha-\gamma})$ *и*

$$\|u'\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E_{\alpha-\gamma})} + \|Au\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E_{\alpha-\gamma})} + \|u'\|_{C([0,1];E_{\alpha-\gamma})} \leqslant$$
$$\leqslant c(\|v_0'\|_{\alpha-\gamma} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}([0,1];E_{\alpha-\gamma})}),$$

где $C_0^{\beta,\gamma}$ *имеет норму*

$$\max_t\|f\|_E + \max_{0<t,t+\tau\leqslant T}\frac{\|f(t+\tau)-f(t)\|_E}{\tau^\beta}(t+\tau)^\gamma.$$

Замечание 13.3.1 ([66]). В случае, когда $E = l^p$, оператор

$$A(x_k)_{k=1}^\infty = (ik\,x_k)_{k=1}^\infty, \quad (i=\sqrt{-1}),$$

порождает сильно непрерывную C_0-полугруппу (однако не аналитическую!). Для правой части $f(t) = \left(k^{-(1-1/p)}e^{ikt}\right)_{k=1}^\infty$, удовлетворяющей условию Гельдера с любым показателем $\varepsilon \in (0,1)$, функция

$$\phi(t) = \int_0^t exp\Big((t-s)A\Big)f(s)\,ds$$

ни при каком t не принадлежит $D(A)$.

Этот пример также показывает, что в случае, когда оператор A порождает лишь C_0-полугруппу, гельдеровости правой части недостаточно для существования классического решения (естественно, ни о какой коэрцитивности в этом случае не может быть и речи).

Обозначим $(S(\cdot,A)*f)(t) := \int_0^t S(t-s,A)f(s)\,ds, \quad t\in[0,T]$.

Определение 13.3.3. Говорят, что C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot,A)$ обладает свойством *максимальной регулярности (MR-свойством)*, если $S(\cdot,A)*f \in C^2([0,T];E)$ (или эквивалентно $C(\cdot,A)*f \in C([0,T];\mathcal{D}(A))$ для всех $f(\cdot)\in C([0,T];E)$.

Предложение 13.3.6 ([97]). *Пусть $x, y \in D(A)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Задача (13.5) имеет классическое решение при данной $f(\cdot)$;

(ii) $S(\cdot, A) * f \in C^2([0,T]; E)$;

(iii) $(S(\cdot, A) * f)(t) \in D(A)$ для $0 \leqslant t \leqslant T$ и $A(S(\cdot, A) * f)(t)$ непрерывна по $t \in [0,T]$, то есть $(S(\cdot, A) * f) \in C([0,T], \mathcal{D}(A))$.

Доказательство. (i)$\Longrightarrow$(ii). Мы знаем, что если $u(\cdot)$ - решение (13.5), тогда $u(\cdot)$ - дважды непрерывно дифференцируемо и $u(t) = C(t, A)x + S(t, A)y + (S(\cdot, A) * f)(t)$. Следовательно, мы имеем $(S(\cdot, A) * f)''(t) = u''(t) - C''(t, A)x - S''(t, A)y = u''(t) - C(t, A)Ax - S(t, A)Ay \in C([0,T]; E)$, то есть $S(\cdot, A) * f \in C^2([0,T]; E)$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Так как

$$\frac{2}{h^2}\Big(C(h, A) - I\Big)(S(\cdot, A) * f)(t) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\Big((S(\cdot, A) * f)(t+h) - 2(S(\cdot, A) * f)(t) + (S(\cdot, A) * f)(t-h)\Big) +$$

$$+ \frac{1}{h^2}\Big(-\int_t^{t+h} S(t-s+h, A)f(s)\,ds + \int_{t-h}^{t} S(t-s-h, A)f(s)ds\Big) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\Big((S(\cdot, A) * f)(t+h) - 2(S(\cdot, A) * f)(t) + (S(\cdot, A) * f)(t-h)\Big) +$$

$$+ \frac{1}{h^2}\Big(-\int_t^{t+h} S(t-s+h, A)f(s)ds + \int_{t-h}^{t} S(t-s-h, A)f(s)\,ds\Big), \tag{13.10}$$

мы имеем

$$\lim_{h \to 0+} \frac{2}{h^2}\Big(C(t, A) - I\Big)(S(\cdot, A) * f)(t) = (S(\cdot, A) * f)''(t) - f(t),$$

то есть $(S(\cdot, A) * f)(t) \in D(A)$ и $A(S(\cdot, A) * f)(t) = (S(\cdot, A) * f)''(t) - f(t)$. Следовательно, $A(S(\cdot, A) * f)(\cdot) \in C([0,T]; E)$.

(iii)$\Longrightarrow$(i). В силу (13.10)

$$\frac{1}{h^2}\Big((S(\cdot, A) * f)(t+h) - 2(S(\cdot, A) * f)(t) + (S(\cdot, A) * f)(t-h)\Big) =$$

$$= \frac{2}{h^2}\Big(C(h, A) - I\Big)(S(\cdot, A) * f)(t) -$$

$$- \frac{1}{h^2}\Big(-\int_t^{t+h} S(t-s+h, A)f(s)ds \quad + \int_{t-h}^{t} S(t-s-h, A)f(s)ds\Big).$$

Тогда мы имеем $(S(\cdot, A) * f)'' = A(S(\cdot, A) * f) + f \in C([0,T]; E)$. Поэтому $S(\cdot, A) * f$ - решение задачи Коши (13.5) при заданной $f(\cdot)$ и нулевых начальных условиях, а $u(t) = C(t,A)x + S(t,A)y + (S * f)(t),\ \ t \in \mathbb{R}$ - решение задачи Коши (13.5) при заданной $f(\cdot)$ для каждой пары $x, y \in D(A)$.

Теорема 13.3.4 ([97]). *Следующие условия эквивалентны для C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$:*

(i) *генератор A ограничен;*

(ii) $\|C(t,A) - I\| = O(t^2)\,(t \to 0^+)$;

(iii) $Var(C(\cdot, A), t) = O(t^2)\,(t \to 0^+)$;

(iv) $Var(C(\cdot, A), t) = o(1)\,(t \to 0^+)$;

(v) $SV(C(\cdot, A), t) = O(t^2)\,(t \to 0^+)$;

(vi) $SV(C(\cdot, A), t) = o(1)\,(t \to 0^+)$;

(vii) $SV(C(\cdot, A), t) < \infty$ *для некоторого* $t > 0$, *т.е.* $C(\cdot, A)$ *имеет локально ограниченную полувариацию;*

(viii) $R(S(t,A)) \subseteq D(A)$ *при* $t \in (-\infty, \infty)$ *а* $\|AS(t,A)\|$ *ограничен на* $[a,b]$ *для некоторого* $0 < a < b$;

(ix) $R(S(t,A)) \subseteq D(A)$ *при* $t \in (-\infty, \infty)$ *и*

$$\limsup_{t \to 0^+} \|tAS(t,A)\| < \frac{2}{e}.$$

Определение 13.3.4. Пусть F –банахово пространство, являющееся подпространством исходного пространства E, $\Upsilon([0,T]; E)$ - банахово пространство функций со значениями в E. Задача (13.5) называется *коэрцитивно разрешимой (КР)* в паре пространств $(F, \Upsilon([0,T]; E))$ (говоря иначе, решение $u(\cdot)$ обладает *свойством максимальной регулярности*), если при любой правой части $f(\cdot) \in \Upsilon([0,T]; E)$ существует классическое решение $u(\cdot)$ задачи Коши (13.5), при каждом t значение решения $u(t)$ принадлежит F и для него имеет место неравенство коэрцитивности:

$$\|u''(\cdot)\|_{\Upsilon([0,T];E)}\| + \|Au(\cdot)\|_{\Upsilon([0,T];E)} \leqslant$$
$$\leqslant M\Big(\|f(\cdot)\|_{\Upsilon([0,T];E)} + \|u^0\|_F + \|u^1\|_F\Big).$$

Теорема 13.3.5 ([97]). *Пусть задача (13.5) коэрцитивно разрешима в паре $(\mathcal{D}(A), C([0,T]; E))$. Тогда $A \in B(E)$.*

Этот результат можно переформулировать и так:

Теорема 13.3.6 ([97]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *При всех $x, y \in D(A)$ и $f \in C([0,r]; E)$ задача (13.5) имеет сильное решение.*

(ii) *Оператор A порождает C_0-косинус оператор-функцию,*

удовлетворяющую MR-свойству.
(iii) *Оператор A порождает C_0-косинус оператор-функцию, имеющую ограниченную полувариацию на $[0,r]$.*
(iv) *A — ограниченный линейный оператор в E.*

§ 13.4. Коэрцитивность в $L^p([0,T];E)$

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда [89] $u(\cdot) \in W^{1,p}([0,T];E)$ тогда и только тогда, когда $u(\cdot)$ является абсолютно непрерывной и $u(\cdot), u'(\cdot) \in L^p([0,T];E)$.

Определение 13.4.1. Функция $u(\cdot)$ называется *абсолютно непрерывной*, если существует функция $v(\cdot) \in L^1([0,T];E)$ такая, что

$$u(t) = u(\tau) + \int_\tau^t v(\xi)\,d\xi \quad \text{при всех} \quad \tau, t \in [0,T].$$

Абсолютно непрерывная функция $u(\cdot)$ непрерывна и почти всюду дифференцируема на $[0,T]$, причем $u'(\cdot) = v(\cdot)$.

Определение 13.4.2. *Классическим решением* задачи (13.1) в пространстве $L^p([0,T];E)$ называется абсолютно непрерывная функция $u(\cdot)$ такая, что функции $u'(\cdot), Au(\cdot) \in L^p([0,T];E)$, удовлетворяется уравнение (13.1) почти всюду на $[0,T]$ и $u(0) = u^0$.

Определение 13.4.3. Задача (13.1) называется *корректно поставленной на $L^p([0,T];E)$*, если для любой $f(\cdot) \in L^p([0,T];E)$ существует единственное классическое решение $u(\cdot)$ в $L^p([0,T];E)$, непрерывно зависящее от u^0 и $f(\cdot)$.

Определение 13.4.4. Задача (13.1) называется *коэрцитивно разрешимой* в $L^p([0,T];E)$, если для любой $f(\cdot) \in L^p([0,T];E)$ и $u^0 \in F$ существует единственное классическое решение задачи (13.1) в $L^p([0,T];E)$ и

$$\begin{aligned} &\|u'(\cdot)\|_{L^p([0,T];E)} + \|Au(\cdot)\|_{L^p([0,T];E)} \leqslant \\ &\leqslant M(p)(\|f(\cdot)\|_{L^p([0,T];E)} + \|u^0\|_F). \end{aligned} \tag{13.11}$$

Напомним, что, если свойство имеет место локально, то мы пишем L^p_{loc} вместо L^p.

Определение 13.4.5. Функция $u(\cdot)$ называется *$W^{1,p}_{loc}$-решением* задачи Коши (13.1), если

$$u(\cdot) \in W^{1,p}_{loc}([0,T];E) \cap L^p([0,T];\mathcal{D}(A))$$

и удовлетворяется (13.1).

Предложение 13.4.1 ([74]). *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *оператор* $A \in \mathcal{H}(\theta, \omega)$ *и* $u(\cdot)$ *является* $W^{1,p}_{loc}$*-решением задачи Коши (13.1). Тогда для этого решения имеет место представление (13.2).*

Предложение 13.4.2 ([69]). *Коэрцитивная разрешимость задачи (13.1) в* $L^p([0,T];E)$ *и компактность резольвенты* $(\lambda I - A)^{-1}$ *влекут аналитичность* C_0*-полугруппы* $\exp(\cdot A)$.

Чтобы понять, какое должно быть в Определении 13.4.3 пространство F, рассмотрим функцию $A\exp(tA)u^0$. Очевидно, что F есть пространство с нормой

$$\|u^0\|_F = (\int_0^T \|A\exp(tA)u^0\|_E^p \, dt)^{1/p} + \|u^0\|_E. \tag{13.12}$$

Такое пространство F есть частный случай пространств $E_{\theta,p}$, $0 < \theta < 1, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$, с нормой

$$\|u^0\|_{E_{\theta,p}} = \|u^0\|_E + (\int_0^T \|t^{1-\theta}A\exp(tA)u^0\|_E^p \frac{dt}{t})^{1/p},$$

$$\|u^0\|_{E_{\theta,\infty}} = \sup_{\tau > 0} \tau^{1-\theta}\|Aexp(\tau A)u^0\|_E.$$

Будем обозначать его $E_{1-\frac{1}{p}} = E_{1-\frac{1}{p},p}$.

Теорема 13.4.1 ([79]). *Для любой функции* $f(\cdot) \in L^p([0,T];E)$ *и любого* $u^0 \in E_{1-\frac{1}{p}}$ *формула (13.2) определяет* $E_{1-\frac{1}{p}}$*-значную функцию* $u(\cdot)$ *на* $[0,T]$ *и*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_{E_{1-\frac{1}{p}}} \leqslant M\Big(\|u^0\|_{E_{1-\frac{1}{p}}} + \frac{p^2}{p-1}\|f\|_{L^p([0,T];E)}\Big).$$

Теорема 13.4.2 ([79]). *Пусть задача (13.1) коэрцитивно разрешима в пространстве* $L^{p_0}([0,T];E)$ *при некотором* $1 < p_0 < \infty$ *с* $M(p_0) = M$. *Тогда она коэрцитивно разрешима при любом* $1 < p < \infty$ *и оценка (13.11) имеет место с* $M(p) = M\frac{p^2}{p-1}$.

Теорема 13.4.3. *Если пространство* $E = H$ *гильбертово и* $A \in \mathcal{H}(\theta, \omega)$, *то задача (13.1) коэрцитивно разрешима в* $L^2([0,T];H)$.

Теорема 13.4.4 ([79]). *В условиях Теоремы 13.4.2 при любых* $f(\cdot) \in L^p([0,T];E)$ *и* $u^0 \in E_{1-\frac{1}{p}}$ *задача (13.1) имеет в*

$L^p([0,T];E)$ *единственное решение* $u(\cdot)$ *такое, что неравенство коэрцитивности (13.11) выполняется в виде*

$$\|u'\|_{L^p([0,T];E)} + \|Au\|_{L^p([0,T];E)} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_{E_{1-\frac{1}{p}}} \leqslant$$

$$\leqslant M\frac{p^2}{p-1}\Big(\|f\|_{L^p} + \|u^0\|_{E_{1-\frac{1}{p}}}\Big).$$

Теорема 13.4.5 ([79])**.** *Пусть* $f(\cdot)\in L^q([0,T];E_{\alpha,q})$, $0<\alpha<1$, $1\leqslant q\leqslant\infty$ *и* $A\in\mathcal{H}(\theta,\omega)$. *Тогда существует единственное абсолютно непрерывное решение* $u(\cdot)$ *задачи (13.1) с* $u^0=0$ *такое, что* $Au(\cdot), u'(\cdot)\in L^q([0,T];E_{\alpha,q})$ *и*

$$\|u'\|_{L^q([0,T];E_{\alpha,q})} + \|Au\|_{L^q([0,T];E_{\alpha,q})} \leqslant \frac{M}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{L^q([0,T];E_{\alpha,q})},$$

причем константа M *не зависит от* f,α *и* q.

Теорема 13.4.6 ([79])**.** *Пусть* $1<p,q<\infty$, $0<\alpha<1$ *и* $f(\cdot)\in L^p([0,T];E_{\alpha,q})$. *Тогда формула (13.2) дает единственное абсолютно непрерывное решение* $u(\cdot)$ *задачи (13.1) с* $u^0=0$ *такое, что* $u'(\cdot), Au(\cdot)\in L^p([0,T];E_{\alpha,q})$ *и*

$$\|u'\|_{L^p([0,T];E_{\alpha,q})}+\|Au\|_{L^p([0,T];E_{\alpha,q})} \leqslant \frac{M(q)}{(p-1)\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{L^p([0,T];E_{\alpha,q})},$$

где $M(q)$ *не зависит от* α, p *и* f.

Теорема 13.4.7 ([79])**.** *Пусть* $A\in\mathcal{H}(\theta,\omega)$ *и* $1<p,q<\infty$, *или* $p=q=\infty$. *Тогда задача (13.1) допускает абсолютно непрерывное решение* $u(\cdot)$ *такое, что* $u'(\cdot), Au(\cdot)\in L^p([0,T];E_{\alpha,q})$ *и* $u(\cdot)$ *является непрерывной* $E_{1+\alpha-\frac{1}{p},q}$*-значной функцией тогда и только тогда, когда* $f(\cdot)\in L^p([0,T];E_{\alpha,p})$ *и* $u^0\in E_{1+\alpha-\frac{1}{p},q}$. *Это решение* $u(\cdot)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|u'(\cdot)\|_{L^p([0,T];E_{\alpha,q})} + \|Au(\cdot)\|_{L^p([0,T];E_{\alpha,q})} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_{E_{1+\alpha-\frac{1}{p},q}} \leqslant$$

$$\leqslant M\Big(\|u^0\|_{E_{1+\alpha-\frac{1}{p},q}} + \frac{M(p,q)}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{L^p([0,T];E_{\alpha,q})}\Big),$$

где $M(p,q)=\frac{M(q)p^2}{p-1}$, *если* $p\neq q$ *и* $M(p,p)=1$.

Теорема 13.4.8 ([79])**.** *Пусть* $p=q=1$, *или* $p=q=\infty$. *Тогда задача (13.1) имеет абсолютно непрерывное решение* $u(\cdot)$ *такое, что* $u'(\cdot), Au(\cdot)\in L^p([0,T];E_{\alpha,p})$ *тогда и только тогда, когда* $f(\cdot)\in L^p([0,T];E_{\alpha,q}))$ *и* $u^0\in E_{1+\alpha-\frac{1}{p},}$.

Это решение удовлетворяет неравенству

$$\|u(\cdot)\|_{L^p([0,T];E_{\alpha,p})} + \|Au(\cdot)\|_{L^p([0,T];E_{\alpha,p})} \leqslant$$
$$\leqslant M(\|u^0\|_{1+\alpha-\frac{1}{p},p} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{L^p([0,T];E_{\alpha,p})}).$$

Предложение 13.4.3 ([79])**.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $f(\cdot) \in L^p([0,T];E_{\alpha,p})$ *и* $u^0 \in E_{1+\alpha-\frac{1}{p},\infty}$. *Тогда* $u(\cdot)$ *из формулы (13.2) удовлетворяет оценке*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_{E_{1+\alpha-\frac{1}{p},\infty}} \leqslant M\Big(\|u^0\|_{E_{1+\alpha-\frac{1}{p},\infty}} + \frac{p^2}{p-1}\|f\|_{L^p([0,T];E_{\alpha,\infty})}\Big).$$

Положим $|\tilde{\Omega}| = \mu(\tilde{\Omega})$ для μ-измеримого множества $\tilde{\Omega} \in \Omega$.

Определение 13.4.6. Если $(\exp(tA)f)(x) = \int_\Omega k(t,x,y)f(y)\,dy$, $t \in \mathbb{R}$, то говорят, что k удовлетворяет *Пуассоновской оценке порядка* $m \in \mathbb{N}$, если $|k(t,x,y)| \leqslant P(t,x,y)$ при почти всех $x, y \in \Omega$, где

$P(t,x,y) := |B(x,t^{1/m})|^{-1}p(\frac{d(x,y)^m}{t})$, а $p(\cdot)$ – ограниченная, убывающая, непрерывная и сильно положительная функция, удовлетворяющая условию

$\lim_{r\to\infty} r^{n+\delta}p(r^m) = 0$ для некоторого $\delta > 0$ и $|B(x,\rho)| := \{y \in \Omega : d(x,y) < \rho\}$;

Теорема 13.4.9 ([162])**.** *Пусть* $1 < p,q < \infty$ *и* (Ω,μ,d) — *топологическое пространство, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) $|B(x,2\rho)| \leqslant C|B(x,\rho)|$,

где $B(x,\rho)$ *– шар радиуса* ρ *с центром в точке* x*;*

(ii) $ess\,sup_{x\in\Omega}|B(x,\rho)| \leqslant C\,ess\,inf_{x\in\Omega}|B(x,\rho)|$,

(iii) оператор A *порождает аналитическую* C_0*-полугруппу на* $L^2(\Omega)$ *с* $\omega(A) < 0$.

Пусть полугруппа $\exp(\cdot A)$ *может быть представлена ядром, удовлетворяющим Пуассоновской оценке порядка* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда* $A \in MR(p, L^q(\Omega))$, *то есть для каждой* $f \in L^p(\overline{\mathbb{R}}_+; L^q(\Omega))$ *существует единственное решение* $u(\cdot) \in W^{1,p}(\overline{\mathbb{R}}_+; L^q(\Omega)) \cap L^p(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{D}(A_q))$ *задачи (13.1) с* $u^0 = 0$ *в смысле* $L^p(\overline{\mathbb{R}}_+; L^q(\Omega))$. *Кроме того,*

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^p_{L^q(\Omega)}\,dt + \int_0^\infty \|u'(t)\|^p_{L^q(\Omega)}\,dt + \int_0^\infty \|Au(t)\|^p_{L^q(\Omega)}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C\int_0^\infty \|f(t)\|^p_{L^q(\Omega)}\,dt$$

при любой $f(\cdot) \in L^p(\overline{\mathbb{R}}_+; L^q(\Omega))$.

Определение 13.4.7. Позитивный оператор $A \in \mathcal{C}(E)$ называется *оператором ограниченных мнимых степеней*, если существуют $\varepsilon > 0$ и $M \geqslant 1$ такие, что $A^{it} \in B(E)$ и $\|A^{it}\| \leqslant M$ при $-\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon$.

Предложение 13.4.4 ([74])**.** *Пусть A позитивен и A является оператором ограниченных мнимых степеней. Тогда существуют $M \geqslant 1$ и $\theta \geqslant 0$ такие, что $\{A^{it}\}_{t\in\mathbb{R}}$ - C_0-группа операторов на E с производящим оператором $i\log A$ и $\|A^{it}\| \leqslant Me^{\theta|t|}, \quad t \in \mathbb{R}$.*

Заметим, что если $E = H$ – гильбертово и $A = A^* \geqslant \alpha I > 0$, то A является оператором ограниченных мнимых степеней.

Определение 13.4.8. Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}; E)$ – пространство Шварца гладких быстро убывающих E-значных функций. Для $u(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; E)$ определим *преобразование Гильберта*

$$(Hu)(t) := \frac{1}{\pi} PV(\frac{1}{t}) * u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau}\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для произвольного банахова пространства E преобразование Гильберта не обязано быть ограниченным оператором на $L^p(\mathbb{R}; E)$ даже для какого-нибудь $p \in (1, \infty)$.

Определение 13.4.9. Пространство E называется *UMD-пространством*, если преобразование Гильберта - ограниченный оператор на $L^p(\mathbb{R}; E)$ при некотором $p \in (1, \infty)$.

Предложение 13.4.5 ([74])**.** *Гильбертово пространство H, любое банахово пространство, изоморфное UMD-пространству, любое интерполяционное пространство $(X, Y)_{\theta,p}$ и $[X, Y]_{\theta,p}$, построенное по интерполяционной паре UMD-пространств, конечномерное пространство — все они являются UMD-пространствами.*

Предложение 13.4.6 ([74])**.** *Пусть E — UMD - пространство. Тогда преобразование Гильберта – ограниченный оператор на $L^p(\mathbb{R}, E)$ для любого $p \in (1, \infty)$.*

Предложение 13.4.7 ([74])**.** *Пусть E — UMD-пространство, а оператор $A \in \mathcal{H}(\theta, \omega)$ таков, что $\|(-A)^{it}\| \leqslant Me^{\phi|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда задача (13.1) коэрцитивно разрешима в $L^p([0, T]; E)$ с $F = (E, D(A))_{1-\frac{1}{p},p}$.*

В связи с Предложением 13.4.7 интересно следующее

Предложение 13.4.8 ([192])**.** *Пусть $A \in \mathcal{H}(0, \beta)$ на гильбертовом пространстве $E = H$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) существуют $C > 0$ и ω такое, что $\|(-A)^{it}\| \leqslant Ce^{\omega t}$, $t \in \mathbb{R}$;

(ii) существует оператор $Q \in B(H)$ такой, что $Q^{-1} \in B(H)$ и $\|Q^{-1}\exp(tA)Q\| \leqslant 1$, $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Понятно, что исследование коэрцитивности задач (13.1) представляет собой по существу изучение оператора свертки $A\int_0^t \exp((t-s)A)f(s)\,ds$ в пространстве $L^p([0,T];E)$. Для оператора такого вида естественно применить теорему Михлина о мультипликаторах Фурье, чтобы доказать его непрерывность в $L^p(\mathbb{R};E)$ пространстве. Этот подход и был недавно реализован в [171], [289], [290].

Пуассоновская полугруппа на $L^1(\mathbb{R})$ and on $L^p(\mathbb{R};E)$ не коэрцитивно корректно поставлена на $L^p(\mathbb{R},E)$ пространстве, если E не является UMD–пространством (см. [188]). Следовательно, условие, что E есть UMD–пространство в некотором смысле необходимо.

Однако открытым оставался вопрос о том каждый ли генератор аналитической полугруппы на $L^q(\Omega,\mu)$, $1 < q < \infty$, обеспечивает коэрцитивную разрешимость в $L^p(\mathbb{R};E)$. Недавно Калтон и Ласьен [170] дали отрицательный ответ на этот вопрос. Если каждая ограниченная аналитическая полугруппа на банаховом пространстве E такова, что задача (13.1) коэрцитивно корректна, то E изоморфно гильбертовому пространству.

Если A порождает ограниченную аналитическую полугруппу $\{\exp(zA) : |\arg(z)| \leqslant \delta\}$, на банаховом пространстве E, то следующие три множества ограничены в операторной норме:

i) $\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in i\mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$;
ii) $\{\exp(tA), tA\exp(tA) : t > 0\}$;
iii) $\{\exp(zA) : |\arg z| \leqslant \delta\}$.

В гильбертовых пространствах отсюда следует коэрцитивная корректность в $L^p(\mathbb{R}_+;E)$, однако только в гильбертовых пространствах E. Необходимым дополнительным условием в более общих банаховых пространствах E будет R–ограниченность.

Множество $\mathcal{T} \subset B(E)$ называется *R–ограниченным*, если существует постоянная $C < \infty$ такая, что для всех $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{T}$ и $x_1, \ldots, x_k \in E, k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \|\sum_{j=0}^k r_j(u)Q_j(x_j)\|\,du \leqslant C\int_0^1 \|\sum_{j=0}^k r_j(u)x_j\|\,du, \tag{13.13}$$

где $\{r_j\}$ — последовательность нкзависимых симметричных $\{-1,1\}$–значных случайных величин, например, функций Радемахера $r_j(t) = \operatorname{sign}(\sin(2^j\pi t))$ на $[0,1]$. Наименьшее C

такое, что выполнено (13.13), называется постоянной R–ограниченности $\mathcal{T}$ и обозначается через $R(\mathcal{T})$.

Теорема 13.4.10 ([290]). *Пусть A порождает ограниченную аналитическую полугруппу $\exp(tA)$ на UMD–пространстве E. Тогда задача (13.1) коэрцитивно корректна в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+;E)$ в том и только том случае, если одно из вышеуказанных множеств i), ii) или iii) R–ограничено.*

Дискретный вариант теоремы 13.4.10 рассмотрен в [80].

Определение 13.4.10. Задача (13.5) называется *коэрцитивно разрешимой* в $L^p([0,T];E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, если для любого $f(\cdot) \in L^p([0,T];E)$ существует единственное решение $u(\cdot)$, которое удовлетворяет уравнению почти всюду, $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$ и такое, что $u''(\cdot), Au(\cdot) \in L^p([0,T];E)$ и выполнено неравенство коэрцитивности

$$\begin{aligned} &\|u''(\cdot)\|_{L^p([0,T];E)} + \|Au(\cdot)\|_{L^p([0,T];E)} \leqslant \\ &\leqslant M(p)(\|f(\cdot)\|_{L^p([0,T];E)} + \|u^0\|_{D(A)} + \|u^1\|_{E^1}). \end{aligned} \tag{13.14}$$

Теорема 13.4.11 ([231]). *Пусть задача (13.5) коэрцитивно разрешима в $L^p([0,T];E)$, с некоторым $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда A ограничен.*

Доказательство. Положим для простоты $u^0 = u^1 = 0$. Тогда из (13.14) следует, что оператор $(Kf)(t) := A\int_0^t S(t-s,A)f(s)\,ds$, т.е. оператор K из (12.19) с $B = I$, является непрерывным из $L^p([0,T];E)$ в $L^p([0,T];E)$. Из Теоремы 12.7.1 вытекает, что $K \in B(L^p([0,T];E), C([0,T];E))$. Возьмем теперь $f \in C([0,T];E)$. Тогда из следствия 12.8.2 мы получаем, что $\|AS(\cdot,A) * f\|_{C([0,T];E)} \leqslant CT^{1/p}T^{1/q}\|f\|_{C([0,T];E)}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и, следовательно, $SV(C(\cdot,A),t) \leqslant Ct$ при $t \to 0$. Поэтому, в силу Предложения 8.1.14 получаем ограниченность оператора A.

§ 13.5. Коэрцитивность в $B([0,T];C^{2\theta}(\overline{\Omega}))$

В [151] доказан следующий результат:

Теорема 13.5.1. *Пусть Ω — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, лежащее по одну сторону от его топологической границы $\partial\Omega$, которая является подмногообразием $\mathbb{R}^n$ размерности $n-1$ и класса $C^{2+\theta}$ для некоторого $\theta \in (0,2)\setminus\{1\}$. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x,D_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha(x)D_x^\alpha$ — сильно эллиптический оператор второго порядка (т.е.* $\operatorname{Re}\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geqslant \nu|\xi|^2$ *для* *некоторого $\nu > 0$ и для любого $(x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$) с коэффициентами класса $C^\theta(\overline{\Omega})$. Тогда существуют $\mu \geqslant 0$, $\phi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ такие, что для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| \geqslant \mu$ и $|Arg\lambda| \leqslant \phi_0$ задача*

$$\begin{cases} \lambda u - \mathcal{A}u = f, \\ \gamma_0 u = 0, \end{cases} \tag{13.15}$$

при любом $f(\cdot) \in C^\theta(\overline{\Omega})$ имеет единственное решение $u(\cdot)$, принадлежащее $C^{2+\theta}(\overline{\Omega})$ для некоторого $M > 0$,

$$\begin{aligned} &|\lambda|^{1+\frac{\theta}{2}} \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + |\lambda| \, \|u\|_{C^\theta(\overline{\Omega})} + \|u\|_{C^{2+\theta}(\overline{\Omega})} \leqslant \\ &\qquad \leqslant M\Big(\|f\|_{C^\theta(\overline{\Omega})} + |\lambda|^{\frac{\theta}{2}} \|\gamma_0 f\|_{C(\partial\Omega)}\Big), \end{aligned} \tag{13.16}$$

где γ_0 — оператор следа на $\partial\Omega$.

Из (13.16) ясно, что оператор $\mathcal{A}$, вообще говоря, не порождает C_0–полугруппы в пространстве $E = C^\theta(\overline{\Omega})$, однако, следуя, скажем, [200], можно построить полугруппу $\exp(t\mathcal{A}), t \geqslant 0$, которая будет аналитической.

Рассмотрим следующую смешанную параболическую задачу Коши–Дирихле:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathcal{A}u(t,x) + f(t,x), & t \in [0,T], x \in \overline{\Omega}, \\ u(t,x') = g(t,x'), & t \in [0,T], x' \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{13.17}$$

Определение 13.5.1. Говорят, что задача (13.17) имеет классическое решение, если существует непрерывная функция $u(t,x)$, имеющая первую производную по t и производные порядка меньшего или равного двум по пространственным переменным, которые непрерывны вплоть до границы $[0,T] \times \overline{\Omega}$, т.е. $u(\cdot) \in C^1\Big([0,T]; C(\overline{\Omega})\Big) \cap C\Big([0,T]; C^2(\overline{\Omega})\Big)$ и выполяются уравнения в (13.17).

Пространство $B([0,T]; C^{2\theta}(\overline{\Omega}))$ определяется как пространство ограниченных функций $u(\cdot) : [0,T] \to C^{2\theta}(\overline{\Omega})$ наделенное обычной sup-нормой.

Теорема 13.5.2 ([151]). *Предположим, что выполнены следующие условия при некотором $\theta \in (0,2) \setminus \{1\}$:*

(I) Ω — открытое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$, лежащее по одну сторону от его топологической границы $\partial\Omega$, которая является подмногообразием $\mathbb{R}^n$ размерности $n-1$ и класса $C^{2+2\theta}$;

(II) оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$ *— сильно эллиптический оператор второго порядка (т.е.* $\operatorname{Re}\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geqslant \nu|\xi|^2$ *для некоторого* $\nu > 0$ *и для любого* $(x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$*) с коэффициентами класса* $C^{2\theta}(\overline{\Omega})$*).*

Тогда задача (13.17) имеет единственное классическое решение $u(\cdot)$*, принадлежащее* $B\Big([0,T]; C^{2+2\theta}(\overline{\Omega})\Big)$*, такое, что* $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in B\Big([0,T]; C^{2\theta}(\overline{\Omega})\Big)$*, в том и только том случае, если выполнены следующие условия:*

(a) $u_0 \in C^{2+2\theta}(\overline{\Omega})$*;*

(b) $f \in C\Big([0,T]; C(\overline{\Omega})\Big) \cap B\Big([0,T]; C^{2\theta}(\overline{\Omega})\Big)$*;*

(c) $g \in B\Big([0,T]; C^{2+2\theta}(\partial\Omega)\Big) \cap C\Big([0,T]; C^2(\partial\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0,T]; C(\partial\Omega)\Big)$*,* $\dfrac{\partial g}{\partial t} \in B\Big([0,T]; C^{2\theta}(\partial\Omega)\Big)$*,* $\dfrac{\partial g}{\partial t} - \gamma f \in C^\theta\Big([0,T]; C(\partial\Omega)\Big)$*;*

(d) $\gamma u_0 = g(0,\cdot)$*;*

(e) $\dfrac{\partial g}{\partial t}(0,\cdot) - \gamma f(0,\cdot) = \gamma\mathcal{A}u_0$*.*

§ 13.6. Краевая задача

Рассмотрим двухточечную граничную задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(m)}(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \\ u^{(j)}(0) = u_j^0, \ j \in \alpha_1, \quad u^{(k)}(T) = u_k^1, \quad k \in \alpha_2, \end{array} \right. \tag{13.18}$$

с непрерывной функцией $f(\cdot) \in C([0,T]; E)$.

Под решением задачи (13.18) понимаем функцию $u(\cdot) \in C^m([0,T]; E)$, принимающую значения в $D(A)$ и удовлетворяющую (13.18) с u_j^0, $u_k^1 \in D$ для некоторого плотного в $D(A)$ множества D.

Очевидно определение корректной постановки: если $f_n(t) \to 0$ равномерно по t из промежутка $[0,T]$ и $u_{j,n}^0 \to 0$, $u_{k,n}^1 \to 0$ при $j \in \alpha_1$, $k \in \alpha_2$ и $n \to \infty$, то $u_n(t) \to 0$ равномерно по $t \in [0,T]$.

Теорема 13.6.1 ([134])**.** *Пусть задача (13.18) корректно поставлена при* $u_j^0 = 0$*,* $u_k^1 = 0$ *для любых* $j \in \alpha_1, k \in \alpha_2$*. Тогда* $m_0 + m_1 \geqslant m$*, где* $m_0 = |\alpha_0$*,* $m_1 = |\alpha_1|$*.*

Теорема 13.6.2 ([134])**.** *Пусть задача (13.18) корректно поставлена при* $f(\cdot) \equiv 0$*. Тогда* $m_0 + m_1 \leqslant m$*.*

Теорема 13.6.3 ([134]). *Пусть задача (13.18) корректно поставлена и либо*

i) m четно и $m_0 < \frac{m-2}{2}$ или $m_1 < \frac{m-2}{2}$,

либо

ii) m нечетно и $m_0 < \frac{m-1}{2}$ или $m_1 < \frac{m-1}{2}$

Тогда A ограничен.

Теорема 13.6.4 ([103]). *Пусть $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$ и $-\mathbb{N}_0^2 \subseteq \rho(A)$ и оба предела (5.1) существуют при всех $x \in E$. Тогда существует единственное решение задачи Дирихле*

$$u''(t) = Au(t), \quad u(0) = x, \quad u(\pi) = y, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$

причем

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant\pi} \|u(s)\| \leqslant c(\|u(0)\| + \|u(\pi)\|).$$

Рассмотрим задачу

$$u''(t) = Au(t) + f(t), \, t \in \mathbb{R} \tag{13.19}$$

с оганиченными решениями и с секториальным оператором A на E.

Теорема 13.6.5 ([289]). *Пусть A задан на UMD пространстве E. Тогда задача (13.19) является коэрцитивно разрешимой т. и т. т., когда множество $\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda < 0\}$ является R-ограниченным в $B(E)$.*

В пространстве E рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} u''(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \\ L_i u = \alpha_{i_1} u(0) + \alpha_{i_2} u'(0) + \beta_{i_1} u(T) + \beta_{i_2} u'(T) = f_i, \\ i = 1,2 \end{gathered} \tag{13.20}$$

с позитивным оператором A. Краевая задача (13.20) называется равномерно корректной на $X \subset E$ и $[a,b] \subset [0,T]$ если для любых $f_1, f_2 \in E$ ее решение $u(\cdot) \in C^2([0,T];E)$ существует, единственно и устойчиво по отношению к $f_i, i = 1,2$, равномерно по $t \in [0,T]$, т.е.

$$\sup_{t\in[a,b]} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leqslant C\big(\|f_1 - \tilde{f}_1\| + \|f_2 - \tilde{f}_2\|\big).$$

В [28], [45] даны необходимые и достаточные условия того, чтобы задача (13.20) с позитивным оператором A , была равномерно-корректной. Там же установлены также ряд теорем о корректности и некорректности эллиптических задач, а также теоремы для задач типа

$$u'(t) = Au(t), \, 0 < t < T, \, \mu\, u(0) + u(T) = u^0.$$

Глава 14

ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

В настоящее время имеется довольно обширный материал (см., например, [46], [92], [94]) по исследованию полугрупповыми методами нелинейных задач $u'(t) = (Au)(t)$ и $u'(t) \in (Au)(t)$. В данной главе мы рассматриваем лишь задачи с линейным главным оператором A и гладкой нелинейной правой частью f. Именно для таких полулинейных задач достаточно хорошо разработан численный анализ, который мы приведем лиш в двух теоремах. По поводу общих аппроксимационных теорем и численного анализа см. обзор [152].

§ 14.1. Уравнение первого порядка

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу Коши

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in [0, T], \\ u(0) = u^0, \end{cases} \tag{14.1}$$

с оператором A, порождающим C_0-полугруппу. Здесь функция $f : [0, T] \times E \to E$. Существование и единственность решения задачи (14.1) подробно обсуждается, например, в [71]. Классическое решение задачи (14.1) определяется аналогично Определенияю 13.2.1.

Заметим, что всякое классическое решение задачи (14.1) удовлетворяет уравнению

$$u(t) = (Ku)(t) \equiv \exp(tA)u^0 + \int_0^t \exp((t-s)A) f(s, u(s))\, ds. \tag{14.2}$$

Определение 14.1.1. Непрерывное решение $u(\cdot)$ уравнения (14.2) называется *обобщенным решением* задачи (14.1).

Понятно, что в полулинейном случае обобщенное решение также, как и в случае неоднородных уравнений, не обязано быть классическим решением.

Теорема 14.1.1 ([18]). *Пусть $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$, $u^0 \in E$, функция $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \times E \to E$ непрерывна по t и липшицева по второму аргументу, т.е. для каждого $\tau > 0$*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant L(\tau) \|x - y\|_E$$

при любых $x, y \in E$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, и некотоой константе $L(\tau)$. Тогда задача (14.1) имеет единственное обобщенное решение на $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Если условие Липшица выполняется локально, то справедлива локальная теорема существования обобщенного решения.

Условия существования и единственности задач типа (14.1) - (14.2) подробно исследовались, например, в [18], [71], [72], [74], [157].

Предложение 14.1.1 ([44]). *Пусть* $-A$ *сильно позитивен и* $A^{-1} \in B_0(E)$. *Пусть оператор* $f(t,u)$ *непрерывен по совокупности переменных и* $\|f(t,u(t))\| \leqslant c(R) < \infty$ *при* $t \in [0,t_0]$ *и* $\|u\| \leqslant R$. *Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи (14.1) на* $[0,t^*] \subset [0,t_0]$, $t^* \leqslant t_0$.

Предложение 14.1.2 ([44]). *Пусть* $-A$ *сильно позитивен. Пусть оператор-функция* $f(t,A^{-\alpha}w)$ *непрерывна на* $[0,t_0]$ *при любом* $w \in E$ *и пусть* $\|f(t,A^{-\alpha}w_1) - f(t,A^{-\alpha}w_2)\| \leqslant c(R)\|w_1 - w_2\|$, $\|w_1\|, \|w_2\| \leqslant R$. *Пусть наконец* $u^0 \in D(A^\alpha)$. *Тогда существует единственное обобщенное, т.е. непрерывное решение* $w(\cdot)$ *уравнения*

$$w(t) = \exp(tA)A^\alpha u^0 + \int_0^t A^\alpha \exp((t-s)A)f(s,A^{-\alpha}w(s))ds$$

определенное на $[0,t^*] \subset [0,t_0]$.

Пусть Ω - открытое множество в банаховом пространстве E и пусть $\mathcal{B} : \overline{\Omega} \to E$ – компактный оператор, не имеющий неподвижных точек на границе Ω. Тогда для векторного поля $\mathcal{W}(x) = x - \mathcal{B}x$ определено вращение $\gamma(I - \mathcal{B}; \partial\Omega)$ являющееся целочисленной характеристикой этого поля. Пусть z^* - изолированная неподвижная точка оператора $\mathcal{B}$ в шаре $B(z^*, r_0)$ с радиусом r_0 и центром в точке z^*. Тогда $\gamma(I - \mathcal{B}; \partial B(z^*, r_0)) = \gamma(I - \mathcal{B}; \partial B(z^*, r))$ при $0 < r < r_0$.

Это общее значение вращения называется индексом неподвижной точки z^* и обозначается $ind(z^*; I - \mathcal{B})$.

Теорема 14.1.2 ([24]). *Пусть* $A \in \mathcal{H}(\theta,\omega)$, *резольвента* $(\lambda - A)^{-1}$ *компактна при некотором* $\lambda \in \rho(A)$ *и оператор* K *задан формулой (14.2). Если* $u^*(\cdot)$ *- единственное обобщенное решение задачи (14.1), то* $ind(u^*(\cdot); I - K) = 1$.

Эта теорема используется, например, при аппроксимации задачи Коши (14.1) как по пространству так и по времени [58].

Определение 14.1.2. Решение задачи Коши (14.1) называется *устойчивым по Ляпунову* если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое , что неравенство $\|u(0) - \tilde{u}(0)\| \leqslant \delta$ влечет $\max_{0 \leqslant t < \infty} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leqslant \varepsilon$, где $\tilde{u}(\cdot)$ – решение задачи (14.1) с начальным условием $\tilde{u}(0)$.

Определение 14.1.3. Решение задачи Коши (14.1) называется *равномерно асимптотически устойчивым* в точке $u(0)$, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого обобщенного решения $\tilde{u}(\cdot)$ задачи (14.1) с $\|u(0) - \tilde{u}(0)\| \leqslant \delta$ следует, что $\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| = 0$ равномерно по $\tilde{u}(0) \in B(u(0), \delta)$, т.е. существует функция $\Phi_{u(0),\delta}(\cdot)$ такая, что $\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leqslant \Phi_{u(0),\delta}(t)$ с $\Phi_{u(0),\delta}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Отметим, что условия существования равномерной асимптотической устойчивости решения задачи (14.1) даны, например, в [71] - Теорема 8.1.8. Эти условия связаны с расположением спектра оператора $A + \frac{\partial}{\partial u} f(t, u^*(\cdot))$.

Рассмотрим в банаховом пространстве E периодическую задачу

$$v'(t) = Av(t) + f(t, v(t)), \quad v(0) = v(T), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{14.3}$$

с оператором $A \in \mathcal{H}(\theta, \omega)$. В случае периодических решений аналогом уравнения (14.2) будет интегральное уравнение

$$\begin{gathered} v(t) = (Kv)(t) \equiv \\ \equiv \exp(tA)(I + \exp(TA))^{-1} \int_0^T \exp((T-s)A) f(s, v(s)) ds + \\ + \int_0^t \exp((t-s)A) f(s, v(s)) ds, \ \ t \in [0, T]. \end{gathered} \tag{14.4}$$

Как было отмечено в Предложении 2.1.36 из [15], для разрешимости задачи (14.3) достаточно предполагать существование обратного оператора $(I - \exp(tA))^{-1}$ при $t > t_0$. Тогда оператор $(I - \exp(tA))^{-1} \in B(E)$ при любом $t > 0$.

Обозначим через $u(\cdot, u^0)$ решения задачи (14.1) с $u(0) = u^0$. Тогда функция $u(\cdot, u^0)$ удовлетворяет уравнению (14.2), и мы можем определить оператор сдвига по траектории $\mathcal{K}u^0 = u(T, u^0)$, который отбражает E в E. Если $u(\cdot, u^0)$ является T-периодическим решением задачи (14.1), то u^0 есть нуль векторного поля оператора $\mathcal{K}$, т.е. $(I - \mathcal{K})(u^0) = 0$.

Обратим внимание на то, что оператор K отображает $C([0,T]; E)$ в $C([0,T]; E)$ и его неподвижные точки, если они существуют, есть решения уравнения (14.4).

Теорема 14.1.3 ([93]). *Пусть $A \in \mathcal{H}(\theta, \omega)$, резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ компактна при некотором $\lambda \in \rho(A)$, а функция f достаточно гладкая так, что существует периодическое решение $v^*(\cdot)$ задачи (14.3) такое, что задача (14.1) в точке*

$u(0) = v^*(0)$ *имеет изолированное равномерно асимптотически устойчивое решение. Тогда* $ind(v^*(0); I - \mathcal{K}) = ind(v^*(\cdot); I - K)$.

Доказательство. Пусть $S \equiv S(x^*, \rho)$. Тогда вращение $\gamma(I - \mathcal{K}; \partial S)$ поля $I - \mathcal{K}$ на сфере ∂S равно индексу $ind(x^*; I - \mathcal{K})$:

$$\gamma(I - \mathcal{K}; \partial S) = ind(x^*; I - \mathcal{K}). \tag{14.5}$$

Пусть

$$M = \sup_{x \in S} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v(t; x)\| \tag{14.6}$$

и рассмотрим область $\Omega \subset F = C([0,T]; E)$ определенную как

$$\Omega = \{u(\cdot) \in C([0,T]; E) : u(0) \in S, \ \|u(\cdot)\|_F \leqslant M + 1\}.$$

Единственным нулем компактного векторного поля $I - K$ на $\overline{\Omega}$ является функция $v^*(\cdot)$. Следовательно,

$$\gamma(I - K; \partial\Omega) = ind(v^*(\cdot); I - K).$$

Ввиду (14.5) and (14.6) для того, чтобы доказать теорему о родственности, достаточно показать, что

$$\gamma(I - \mathcal{K}; \partial S) = \gamma(I - K; \partial\Omega). \tag{14.7}$$

Для этого рассмотрим на $\partial\Omega$ семейство компактных векторных полей

$$\Phi(v(\cdot); \lambda) = v(t) - (1-\lambda) exp(tA) \Big(I - exp(TA)\Big)^{-1} \times$$
$$\times \int_0^T exp((T-s)A) f(s; v(s)) ds - \lambda \exp(tA) \mathcal{K}(v(0)) -$$
$$- \int_0^t \exp\big((t-s)A\big) f(s, v(s)) ds \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1). \tag{14.8}$$

Поля $\Phi\big(v(\cdot); \lambda\big)$ невырождены на $\partial\Omega$. Действительно, если для некоторых $v_0(\cdot) \in \partial\Omega$ и $\lambda_0 \in [0,1]$ мы имеем $\Phi\big(v_0(\cdot); \lambda_0\big) = 0$, то

$$\begin{gathered} v_0(0) = (1 - \lambda_0) \Big(I - \exp(TA)\Big)^{-1} \times \\ \times \int_0^T \exp\big((T-s)A\big) f(s, v_0(s)) ds + \lambda_0 v_0(T). \end{gathered} \tag{14.9}$$

Так как из равенства (14.9) и того, что $\Phi(v_0(\cdot);\lambda_0) = 0$, следует, что функция $v_0(\cdot)$ есть обобщенное решение (14.1), то получаем

$$\int_0^T \exp\big((T-s)A\big) f(s, v_0(s))ds = v_0(T) - exp(TA)v_0(0). \qquad (14.10)$$

Без потери общности можно положить, что $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$. Но из (14.9) and (14.10) следует, что

$$exp(TA)\big((v_0(0) - v_0(T)\big) = \lambda_0^{-1}\big(v_0(0) - v_0(T)\big).$$

Если $v_0(0) - v_0(T) \neq 0$, то этот элемент есть собственный вектор оператора $exp(TA)$ с собственным значением $\lambda_0^{-1} > 1$. Однако это невозможно, так как $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$ и для аналитических C_0-полугрупп $\sigma\big(exp(TA)\big) \setminus \{0\} = e^{T\sigma(A)}$. Следовательно $v_0(0) = v_0(T)$, откуда следует, что $v_0(\cdot)$ есть T-периодическое решение задачи (14.3) и что это есть ноль поля $I-K$. Мы приходим к противоречию.

Поля семейств (14.8) невырождены на $\partial\Omega$. Поэтому поля $\Phi(v(\cdot);0) = I - K$ и $\Phi(v(\cdot);1)$ гомотопны на $\partial\Omega$. Мы получаем

$$\gamma(I-K;\partial\Omega) = \gamma\Big(\Phi\big(v(\cdot);1\big);\partial\Omega\Big). \qquad (14.11)$$

Рассмотрим на $\partial\Omega$ следующее семейство векторных полей ($0 \leqslant \lambda \leqslant T$)

$$\begin{aligned}\Psi\big(v(\cdot);\lambda\big) = v(t) - P_\lambda\Big(&exp(tA)\mathcal{K}\big(v(0)\big) + \\ &+ \int_0^t \exp\big((t-s)A\big) f\big(s, v(s)\big)ds\Big),\end{aligned} \qquad (14.12)$$

с оператором $P_\lambda : F \to F$, определенным как $(P_\lambda w)(t) = w(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant \lambda$, и $(P_\lambda w)(t) = w(\lambda)$ для $\lambda \leqslant t \leqslant T$.

Оператор

$$Q(v(\cdot))(t) = exp(tA)\mathcal{K}\big(v(0)\big) + \int_0^t \exp\big((t-s)A\big) f\big(s, v(s)\big)ds,$$

который отображает F на F, компактен. Оператор $P_\lambda : F \to F$ сильно непрерывен по λ. Поэтому оператор $P_\lambda Q$ равномерно непрерывен по λ и семейство (14.12) есть компактная деформация (см. раздел 19.1 в [43]).

Покажем, что семейства (14.12) невырождены на $\partial\Omega$. Предположим, что для некоторого $\lambda_0 \in [0,1]$ and $v_0(\cdot) \in \partial\Omega$ мы имеем

$v_0(\cdot) \neq v(\cdot; x^*)$ and $\Psi\big(v_0(\cdot); \lambda_0\big) = 0$. Граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из двух частей

$$G_0 = \{v(\cdot) \in C([0,T]; E) : v(0) \in S,\ \|v(\cdot)\|_{C([0,T];E)} = M+1\}$$

и

$$G_1 = \{v(\cdot) \in C([0,T]; E) : v(0) \in \partial S,\ \|v(\cdot)\|_{C([0,T];E)} \leqslant M+1\}.$$

Пусть $v_0(\cdot) \in G_0$. Тогда

$$\|v_0(\cdot)\|_{C([0,T];E)} = M+1. \tag{14.13}$$

С другой стороны, так как функция $v_0(\cdot)$ есть решение (14.1) на отрезке $[0,\lambda]$ и $v_0(0) \in S$, то из (14.6) следует, что

$$\|v_0(\cdot)\|_{C([0,T];E)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v_0(t)\|_E = \max_{0 \leqslant t \leqslant \lambda} \|v_0(t)\|_E \leqslant M. \tag{14.14}$$

Уравнения (14.13) and (14.14) противоречивы. Поэтому имеется только одна возможность — $v_0(\cdot) \in G_1$ и $v_0(0) \in \partial S$. Но из $\Psi\big(v_0(\cdot); \lambda_0\big) = 0$ следует, что $v_0(0) = \mathcal{K}(v_0(0))$, что невозможно в силу выбора радиуса ρ шара S. Поэтому, поля (14.12) невырождены на $\partial\Omega$ и гомотопны. Следовательно, $\gamma\Big(\Psi\big(v(\cdot); 0\big); \partial\Omega\Big) = \gamma\Big(\Psi\big(v(\cdot); T\big); \partial\Omega\Big)$. Но $\Psi\big(v(\cdot); T\big) = \Phi\big(v(\cdot); 1\big)$ и, следовательно,

$$\gamma\Big(\Psi\big(v(\cdot); 0\big); \partial\Omega\Big) = \gamma\Big(\Phi\big(v(\cdot); 1\big); \partial\Omega\Big). \tag{14.15}$$

Рассмотрим векторное поле

$$\Psi\big(v(\cdot); 0\big) = v(t) - \mathcal{K}\big(v(0)\big) \quad (v(\cdot) \in \partial\Omega).$$

Поскольку оператор $\mathcal{K}\big(v(0)\big)$ также можно рассматривать как отображения из F в пространство функций-констант, которое мы обозначим $\widetilde{E}$, то (см. [43]) его вращение совпадает с вращением его сужения $\widetilde{\Psi}$ на $\partial\Omega \cap \widetilde{E}$ и его вращение совпадает с вращением его сужения $\widetilde{\Psi}\big(v(\cdot); 0\big)$ на $\partial\Omega \cap \widetilde{E}$. Но поле $\widetilde{\Psi}\big(v(\cdot); 0\big)$ на $\partial\Omega \cap \widetilde{E}$ изоморфно полю $I - \mathcal{K}$ на ∂S. Поэтому

$$\gamma\Big(\Psi\big(v(\cdot); 0\big); \partial\Omega\Big) = \gamma\Big(\widetilde{\Psi}\big(v(\cdot); 0\big); \partial\Omega \cap \widetilde{E}\Big) = \gamma(I - \mathcal{K}; \partial S). \tag{14.16}$$

Из цепочки равенств (14.11), (14.15), (14.16) мы получаем (14.7). Теорема доказана.

Чтобы показать как можно использовать на практике, например, Теорему 14.1.3, определим условия
(A) Согласованность. Существует $\lambda \in \rho(A) \cap \cap_n\ \rho(A_n)$ такое, что резольвенты сходятся:

$$R(\lambda; A_n) \to R(\lambda; A);$$

(B) Устойчивость. Существуют некоторые постоянные $M_1 \geqslant 1$ и ω такие, что

$$\|R(\lambda; A_n)\| \leqslant M/|\lambda - \omega| \text{ при } \operatorname{Re}\lambda > \omega.$$

Для формулировки теоремы сходимости нам нужно определить некоторые понятия. Под полудискретной аппроксимацией T-периодической задачи (14.3) понимаются T-периодические задачи

$$v_n'(t) = A_n v_n(t) + f_n\big(t, v_n(t)\big),\ v_n(t) = v_n(t+T), t \in R_+, \quad (14.17)$$

где операторы A_n порождают аналитические полугруппы в E_n, выполнено условие (A), функции f_n равномерно ограничены: $\sup_{t\in[0,T],\|x_n\|\leqslant c_1} \|f_n(t,x_n)\| \leqslant C_2$, функции f_n аппроксимируют f, достаточно гладки и $f_n(t,x_n) = f_n(t+T,x_n)$ для любых $x_n \in E_n$ и $t \in R_+$.

Слабое решение (14.17) определяется из уравнений

$$v_n(t) = (K_n v_n)(t) \equiv$$

$$\exp(tA_n)\Big(I_n - \exp(TA_n)\Big)^{-1} \int_0^T \exp\big((T-s)A_n\big) f_n\big(s, v_n(s)\big) ds +$$

$$+ \int_0^t \exp\big((t-s)A_n\big) f_n\big(s, v_n(s)\big) ds. \quad (14.18)$$

Теорема 14.1.4. *Предположим, что выполнены условия (A) и (B) компактные резольвенты $R(\lambda; A)$, $R(\lambda; A_n)$ сходятся:*

$$R(\lambda; A_n) \to R(\lambda; A)$$

компактно для некоторого $\lambda \in \rho(A)$. Пусть

(i) функции f, f_n достаточно гладки, так что существует изолированное слабое решение $v^*(\cdot)$ периодической задачи (14.3) с $v^*(0) = x^*$ такое, что задача Коши

$$u'(t) = Au(t) + f\big(t, u(t)\big),\ u(0) = x^*, \quad (14.19)$$

имеет равномерно асимптотически устойчивое изолированное решение в точке x^*;

(ii) $f_n(t,x_n) \to f(t,x)$ для любого $t \in [0,T]$ при $x_n \to x$;

(iii) пространство E сепарабельно.

Тогда при почти всех n задачи (14.17) имеют периодические слабые решения $v_n^*(t), t \in [0,T]$, в окрестности $p_n v^*(\cdot)$, где $v^*(\cdot)$ — слабое периодическое решение (14.3) с $v^*(0) = x^*$. Каждая последовательность $\{v_n^*(\cdot)\}$ $\mathcal{P}$-компактна и $v_n^*(t) \to v^*(t)$ равномерно по $t \in [0,T]$.

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Покажем сначала, что компактная сходимость резольвент $R(\lambda; A_n) \to R(\lambda; A)$ эквивалентна компактной сходимости C_0-полугрупп $\exp(tA_n) \to \exp(tA)$ for any $t > 0$. Пусть $\|x_n\| = O(1)$. Тогда из оценки $\|A_n \exp(tA_n)\| \leqslant \frac{M}{t} e^{\omega t}$ получаем ограниченность последовательности $\{(A_n - \lambda I_n)\exp(tA_n)x_n\}$. Ввиду компактной сходимости резольвент получаем компактность последовательности $\{\exp(tA_n)x_n\}$.

Необходимость будет доказана, если для меры некомпактности $\mu(\cdot)$ (определение см. в [275]) будет установлено, что $\mu(\{(\lambda I_n - A_n)^{-1}x_n\}) = 0$ при $\|x_n\| = O(1)$. Имеем

$$\mu(\{(\lambda I_n - A_n)^{-1}x_n\}) = \mu\Big(\{\int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp(tA_n)x_n\}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \mu\Big(\{\int_0^q e^{-\lambda t} \exp(tA_n)x_n dt\}\Big) + \mu\Big(\{\int_Q^\infty e^{-\lambda t} \exp(tA_n)x_n dt\}\Big) +$$

$$+\mu\Big(\{\exp(\epsilon A_n)\int_q^Q e^{-\lambda t} \exp\left((t-\epsilon)A_n\right)x_n dt\}\Big).$$

Первые два члена могут быть сделаны меньшими, чем ϵ за счет выбора q, Q. Последний член равен нулю ввиду компактной сходимости $\exp(\epsilon A_n) \to \exp(\epsilon A)$ для любого $0 < \epsilon < q$.

Шаг 2. Рассмотрим теперь операторы K и K_n определенные (14.4) и (14.18) в пространствах

$$F = C([0,T]; E) \equiv \{u(t) : \|u\|_F = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_E < \infty\}$$

и

$$F_n = C([0,T]; E_n) \equiv \{u_n(t) : \|u_n\|_{F_n} = \max_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|_{E_n} < \infty\}.$$

Оператор K, определенный в (14.4), компактен в F. В самом деле, получаем, что оператор

$$\mathcal{F}_\epsilon(u_k)(t) = \exp(\epsilon A)\int_0^{t-\epsilon} \exp\left((t-s-\epsilon)A\right) f(s, u_k(s)) ds$$

отображает любое ограниченноемножество функций $\{u_k(\cdot)\}$, $\|u_k(\cdot)\|_F \leqslant C$, в компактное множество в E для любых $t > 0$ и $0 < \epsilon < t$. Можно увидеть, ччто $\|\mathcal{F}_\epsilon(u_k)(t) - \mathcal{F}(u_k)(t)\| \leqslant C\epsilon$ для любого $t \in (0,T]$, где

$$\mathcal{F}(u_k)(t) = \int_0^t \exp\left((t-s)A\right) f(s, u_k(s)) ds$$

и $0 < \epsilon < t$. Тогда оператор $\mathcal{F}(\cdot)(t) : F \to E$ компактен для тех же $t > 0$. При $t = 0$ оператор $\mathcal{F}(\cdot)(0)$ также компактен. Кроме того, множество функций $\{F_k(\cdot)\}, F_k(t) = \mathcal{F}(u_k)(t), t \in$

$[0,T]$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно так как при $0 < t_1 < t_2$ получаем

$$\|F_k(t_2)-F_k(t_1)\| \leqslant C\Big(\int_0^{t_1} \|\exp\left((t_2-s)A\right)-\exp\left((t_1-s)A\right)\| ds+|t_2-t_1|\Big)$$

и $\exp(\cdot A)$ равномерно непрерывна по $t > 0$.

Последовательность $\{y_k\}, y_k = \Big(I - \exp(TA)\Big)^{-1} \int_0^T \exp\big((T - s)A\big) f(s, u_k(s))ds \in E$, компактна, потому что $\{\mathcal{F}(u_k)(T)\}$ — компактное множество. Значит $\{\exp(\cdot A)y_k\}$ — компактная последовательность функций в F. По обобщенной теореме Арцела–Асколи, оператор K компактен.

Шаг 3. Легко видеть, что $K_n \to K$. В самом деле, $I_n \to I$ устойчиво, $\exp(TA_n) \to \exp(TA)$ компактно, так что $I_n - \exp(TA_n) \to I - \exp(TA)$ собственно, нуль-пространство $\mathcal{N}(I - \exp(TA)) = \{0\}$ и операторы $I_n - \exp(TA_n)$ фредгольмовы индекса нуль. Тогда из [14] следует, что $I_n - \exp(TA_n) \to I - \exp(TA)$ устойчиво, т.е. $(I_n - \exp(TA_n))^{-1} \to (I - \exp(TA))^{-1}$ и сходимость $K_n \to K$ есть следствие теоремы о мажорированной сходимости. Для того, чтобы показать, что $K_n \to K$ компактно, предположим, что $\|u_n\|_{F_n} = O(1)$. Теперь $\{K_n u_n\}$ $\mathcal{P}$-компактно по обобщенной теореме Арцела–Асколи. Чтобы показать это, проверим обращение в нуль меры некомпактности $\mu(\{(K_n u_n)(t)\}) = 0$ для всех $t \in [0,T]$. Рассмотрим равенство

$$(K_n v_n)(t) = \exp(tA_n)y_n + \psi_n^\tau(t) + \varphi_n^\tau(t),$$

где

$$y_n = \Big(I_n - \exp(TA_n)\Big)^{-1} \int_0^T \exp\left((T-s)A_n\right) f_n(s, v_n(s))ds,$$

$$\psi_n^\tau(t) = \exp(\tau A_n) \int_0^{t-\tau} \exp\left((t-s-\tau)A_n\right) f_n(s, v_n(s))ds,$$

$$\varphi_n^\tau(t) = \int_{t-\tau}^t \exp\left((t-s)A_n\right) f_n(s, v_n(s))ds.$$

Ввиду ограниченности $\|f_n(\cdot, v_n(\cdot))\|_{F_n}$, можно взять член $\|\varphi_n^\tau(\cdot)\|_{F_n}$ достаточно малым с достаточно малым τ и $\mu(\{\psi_n^\tau\}) = 0$. Последовательность $\{y_n\}$ $\mathcal{P}$-компактна, что и утверждалось.

Шаг 4. Из условия существования изолированного равномерно асимптотически устойчивого решения $u(t;x^*)$ задачи (14.19) следует, что в малой окрестности x^*, скажем, в $S(x^*,\rho) \subset E$, оператор $\mathcal{K}$ компактен, поскольку множество $\mathcal{F}(u_k)(T)$ компактно для любых $\{u_k\}, u_k(t) \in S(x^*, \epsilon), t \in [0,T]$, с $\|u_k(0) - x^*\| \leqslant \delta$.

Точка x^* является изолированным нулем компактного векторного поля $I - \mathcal{K}$ и определен $ind(x^*; I - \mathcal{K})$. Аналогичным образом, функция $v^*(t) = u(t; x^*), t \in [0, T]$, являющаяся решением задачи (14.4), есть изолированный нуль поля $I - K$ и определен $ind(v^*(\cdot); I - K)$.

Из теоремы 14.1.3 следует выполнение равенства $ind(x^*; I - \mathcal{K}) = ind(v^*(\cdot); I - K)$.

Шаг 5. Из условия равномерной асимптотической устойчивости решения $u^*(\cdot)$ задачи (14.1) в точке x^* следует, что существует целое число m такое, что оператор $\mathcal{K}^m$ отображает шар $S(x^*, \delta)$ в себя; более точно, $\|\mathcal{K}^m(x^*) - \mathcal{K}^m(x)\| \leqslant \phi_{x^*,\delta}(mT) < \delta$ для любого $x \in S(x^*, \delta)$. Значит это означает, что $ind(x^*; I - \mathcal{K}^m) = 1$ и по теореме 31.1 из [43] получаем $ind(x^*; I - \mathcal{K}) = 1$. Используя шаг 4, имеем $ind(v^*(\cdot); I - K) = 1$. Теперь $K_n \to K$ компактно, $ind(v^*(\cdot); I - K) = 1$ и, применяя результат из [275], получаем, что множество решений задачи (14.18) не пусто, любая последовательность решений $\{v_n^*(\cdot)\}$ $\mathcal{P}$-компактна и, кроме того, $v_n^*(t) \to v^*(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

§ 14.2. Уравнение второго порядка

Рассмотрим в банаховом пространстве E полулинейную задачу Коши

$$\begin{gathered} u''(t) = Au(t) + f(t, u(t), u'(t)), \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1,\ t \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{14.20}$$

с оператором A, который является производящим оператором C_0-косинус оператор-функции, и непрерывной функцией $f : R \times \mathcal{D} \to E$, где $\mathcal{D} \subseteq E^1 \times E$ локально замкнутое подмножество $E^1 \times E$.

Определение 14.2.1. *Классическим* решением (14.20) на отрезке $[0, T]$ назовем функцию $u(\cdot) : \mathbb{R} \to E$ такую, что $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет (14.20) при всех $t \in [0, T]$.

Как известно, классическое решение $u(t)$ задачи (14.20) удовлетворяет также интегральному уравнению (см. [271])

$$\begin{aligned} u(t) = (Ku)(t) \equiv C(t, A)u^0 + S(t, A)u^1 + \\ + \int_0^t S(t - s, A) f(s, u(s), u'(s)) ds \end{aligned} \tag{14.21}$$

и соответственно является обобщенным решением. Напомним, что решение $u(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$ уравнения (14.21) называется *обобщенным* решением (14.20).

Обобщенное решение (14.20) будет одновременно классическим решением, если $f(\cdot, u(\cdot))$ абсолютно непрерывна и п.в. дифференцируема. Поэтому, вообще говоря, при непрерывной функции f обобщенное решение не является классическим.

Вопросы существования и единственности задачи (14.20) изучались, например, в [157], [271]. В [157] рассмотрен также случай, когда E — банахова решетка.

Предположим также, что $f : J \times E \times E \to E$ удовлетворяет следующим условиям:

(C1) $f(\cdot, x, y)$ сильно измерима при всех $x, y \in E$, and $f(t, 0, 0) \in L^1(J, E)$.

(C2) Для всех x, y, h, $k \in E$ и для почти всех $t \in J$,

$$\|g(t, x+h, y+k) - g(t, x, y)\| \leqslant q(t, \|h\|, \|k\|),$$

где $f : J \times \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ — функция Каратеодори, $q(t, \cdot, \cdot)$ не убывает при почти всех, $t \in J$, задача

$$u''(t) = M\, f(t, u(t), u'(t)), \qquad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \qquad (14.22)$$

с некоторой постоянной M имеет для каждого $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}_+^2$ верхнее решение на J и нулевая функция является единственным решением (14.22), когда $u_0 = u_1 = 0$.

Теорема 14.2.1 ([157]). *Если выполнены предположения (C1)–(C2), то для каждого $(u^0, u^1) \in E^2 \times E$ задача (14.20) имеет единственное обобщенное решение $u(\cdot)$ на J. Кроме того, $u(\cdot)$ имеет вид $u(t) = u^0 + \int_0^t y(s)\,ds$, $t \in J$, где $y(\cdot)$ — равномерный предел последовательности $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ последовательных приближений*

$$y_{n+1}(t) = S(t)Au^0 + C(t)u^1 +$$
$$+ \int_0^t C(t-s, A) f(s, u^0 + \int_0^s y_n(\tau) d\tau, y_n(s))\,ds,$$

$t \in J$, $n \in \mathbb{N}$, с произвольно выбранным $y_0 \in C(J, E)$.

Рассмотрим вопрос о существовании обобщенного решения задачи

$$u''(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1, \qquad (14.23)$$

лежащего между верхним и нижним решениями в случае, когда E — упорядоченное банахово пространство с регулярным порядковым конусом и $f : J \times E \to E$.

Для заданных u^0, $u^1 \in E \times E$, говорят, что $u(\cdot) \in C(J, E)$ есть *нижнее обобщенное решение задачи* (14.23) на J, если

$$u(t) \leqslant C(t, A)u^0 + S(t, A)u^1 + \int_0^t S(t-s, A) f(s, u(s))\,ds \quad (14.24)$$

для каждого $t \in J$. Верхнее обобщенное решение (14.23) определяется аналогично с обращением знака неравенства в (14.24). Если в (14.24) имеет место равентсво, то говорят, что $u(\cdot)$ — обобщенное решение (14.23).

Введем также следующие предположения на отображения $f : J \times E \to E$ и $C : J \to B(E)$.

(C3) (14.23) имеет нижнее обобщенное решение $\underline{u}(\cdot)$ и верхнее обобщенное решение $\bar{u}(\cdot)$ такие, что $\underline{u}(\cdot) \leqslant \bar{u}(\cdot)$, и функции $f(\cdot, \underline{u}(\cdot))$ и $f(\cdot, \bar{u}(\cdot))$ интегрируемы по Бохнеру.

(C4) $f(\cdot, u(\cdot))$ сильно измерима как только $u(\cdot) \in C(J, E)$.

(C5) $f(t, \cdot)$ не убывает при почти всех $t \in J$.

(C6) $C(t, A)$ сохраняет порядок при всех $t \in J$.

Если выполнено (C6), то из (2.8) следует, что $S(t, A)$ также сохраняет порядок для каждого $t \in J$.

Теорема 14.2.2 ([157]). *Если выполнены условия (C3)–(C6), то задача (14.23) имеет экстремальные крайние решения, лежащие между* $\underline{u}(\cdot)$ *и* $\bar{u}(\cdot)$.

Теорема 14.2.3 ([93]). *Предположим, что выполнены условия (A) и (B) и компактные резольвенты* $R(\lambda; A), R(\lambda; A_n)$

$$R(\lambda; A_n) \to R(\lambda; A)$$

сходятся компактно для некоторого $\lambda \in \rho(A)$ *and* $u_n^0 \to u^0, u_n^1 \to u^1$. *Предположим, что (i) функции* f_n, f *непрерывны по обоим аргументам, а* f *такова, что существует единственное обобщенное решение* $u^*(t)$ *задачи (14.23) на* $[0, T]$ *(в таком случае, как будет показано,* $ind\ u^* = 1$);

(ii) $f_n(t, x_n) \to f(t, x)$ *равномерно по* $t \in [0, T]$ *при* $x_n \to x$;

(iii) пространство E *сепарабельно.*

Тогда для почти всех n *задачи*

$$u_n''(t) = A_n u_n(t) + f_n(t, u_n(t)), \tag{14.25}$$

$$u_n(0) = u_n^0, u_n'(0) = u_n^1,$$

в окрестности $p_n u^*(t)$ *имеют обобщенные решения* $u_n^*(t), t \in [0, T]$. *Каждая последовательность* $\{u_n^*(t)\}$ $\mathcal{P}$*-компактна и* $u_n^*(t) \to u^*(t)$ *равномерно по* $t \in [0, T]$.

Доказательство. Докажем сначала, что компактная сходимость резольвент $R(\lambda; A_n) \to R(\lambda; A)$ эквивалентна компактной сходимости синус операторных функций $S_n(t, A_n) \to S(t, A)$ для любого $t \geqslant 0$. Пусть $\|x_n\| = \mathcal{O}(1)$. Приступим к доказательству того, что из компактной сходимости резольвент $R(\lambda; A_n) \to R(\lambda; A)$ следует, что $\mu(\{S_n(t, A_n)x_n\}) = 0$ для любого t, где μ —

мера некомпактности последовательностей. Из тождеств

$$\lambda^2(\lambda^2 - A_n)^{-1}S_n(t, A_n) - S_n(t, A_n) =$$
$$= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda\eta}C_n(\eta A_n)S_n(t, A_n)d\eta - S_n(t, A_n) =$$
$$= \frac{1}{2}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda\eta}(S_n(t+\eta, A_n) + S_n(t-\eta, A_n) - 2S_n(t, A_n))d\eta$$

получаем оценку

$$\|\lambda^2(\lambda^2 - A_n)^{-1}S_n(t, A_n) - S_n(t, A_n)\| \leqslant$$
$$\frac{1}{2}\int_0^\delta e^{-\lambda\eta}\|S_n(t+\eta, A_n) - 2S_n(t, A_n) + S_n(t-\eta, A_n)\|d\eta\lambda +$$
$$+\frac{1}{2}\lambda\int_\delta^\infty e^{-\lambda\eta}Me^{\omega\eta}d\eta,$$

где первый член справа меньше, чем ϵ для малых δ, а второй член меньше, чем ϵ для достаточно больших λ (напомним, что если резольвенты компактно сходятся для некоторого λ, то они компактно сходятся для любого λ с достаточно большим $\operatorname{Re}\lambda$). Оценивая меру некомпактности

$$\mu(\{S_n(t, A_n)x_n\}) \leqslant \mu(\{\lambda^2(\lambda^2 I - A_n)^{-1}S_n(t, A_n)x_n\}) +$$
$$+\|\lambda^2(\lambda^2 I - A_n)^{-1}S_n(t, A_n) - S_n(t, A_n)\|$$

получаем компактную сходимость синус операторных функций. Необходимость будет доказана, если будет установлено, что $\mu(\{(\lambda - A_n)^{-1}x_n\}) = 0$ при $\|x_n\| = O(1)$ при условии, что $S_n(t, A_n) \to S(t, A)$ компактно. Имеем

$$\mu(\{(\lambda^2 - A_n)^{-1}x_n\}) = \mu(\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_n(t, A_n)x_n\}) \leqslant$$
$$\leqslant \mu(\{\int_0^q e^{-\lambda t}S_n(t, A_n)x_n dt\}) + \mu(\{\int_Q^\infty e^{-\lambda t}S_n(t, A_n)x_n dt\}) +$$
$$+\mu(\{\int_q^Q e^{-\lambda t}S_n(t, A_n)x_n dt\}).$$

Если q достаточно мало и Q достаточно велико, то первый и второй члены становятся меньше, чем ϵ. Третий член равен нулю в силу равномерной непрерывности $S_n(\cdot)$ на $[q, Q]$.

Докажем, что компактная сходимость синус оператор-функций и условие (ii) влекут, что $K_n \to K$ компактно. Ясно, что $K_n \to K$. Пусть $\{u_n(\cdot)\}$ — последовательность функций $u_n \in C(0, T; E_n)$ такая, что $\|u_n\|_{C(0,T;E_n)} = O(1)$ при $n \to \infty$. Для доказательства того, что $\{K_n u_n\}$ — компакт, применим теорему из [44]. Последовательность функций $\{K_n u_n\}, K_n u_n \in$

$C(0,T;E_n)$, равномерно ограничена, равностепенно непрерывна и для любого $t \in [0,T]$ оператор K_n отображает ограниченное множество функций $\{u_n\}$ в предкомпактное множество. Поэтому $K_n \to K$ компактно. Теперь из [275] следует, что $\gamma(I-K;\partial S_r) = \gamma(I_n-K_n;\partial S_{n,r})$ при $n \geqslant n_0$. Если будет установлено то, что $\gamma(I-K;\partial S_r) \neq 0$, то по теореме 3 из [275] получим, что решения 14.25) существуют в окрестности $p_n u^*(t)$, каждая последовательность $\{u_n^*(t)\}$ $\mathcal{P}$-компактна и $u_n^*(t) \to u^*(t)$ равномерно по $t \in [0,T]$ и теорема будет доказана.

Итак, покажем что $\gamma(I-K;\partial S_r) = 1$. Из предположения Теоремы следует, что оператор K не имеет неподвижных точек на границе ∂S_r, где $S_r = \{u : \|u-u^*\| < r\}$. Мы хотим показать, что для оператора $(Ku)(t) = C(t)u^0 + S(t,A)u^1 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds$, с непрерывной функцией f индекс неподвижной точки u^* равен $\gamma(I-K;\partial S_r) = 1$. Для того, чтобы сделать это, определим оператор

$$G_\lambda u = K(P_\lambda u) + u^* - K(P_\lambda u^*),$$

где мы предположили, что $K(u^*) = u^*$ и оператор P_λ определен формулами

$$(P_\lambda u)(t) = u(t-\lambda) \text{ для } \lambda < t \leqslant T,$$
$$(P_\lambda u)(t) = u(0)) \text{ для } t \in [0,\lambda].$$

Мы завершим доказательство, доказав следующие два утверждения.

$$\gamma(I-G_\lambda;\partial S_r) = \gamma(\Phi_1;\partial S_r) = 1,$$

где $\Phi_1(u) = u - u^*$ и

$$\gamma(I-G_\lambda;\partial S_r) = \gamma(I-G_0;\partial S_r) = \gamma(I-K;\partial S_r)$$

для λ достаточно малых. Поля $\Phi_1(u) = u - u^*$ и $\Phi_2(u) = u - G_\lambda u$ соединены линейной невырожденной компактной деформацией (см. раздел 19.1 в [43])

$$H(\mu,\lambda)u = u - \mu G_\lambda u - (1-\mu)u^*, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 1,$$

т.е. Φ_1 и Φ_2 линейно гомотопны. Оператор H не имеет сингулярных точек на ∂S_r. Чтобы доказать это, предположим противное, что существуют $v^* \neq u^*$ и $H(\mu,\lambda)v^* = 0$. Тогда в силу формулы

$$v^* = \mu K(P_\lambda v^*) - \mu K(P_\lambda u^*) + u^*$$

во-первых, мы получаем, что $v^*(0) = u^*(0)$, и поэтому в силу равенства $(P_\lambda v^*)(t) = (P_\lambda u^*)(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant \lambda$ мы имеем

$$v^*(t) = u^*(t) \text{ for } t \in [0,\lambda]. \tag{14.26}$$

Повторяя то же рассуждение, получаем, что

$$v^*(t) = u^*(t) \text{ for } t \in [0,2\lambda],$$

так как $(P_\lambda v^*)(t) = (P_\lambda u^*)(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 2\lambda$ в силу (14.26). Мы можем дойти таким путем до 3λ и так далее, а это означает, что

$u^* = v^*$. Так как оператор H не имеет сингулярных точек на ∂S_r, покажем, что H есть линейная невырожденная компактная деформация. Ясно, что

$$\gamma(I - H(0,\lambda); \partial S_r) = \gamma(\Phi_1; \partial S_r) = 1,$$

и поэтому по Теореме 20.1 из [43]

$$1 = \gamma(I - H(1,\lambda); \partial S_r) = \gamma(I - G_\lambda; \partial S_r).$$

Оператор G_λ компактен для любого λ (см. [281]) и более того $\{\cup_{\lambda \in [0,T]} G_\lambda u : u \in S_r\}$ предкомпактно (если это множество не является относительно компактным, то существуют две последовательности $\{\lambda_k\}, \{u_k\}$ такие, что $\{G_{\lambda_k} u_k\}$ некомпактна, что противоречит компактности K). Ясно, что $P_\lambda \to P_{\lambda_0}$ сильно в $C(0,T;E)$ при $\lambda \to \lambda_0$. Пусть $v_k \to v_0$ и $\lambda_k \to \lambda_0$. Так как

$$\begin{gathered} G_{\lambda_k} v_k - G_{\lambda_0} v_0 = \\ = K(P_{\lambda_k} v_k) + u^* - K(P_{\lambda_k} u^*) - K(P_{\lambda_0} v_0) - u^* + K(P_{\lambda_0} u^*) = \\ = K(P_{\lambda_k} v_k) - K(P_{\lambda_0} v_0) + \\ + K(P_{\lambda_0} u^*) - K(P_{\lambda_k} u^*) \to 0 \text{ при } \lambda_k \to \lambda_0, \end{gathered}$$

то мы имеем, что оператор G_λ непрерывен по обоим аргументам и, как мы видели, множество $\{y : y = G_\lambda u, \|u - u^*\| \leqslant r, 0 \leqslant \lambda \leqslant T\}$ относительно компактно. Так как $G_\lambda \to G_0$ компактно при $\lambda \to 0$ то в силу [275] операторы G_λ не имеют неподвижных точек на ∂S_r для малых λ и для тех же λ мы получаем

$$\gamma(I - G_\lambda; \partial S_r) = \gamma(I - G_0; \partial S_r) = \gamma(I - K; \partial S_r).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аширалыев А. О коэрцитивной разрешимости параболических уравнений в пространствах гладких функций // Изв. АН Турк. ССР .- сер. физ.-техн., хим. и геолог. наук.- 1989.- 3.- с. 3-13.
2. Бабеску Г. Об одной связи между дифференциальными линеарными уравнениями второго порядка и функциями операторов косинус в пространствах Банаха // Lucr. Semin. Mat. Fiz. Inst. Politehn. Trian Vuia, Timisoara.- 1982. -146 -с. 13-16. (РЖМат, 1983, 9Б888).
3. Бабеску Г. Спектральные теоремы для функций со значениями операторов косинус и синус // Bull. Sci. Tehn. Inst. Politehn. Temisoara. Mat. Fiz.- 1982.- 27, 1. - с. 13-20.
4. Баскаков А.Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций // Мат. сб. 1984. Т.124(166), № 1(5). С. 68-95. (РЖМат, 1983, 9Б888).
5. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж.- Издат. Воронеж. Ун-та.- 1987.

6. Бесов О. В., Ильин В.П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
7. Берг И., Лёфстрём И. Интерполяционные пространства. Введение. М:Мир.- 1980.
8. Вайникко Г.М., Шлапикиене М. К одной теореме С.Г.Крейна о возмущении операторов, порождающих аналитические полугруппы // Уч. зап. Тарт. ун-та. 1971. Т.281. С. 186-189.
9. Васильев В.В. Введение в теорию абстрактных дифференциальных уравнений // Белгород.- БГУ.- 1988.- 34 с.
10. Васильев В.В. О коэрцитивной разрешимости абстрактных параболических уравнений с постоянным оператором // Дифф.ур-я.- 1978.- 14.- 8.- с.1507-1510.
11. Васильев В.В., Емельянова Е.В. Коэрцитивная разрешимость абстрактных параболических уравнений в весовых пространствах// Белгород.-БГПИ.- Рукопись депонирована в ВИНИТИ N-6621-В88.-34 с.
12. Васильев В.В. О системе уравнений термоупругости // БГПИ / Белгород.- 1987.- 14 с.- Библ. 6 назв. (Рук. Деп. в ВИНИТИ 26.02.87, 1681 - В87).
13. Васильев В.В. Спектральные свойства одной операторной матрицы // Белгород. гос. пед. ин-т.- Белгород, 1988.- 9 с. Библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 26.02.88, 1573-В88).
14. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения. Итоги науки и техники СССР (сер.математический анализ) // М.: ВИНИТИ. 1990. Т.28. С. 87-202.
15. Васильев В.В., Пискарев С.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Теория полугрупп операторов. Москва.- Издательство МГУ.- 1996. - 164 с.
16. Васильев В.В., Пискарев С.И. Библиографический указатель. Дифференциальные уравнения в абстрактных пространствах. М.: НИВЦ МГУ, 2001
(http:// www.srcc.msu.su/num_anal).
17. Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Тауберовы теоремы обобщенных функций.* - М.: Наука, 1986.
18. Гольдштейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Пер. под ред. Далецкого. Киев.: Выща школа. 1989.
19. Горбачук М.Л., Мацишин И.Т. О решениях эволюционных уравнений с вырождением в банаховом пространстве // Спектр. теория дифференц. - оператор. уравнений. - Киев, 1986. - с. 5-10. (РЖМат, 1987, 5Б992).
20. Грабовская Р.Я., Кононенко В.И. О косинус-оператор функции, порожденной суммой двух коммутирующих операторов // Воронеж. лесотехн. ин-т. Воронеж, 1983. 6 с. Библиогр 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 февр. 1984 г., 783-84 Деп.).
21. Грабовская Р.Я., Кононенко В.И. О представлении косинус-функции, генератор которой есть сумма двух коммутирующих операторов // VII Школа по теории операторов функц. пр-вах.- Рига, 1983.- ч. I.- с. 63-64.
22. Грабовская Р.Я., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. О связи между решениями некоторых линейных дифференциальных уравне-

ний в банаховых пространствах // Ред. "Сиб. мат. ж." Новосибирск, 1985. 13 с. Библиогр 10 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 апр. 1985 г., 2479-85 Деп.).
23. Гудкин В.П., Дымент Д.А., Матвеев В.А. Коэрцитивная разрешимость абстрактных параболических уравнений в пространствах Гельдера с весом// Труды конференции ХАБИЖТ.- 1973.
24. Гурова И. Н. Об одном топологическом методе исследования разностных схем. ДАН СССР, 1979, 248, № 1, с. 25 - 28.
25. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.- М.: Наука, 1970.- 534 с.
26. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Квазиасимптотика обобщенных функций и тауберовы теоремы в комплексной области. *Мат. Сборник. (Нов.Серия.)*, 102(144)(3):372–390, 1977.
27. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа // М. Наука.- 1984.
28. Иванов В.В., Мельникова И.В., Филинков Ф.М. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи // М. Наука.- 1995.
29. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972.
30. Киричук П.А. О возмущении опраторнозначной функции типа Миттаг-Леффлера. ДАН УССР.- 1990.- N11.- с.9-12.
31. Однопараметрические полугруппы / Клемент Ф. и др. М.:Мир. 1992.
32. Костин В.А. Абстрактные сильно-непрерывные пары тригонометрических групп преобразований // Воронеж. ун-т. Воронеж.- 1980.- 19 с.- Библиогр. 5 назв.- Рус. (Рук. Деп. в ВИНИТИ 4.04.80, 829-80 Деп.) (РЖМат, 1980, 6Б1099 Деп.).
33. Костин В.А. К задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Сб. Дифф. ур-я в частных производных .- Новосибирск.- 1989.- 93.- с.93-116.
34. Костин В.А. О точной равномерно-корректной разрешимости задачи Коши // ДАН СССР.– 1991, 319, № 1, с. 38-41.
35. Костин В.А. К решению одной проблемы, связанной с абстрактной косинус-функцией // ДАН .- 1994.- 336, № 5, с.
36. Костин В.А. О задаче Коши для абстрактного гиперболического уравнения // Межд. науч. конф. по дифф и инт. ур-ям. Тез. докладов.- Самара.- 1995. с.135.
37. Костин В.А. К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными // ДАН .- 1992.- 326.- 4.- с.597-600.
38. Костин В.А. Об аналитических полугруппах и сильно непрерывных косинус-функциях // ДАН СССР .- 1989.- 307.- 4.- с.796-799.
39. Костин В.А. Об одном критерии сильно непрерывной косинус-функции // XIV школа по теории операторов (тез. докладов) .- Новгород .- 1989.- с. 32.
40. Костин В.А. Об одном представлении сильно непрерывной косинус-функции // Воронеж. ун-т., Воронеж.- 1982.- 14 с.- Библиогр. 6 назв. (Рус.) (Рук. Деп. в ВИНИТИ 2.06.83, 2959-83) (РЖМат, 1983, 7Б887 Деп.).

41. Костин В.А. К теореме Соломяка-Иосиды об аналитических полугруппах.- Алгебра и анализ.- т.11 (1999), 1.-с.91-106.
42. Кочубей А.Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка. Дифф. уравнения.- 1989.- 25.- № 8.- с.1359-1368.
43. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы в нелинейном анализе // М. Наука.- 1975.
44. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций . М.: Наука. 1966.
45. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука. 1967.
46. Крейн С.Г., Хазан М.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве . Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. ВИНИТИ. 1983. Т.21. С. 130-264.
47. Крейн С.Г., Петунин Ю.М., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов.М:Наука.- 1978.
48. Мельникова И.В. Корректность задачи Коши для уравнения второго порядка и свойства обобщенной резольвенты // Урал. Ун-т.- Свердловск.- 1982.- 10 с.- Библ. 5 назв. (Рук. Деп. в ВИНИТИ 9.11.82, 5523-82 Деп) (РЖМат, 1983, 3Б990 ДЕП).
49. Мельникова И.В. О задаче Коши для уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения.- 1983.- 19, 3.- с. 537-538 (РЖМат, 1983, 8Б876).
50. Мельникова И.В. Оператор-функции $E(t), ES(t)$ и корректность задачи Коши для уравнений второго порядка // Урал. ун-т. Свердловск, 1982.- 14 с.- Биб. 6 назв. (Рук. Деп. в ВИНИТИ 16.8.82, 4537-82 ДЕП) (РЖМат, 1982, 11Б974 ДЕП).
51. Мельникова И.В. Семейство M, N оператор-функций и уравнений второго порядка в банаховом пространстве // Изв. Вузов. Математика.- 1985.- 2.- с. 45-52 (РЖМат, 1985, 8Б989).
52. Мельникова И.В. Теорема типа Миядеры-Феллера-Филлипса для полного уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Изв. Вузов. Матем.- 1985.- 4.- с. 34-40. (РЖМат, 1985, 10Б1074).
53. Мельникова И.В., Филинков А.И. Классификация и корректность задачи Коши для уравнений второго порядка в банаховом пространстве // Докл. АН СССР.- 1984.- 276, 5.- с. 1066-1071. (РЖМат, 1984, 11Б946).
54. Мельникова И.В., Филинков А.И. О главном по задаче Коши операторе для полного уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Урал. ун-т. Свердловск.- 1986.- 19 с.- Библ. 6 назв. (Рук. деп. в ВИНИТИ.- 25.05.86, 3719-В86) (РЖМат, 1986, 9Б1183).
55. Мельникова И.В., Филинков А.И. Связь корректности задачи Коши для уравнения и системы в банаховом пространстве // Докл. АН СССР.- 1988.- 300, 2.- с. 280-284. (РЖМат, 1988, 9Б904).
56. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.:Наука.-1974.-480 с.
57. Петунин Ю.М., Пличко А.Н. Теория характеристик пространств и ее приложения. Киев: Высшая школа.- 1980.- 216 с.

58. Piskarev S. Convergence of difference schemes for solving nonlinear parabolic equations. Math. Zmatki, 1988, 44, № 1, p. 112-123.
59. Пискарев С.И. Компактная сходимость при аппроксимации дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Уч. зап. Тартус. ун-та.- 1982.- 633.- с. 11-18. (РЖМат, 1983, 5Б836).
60. Пискарев С.И. Периодические и почти периодические косинус оператор-функции // Мат. сб.- 1982.- 118, 3.- с. 386-398. (РЖМат, 1982, 10Б820).
61. Пискарев С.И. Почти периодические решения дифференциальных уравнений второго порядка // Сиб. Мат. Ж.- 1984.- 25, 3.- с. 137-147. (РЖМат, 1984, 11Б1084).
62. Пискарев С.И. Свойства компактности в теории косинус оператор-функций // Мат. заметки.-1992.- 51.- № 5.- с.151-153.
63. Полянский Э. А. Метож коррекции решения параболического уравнения в неоднородном волноводе. М. Наука.– 1985. – 95 с.
64. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ.- М.: Мир.- 1977.
65. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность.- М.: Мир.- 1978.- 395 с.
66. Смагина Т.И. Об одной теореме Филлипса // Опер. ур-я в функ. пр-вах. Воронеж. 1986. С. 91-93.
67. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука.- 1968.- 288 с.
68. Соболевский П.Е. Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений//ДАН СССР, 1964.- 157.- 1.
69. Соболевский П.Е. Теория полугрупп и устойчивость разностных схем. В кн. Теория операторов в функциональных пространствах. Новосибирск. 1977. С. 304-337.
70. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.- М.: Мир, 1980.- 664с.
71. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.- М.: Мир.- 1985.- 376 с. (РЖМат, 1985, 12Б378К).
72. Хесс П. Периодическо-параболические граничные задачи и положительность.- М.: Мир.- 2001.
73. Хилле Э., Филлипс П. Функциональный анализ и полугруппы . М.: ИЛ 1962.
74. Amann H. Linear and quasilinear parabolic problems. Volume 1, Abstract linear theory . Monographs in Mathematics, Vol. 87, Birkhauser Verlag, 1995.
75. Amerio M., Prouse G. Almost-periodic functions and functional equations. N.Y., 1971.
76. Agase S.B., Raghavendra V. Existence of mild solutions of semilinear differential equations in Banach spaces. Indiana J. Pure Appl. Math., 1990, Vol. 21, № 9, p. 813-821.
77. W. Arendt, O. El-Mennaoui, and V. Kéyantuo. Local integrated semigroups: evolution with jumps of regularity. *J. Math. Anal. Appl.*, 186(2):572–595, 1994.
78. Arendt W., Pruss J. Vector valued Tauberian theorems and asymptotic behaviour of linear Volterra equations // SIAM .- Appl. Math.- 1992.- 23 .- p.412-448.

79. Ashyralyev A., Sobolevskii P.E. Well-posedness of parabolic difference equations. Birkhäuser Verlag. 1994. 349 p.
80. Ashyralyev A., Piskarev S. and Weis L. On well-posedness of difference schemes for abstract parabolic equations in $L^p([0,T];E)$ spaces. Subm. to Numerical Functional Analysis and Optimization.
81. Pascal Auscher, Alan McIntosh, and Andrea Nahmod. The square root problem of Kato in one dimension, and first order elliptic systems. *Indiana Univ. Math. J.*, 46(3):659–695, 1997.
82. Autret L. Entire vectors and time reversible Cauchy problems. Semigroup Forum.- 1993.- 46.- p.347-351.
83. Babesku Gh. Bromwich's type representations for cosine and sine functions // Semin. Equat. Funct. Univ. Timisoara.- 1987.- 85.- p. 1-7. (РЖМат, 1988, 12Б897).
84. Babesku Gh. Regularity and uniform continuity properties of cosine and sine class of operators // Lucr. Semin. Math. Fis. Inst. politehn. Timisoara.- 1983.- November.- p. 47-50. (РЖМат, 1985, 10Б1203).
85. Babesku Gh. Uber kosinus familien von liniaren stark stetigen operatoren und ihren infinitesimalen generatoren // Bul. Sti. Tehn. Inst. politehn. Timisoara. Ser. Math.- Fiz.- 1980.- 25, 1.- p. 12-17. (РЖМат, 1982,5Б904).
86. Baillon J.B. Ceracter borne de certains generatours de semigroupes lineares dans les espaces de Banach // C.R.Acad. Sc. Paris. 1980. V.290. P. 757-760.
87. Balakrishnan A.V. An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 91, p.330-353.
88. Bales L.A. Higher order single step fully discrete approximations for second order hyperbolic equations with time depedent coefficients // SIAM J. Numer. Anal.- 1986.- 23, 1.- p. 27-43. (РЖМат, 1986, 11Б1160).
89. Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spases // Noordhoff.- Leyden.-1976.
90. Bart H. Periodic strongly continuous semigroups // Ann. Mat. Pura ed Appl.- 1977.- 115.- p. 311-318. (РЖМат, 1978, 11Б1029).
91. Bart H., Golberg S. Characterization of almost periodic strongly continuous groups and semigroups // Math. Ann.- 1978.- 236, 2.- C. 105-116. (РЖМат, 1979, 3Б736).
92. Benilan Ph., Crandall M., Pazy A. Nonlinear evolution equations in Banach spaces // В печати.
93. Bobylev N.A. et al. Semilinear approximation of semilinear periodic problems in Banach spaces. Nonlinear Analisys, 1998.- 33.- p.473-482.
94. Brezis H. Operateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland. 1973.
95. Butzer P.L., Berens H. Semigroups of operators and approximation. New York. 1967. - 318 c.
96. Chander R., Buche A.B. On some analytic properties of the modified sine operator // Indian J. Pure Appl. Math.-1981.- 12.- p.585-593.

97. Chyan D.-K., Shaw S.-Y., Piskarev S. On maximal regularity and semivariation of cosine operator functions. (English. English summary) J. London Math. Soc. (2) 59 (1999), no. 3, 1023–1032.
98. Chang J.-Ch., Shaw S.-Y. Rates of approximation and egrodic limits of resolvent families // Arch. Math.- 1996.- 66.- p.320-330.
99. Chander R., Singh H. On the measurability and continuity properties of modified exponential cosine operator // J. Indiana Math. Soc. - 1980.- 44. - p. 365-368. (РЖМат, 1981, 9Б784).
100. Cioranescu I. Characterizations of almost periodic strongly continuous cosine operator functions // J. Math. Anal.- 1986.- 57, 1.- p. 222-229. (РЖМат, 1986, 9Б1294).
101. Cioranescu I., Keyantuo V. On operator cosine functions in UMD spaces // Semigroup Forum. - 2001.- 63, - p. 429 - 440.
102. Cioranescu I., Lizama C. Spectral properties of cosine operator functions // Aequat. Math.- 1988.- 36, 1.- p. 80-98.
103. Cioranescu I., Lizama C. Some applications of Fejer's theorem to operator cosine functions in Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc.- 1997.- 125.- 8.- p. 2353-2362.
104. Cioranescu I., Neumann U. Stielties vectors and cosine functions generators // Stud. math. (PPL).- 1987.- 1.- p. 1-7. (РЖМат, 1988, 7Б922).
105. Cioranescu I. , Ubilla P. A characterization of uniformly bounded cosine functions generators // Integral Equat. Oper. Theory.- 1989.- 12, 1.- p. 1-11.
106. Choinacki W. Group representations of bounded cosine functions// J. Rein. Angew. Math., 1996, 478, p.61-84.
107. Crandall M.G., A remark on semilinear perturbations of abstract parabolic equations. Nonlinear Anal., Theory, Meth. & Appl., 1985, Vol. 9, № 12, p. 1331-1335.
108. Cuthbert J.R. On semigroups such that $T(t) - I$ is compact for some $t > 0$ // Z. Wars.- 1971.- 18, 1-2.- p. 9-16. (РЖМат, 1971, 8В82).
109. Da Prato G. Abstract differential equations, maximal regularity and linearisation // Proc. Symp. Pure Math.- 1986.- 45.-1.- p.359-370.
110. Da Prato G., Giusti E. A characterization on generators of abstract cosine functions // Boll. Del. Un. Mat.- 1967.- 22.- p. 367-362. (РЖМат, 1968, 5Б635).
111. Da Prato G., Ianelli M. Linear integrodifferential equations in Banach spaces // Rend. Sem. Math. Padova.- 1980.- 62.- p.207-219.
112. Daners D., Medina P.K. Abstract evolution equations. Periodic Problems and applications. Pitman Res. Notes in Math. Ser 279, Longman, New-York,1992.
113. R. deLaubenfels, Z. Huang, S. Wang, and Y. Wang. Laplace transforms of polynomially bounded vector-valued functions and semigroups of operators. *Israel J. Math.*, 98:189–207, 1997.
114. de Laubenfels R. Existence families, functional calculi and evolution equations // Springer-Verlag. 1994. Lecture Notes Math. V.1570.
115. de Laubenfels R. Integrated semigroupes and integro-differential equations // Math. Z. - 1990.- 204 .- p.501-514.

116. de Laubenfels R., Piskarev S. The growth rate of cosine families // J. Math. Anal. Appl. - 1995.- 196 .- p. 442-451.
117. Desch, W., and W. Schappacher, Some generation results for perturbed semigroups, in Trends in semigroup theory and applications, Ph. Clement et al (Eds.), Marcel Dekker, New York, 1989, 125-152
118. Dettman J.W. Related semigroups and the abstract Hilbert transform // Appl. Anal.- 1977.- 79A.- p. 173-182. (РЖМат, 1974, 9Б380).
119. Dettman J.W. Saturations theorems connected with the abstract wave equation // SIAM J. Math. Anal.- 9, 1.- p. 59-64, 1978. (РЖМат, 1978, 12Б1368).
120. Diekmann O., Gyllenberg M., Thieme H. Pertubing semigroups by solving Stieltjes renewal equations // Differential and integral equations. 1993. V.6. P. 155-181.
121. Eberhard B., Greiner G. Baillon's theorem on maximal regularity // Acta Appl. Math. 27.- 1992. - p. 47-54.
122. El-Mennaoni O. Traces de semi-groupes holomorphes singuliers ĺ'origine et comportement asymptotique // Thise, Besanson, 1992.
123. El-Mennaoni O., Keyantuo V. Trace theorems for holomorphic semigroups and the second order Cauchy problems // Proc. Amer. Math. Soc., 1996, 124, № 5, p. 1445-1458.
124. Emel'anova E.V., Vasilev V. The coercive solvability of abstract parabolic equations in Banach spaces // Lecture notes in pure and applied mathematics.- 1993 .- v.155 .- p. 167-171.
125. Engel K.-J. Operator Matrices and Systems of evolution equations. 1999.
126. Engel K.-J., Nagel R. One parameter semigroups for linear evolution equations. Graduate Texts in Math.- Berlin.: Springer.- 2000.
127. Ergens T., Karasözen B., Piskarev S. Approximation for semilinear Cauchy problems involving second order equations in separable Banach spaces. Nonlin. Anal., 1997, 28, p.1157-1165.
128. Fattorini H.O. Second order linear differential equations in Banach spaces. North Holland. Amsterdam. 1985. 314 P.
129. Fattorini H.O. A note of franctional derivatives of semigroups and cosine functions // Pacif. J. Math.- 1983.- 109, 2.- p. 335-347. (РЖМат, 1984, 8Б1121).
130. Fattorini H.O. On the growth of solutions to second order differential equations in Banach spaces // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.- 1985.- 101A, 3-4.- p. 237-252. (РЖМат, 1986, 8Б1022).
131. Fattorini H.O. Ordinary differential equations in linear topological spaces, I // J. Different. Equat.- 1969.- 5, 1.- p. 72-105. (РЖМат, 1969, 10Б539).
132. Fattorini H.O. Ordinary differential equations in linear topological spaces, II // J. Different. Equat.- 1969.- 6.- p. 50-70.
133. Fattorini H.O. Second order linear differential equations in Banach spaces. North Holland. Amsterdam.- 1985. 314 p. (РЖМат, 1986, 6Б928).

134. Fattorini H.O. Two points boundary value problems for operational differential equations. Annali Scuola Normale Superiore, 1974, Ser IV , Vol.I, n.1-2, p.63-79.
135. Fattorini H.O. The underdetermined Cauchy problem in Banach spaces // Math. Ann. - 1973.- 200.- p. 103-112. (РЖМат, 1973, 7Б727).
136. Fattorini H. O. Un teorema de perturbacion para generatores de functiones coseno, Revista de la Union Mathematica Argentina 25, 1971, p. 199-211.
137. Fattorini H.O. Uniformly bounded cosine functions in Hilbert spaces // Indiana Univ. Math. J.- 1970.- 20.- p. 411-425. (РЖМат, 1971, 9Б522).
138. Fattorini H.O., Radnitz A. The Cauchy problem with incomplete initial data in Banach spaces // Michigan Math. J.- 1971.- 18.- p. 291-320. (РЖМат, 1972, 6Б742).
139. Giusti E. Funzioni coseno periodische // Boll. Union. Mat. Ital.- 1967.- 22.- p. 478-485.
140. Goldstein J.A. On the connection between first and second order differential equations in Banach spaces // J. Math. Anal. Appl.- 1970.- 30, 2.- p. 246-251. (РЖМат, 1970, 11Б690).
141. Goldstein J.A. Semigroups and second-order differential equations // J. Funct. Anal.- 1969.- 4.- p. 50-70. (РЖМат, 1970, 5Б652).
142. Goldstein J.A. The universal addability problem for generators of cosine functions and operator groups // Houston J. Math.- 1980.- 6, 3.- p. 365-373. (РЖМат, 1981, 9Б785).
143. Goldstein J.A., Oharu S. A remark on nonlinear cosine functions // Semigroup Forum.- 1987.- 34, 3.- p. 359-366. (РЖМат, 1987, 10Б1138).
144. Goldstein J.A., Radin C., Schowalter R.E. Convergence rates of ergodic limits for semigroups and cosine functions // Semigroup Forum.- 1978.- 16.- p. 89-95. (РЖМат, 1979, 2Б644).
145. Gowers W. T., Maurey B. Banach spaces with small spaces of operators. Math. Ann., 1997, 307, p. 543-568.
146. Grabmüller H. Cosine families of unbounded operators // Appl. Anal.- 1985.- 19.- p. 1-38.
147. Grabmüller H. Cosinus-Familien unbeschrankter operatoren // ZAMM Angew. Math. Mech.- 1985.- 65, 5.- p. 338-340. (РЖМат, 1985, 10Б1202).
148. Grimmer R., Prüss J. On linear Volterra equations in Banach spaces // Comp. and Math. and Appl. - 1985.- 11.- p. 189-205.
149. B.Z. Guo, On the exponential stability of C_0-semigroups on Banach spaces with compact perturbations, *Semigroup Forum,* 59(2) (1999), 190-196.
150. Guidetti D. Strongly continuous semigroups, weak solutions and the variation of parameter formula in locally convex space // Boll.Union. Mat. Ital.- 1985.- C4, 1.- p. 431-440. (РЖМат, 1986, 8Б1017).
151. D. Guidetti. The parabolic mixed Cauchy-Dirichlet problem in spaces of functions which are Hölder continuous with respect to space variables. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 7(3):161–168, 1996.

152. Guidetti D., Karasozen B. and Piskarev S. Approximation of abstract differential equations. 2002, VINITI, p.
153. D. Guidetti and S. Piskarev. On maximal regularity of difference schemes for parabolic equations in $C^{\theta}(\overline{\Omega})$ spaces. № 8, Dipartimento di Matematica, Universitaá degli Studi di Bologna, 1997. Preprint.
154. D. Guidetti and S. Piskarev. On maximal regularity of Crank-Nicholson schemes for parabolic equations in $C^{\theta}(\overline{\Omega})$ space. In: *Proccedings of International Conference "Function spaces. Differential operators. Problems in mathematical education*, volume 2, pages 2231–2237. RUDN, Moscow, 1998.
155. D. Guidetti and S. Piskarev. Stability of Rothe's scheme and maximal regularity for parabolic equations in $C^{\theta}(\overline{\omega})$. In *Progress in partial differential equations, Vol. 1 (Pont-à-Mousson, 1997)*, pages 167–180. Longman, Harlow, 1998.
156. Gustavson K., Lumer G. Multiplicative pertubations of semigroup generators // Pacif. J. Math.- 1972.- 41, 3.- p. 731-742. (РЖМат, 1973, 2Б810).
157. Heikkila S., Lakshmikantham V. Monotone Iterative Techniques for Discontinuous Nonlinear Differential Equations. Marcel Dekker, New York - Basel, 1994.
158. Henriques H.R. Cosine operator families such that $C(t) - I$ is compact for all $t > 0$ // Indian J. Pure and Appl. Math.- 1985.- 16, 2.- p. 143-152. (РЖМат, 1985, 9Б967).
159. Henriquez, Herncn R. On Stepanov-almost periodic semigroups and cosine functions of operators // J. Math. Anal. Appl. – 146 (1990), no. 2, – p. 420–433.
160. Hersh R. Explicit solutions of a class of hihger order abstract Cauchy problem // J. Different. Equat.- 1970.- 8, 3.- p. 570-579. (РЖМат, 1971, 9Б235).
161. Hieber M. Integrated semigroups and differential operators on $L^p(\mathbb{R}^N)$-spaces. Math. Ann., 1991, 291, p.1-16.
162. Hieber M., Prüss J. Heat cernels and maximal $L^p - L^q$ estimates for parabolic evolution equations // Preprint.- 1998.
163. Honig C.S. Volterra Stiltjes-Integral Equations. North-Holland, Amsterdam. 1975.
164. Hoppe R.H.W. Discrete approximations of cosine operator functions. I // SIAM J. Numer. Anal., 19(6): p.1110–1128, 1982.
165. Hoppe R.H.W. Interpolation of cosine operator functions // Ann. Mat. Pura Appl. (4), 136: p.183–212, 1984.
166. Hörmander L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces // Acta Math., 1960, 104, p.93-140.
167. Jefferies B. and Piskarev S. Tauberian theorems for C_0-semigroups. *Proceedings of 4th International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory, Maratea, Italy, 2000.*, В печати.
168. Jefferies B., Piskarev S. Tauberian theorems for cosine operator functions. Proceedings of V.A. Steklov Institute, 2002, 236.
169. Jung Chan Chang, Shaw S.-Y. Perturbation theory of abstract Cauchy problems and Volterra equations // Nonlin. Anal. Theory Meth. and Appl. - 1997.- 30.- 6.- p.3521-3528.

170. N.J Kalton and G. Lancien. A solution to the problem of L^p-maximal regularity. *Math. Z.*, 235 (3): 559-568, 2000.
171. N. Kalton and L. Weis. The H^∞ calculus and sums of closed operators. *submitted*.
172. Kantorovitz S. Analytic families of semigroups // Semigroup Forum.- 1997.- 54.- p.356-363.
173. Kantorovitz S. C^n-operational calculus, non-commutative Teylor formula and perturbation of semigroups // J. Funct. Anal.- 1993.- 113.- 1.- p. 139-152.
174. Kantorovitz S. Semigroups of operators and spectral theory. Pitman Reseach Notes in Math. Series.- 330.- Longman.- 1995.- 135p.
175. Kantorovitz S., Piskarev S. Mean stability of semigroups and cosine operator functions // Taiwaness Journal of Mathematics - to appear.
176. Keyantuo V. Intagrated semigroups and related partial differential equations // J. Math. Anal. Appl., 1997, 212, p.135-153.
177. Keyantuo V. The Laplace transform and the ascent method for abstract wave equations. J. Diff. Equations, 1995, 122,p.27-47.
178. Kisynski J. On cosine operator functions and one parameter groups of operators // Studia Match.-1972.-44.-p. 93-105. (РЖМат,1973,1Б528).
179. Kozlov V., Maz'ya V. Differential equations with operator coeffitients with applications to boundary value problems for partial differential equations. Springer Monogr. in Math. 1999, XX.
180. Kurepa S. A cosine functional eqation in Hilbert space // Can. J. Match.-1960.-12.-p. 45-49.
181. Kurepa S. A cosine functional eqation in n-dimentional vector space // Glas. mat.-1958.-13.-p. 169-189.
182. Kurepa S. A cosine functional equation in Banach algebras // Acta. Sci. Match. Szeged.-1962.-23.-p. 255-267.
183. Kurepa S. A weakly measurable selfajoint cosine functions // Glas. mat.-1973.-8,1.-p. 73-79. (РЖМат, 1973, 10Б718).
184. Kurepa S. Decomposition of weakly measurable semigroups and cosine operatos functions // Glas. mat.-1976.-3, 11(31).-p.91-95. (РЖМат, 1977, 12Б866).
185. Kurepa S. Semigroups and cosine functions // Func. Anal. Lect. Notes Match.-1982.-948.-p. 47-72. (РЖМат, 1983, 6Б797).
186. Kusano T., Oharu S. Semilinear evolution equations with singularities in ordered Banach spaces. Diff. and Integral equations, 1992, V.5, № 6, p.1383-1405.
187. Le Merdy Ch. The semilarity problem for bounded analytic semigroups on Hilbert space// Semigroup Forum, 1998, V.56, p. 205-224.
188. C. Le Merdy. Counterexamples on L_p-maximal regularity. *Math. Z.*, 230:47–62, 1999.
189. Li M., Gu X.H. and Huang F.L., On unbounded perturbations of semigroups: compactness and norm continuity, *Semigroup Forum*, 2001, to appear.
190. Li Miao , Guo B.-Z. and Piskarev S. Compactness and norm continuity of the difference of two cosine functions. Subm. to Taiwaness Journal of Mathematics.

191. Li, Y.-C., and S.-Y. Shaw, Integrated C-cosine functions and the abstract Cauchy problem, 1991, preprint
192. Liang Jin, Xiao Tijun. Wellposedness results for certain classes of higher order abstract Cauchy problems connected with integrated semigroups // Semigroup forum.- 1998.- 56.- p.84-103.
193. Liang Jin, Xiao Tijun. Norm continuity (for $t > 0$) of propagators of arbitary order abstract differential equations in Hilbert spaces // Journal of Math. Anal. and Appl.- 1996.- 204.- p.124-137.
194. Liu Zh., Yong J. Qualitative properties of certain C_0-semigroupes arising in elastic systems with various damping // Advances in Diff. Equat., 1998, 3, № 5, p.643-686.
195. Lizama C. A characterization of periodic resolvent operators. Results in Math., 1990, 18, p.93-105.
196. Lizama C. On positivity strongly continuous cosine functions // Math. Balcanica.- 1990.- 4.- p.43-49.
197. Lizama C. Uniform continuity and compactness for resolvent families of operators. Seminar Notes in Func. Anal. and Partial Diff. Equations, Baton Rouge, USA, 1992-1993, p.29-43.
198. Gunter Lumer and Luc Paquet. Semi-groupes holomorphes, produit tensoriel de semi-groupes et équations d'évolution. In *Séminaire de Théorie du Potentiel, No. 4 (Paris, 1977/1978)*, pages 156–177. Springer, Berlin, 1979.
199. Lumer G., Paquet L. Semi-groupes holomorphes et équations d'évolution // C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 284(4): p. 237–240, 1977.
200. A. Lunardi. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, volume 16 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
201. Z.H. Luo, B.Z. Guo and O. Morgul, Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications, *Springer-Verlag, London Berlin Heidelberg,* 1999.
202. Lutz D. Compactness properties of operator cosine functions // C. r. math. Rept. Acad. sci. Canada.- 1980.- 2.- p. 277-280. (РЖМат, 1981, 10Б808).
203. Lutz D. On bounded time-dependent perturbations of operator cosine functions // Aequat. math.- 1981.- 23, 2-3.- p. 197-203. (РЖМат, 1983, 7Б858).
204. Lutz D. Periodische operatorwertige cosinusfunktionen // Result. Math.- 1981.- 4, 1.- p. 75-83. (РЖМат, 1981, 11Б954).
205. Lutz D. Some spectral properties of bounded operator cosine functions // Math. Repts. Acad. Sci. Can.- 1982.- 4, 2.- p. 81-85. (РЖМат, 1982, 10Б819).
206. Lutz D. Strongly continuous operator cosine functions // Functional Analysis, Lect. Notes Math.- 1982.- 948.- p. 73-97. (РЖМат, 1983, 6Б798).
207. Lutz D. Uber der konvergenz operatorwertiger cosinusfunctionen mit gestortenz infinitesmalen erzeuger // Period. math. hung.- 1983.- 14, 1.- p. 101-105. (РЖМат, 1983, 11Б1221).
208. Lutz D. Uber operatorwertiger losungen der functionalgleichung der cosinus // Math. Z.- 1980.- 171.- p. 233-245. (РЖМат, 1980, 11Б995).

209. Lutz D. Which operators generate cosine functions ? // Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Fiz. Mat. Natur.- 1977.- 63, 5.- p. 314-317. (РЖМат, 1979, 7Б916).
210. Martinez C., Sanz M., Marco L. Fractional powers of operators. J. Math. Soc. Japan, 1988, 40, 2, p. 331-347.
211. Alan McIntosh. Square roots of elliptic operators. *J. Funct. Anal.*, 61(3):307–327, 1985.
212. Alan McIntosh. The square root problem for elliptic operators: a survey. In: *Functional-analytic methods for partial differential equations (Tokyo, 1989)*, pages 122–140. Springer, Berlin, 1990.
213. Mel'nikova I.V. Well-posedness of differential-operator problems. I. The Cauchy problem in spaces of distributions. *J. Math. Sci. (New York)*, 93(1):1–21, 1999. Functional analysis, 2.
214. Mel'nikova I.V. Properties of the Lions d-semigroups, and generalized well-posedness of the Cauchy problem// *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 31(3), p. 23–34, 95, 1997.
215. Mel'nikova I.V., Al'shansky M.A. Well-posedness of Cauchy problem in Banach space: regular and degenerate cases // Journal Math. Science, 1997, Vol. 87, № 4, p. 3732-3780.
216. Mel'nikova I.V., Anufrieva U.A. and Ushkov V. Yu. Degenerate distribution semigroups and well-posedness of the Cauchy problem. *Integral Transform. Spec. Funct.*, 6(1-4):247–256, 1998. Generalized functions—linear and nonlinear problems (Novi Sad, 1996).
217. Miletta P.D. Approximation of solutions to Evolution Equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1994, 17, p. 753-763.
218. Muramatu T. Besov spaces and analytic semigroups of linear operators. J. Math. Soc. Japan, 1990, 42, 1 p.133-146.
219. Nagy B. Approximation theorems for cosine operator functions // Acta math. Acad. sci Hung.- 1977.- 29, 1-2.- p. 69-76. (РЖМат, 1977, 12Б783).
220. Nagy B. Cosine operator functions and the abstract Cauchy problem // Period. Math. Hung.- 1976.- 7, 3-4.- p. 213-217. (РЖМат, 1978, 2Б862).
221. Nagy B. On cosine operator functions in Banach spaces // Acta sci. math.- 1974.- 36, 3-4.- p. 281-289. (РЖМат, 1975, 9Б694).
222. Nagy B. On the generation of cosine operator functions // Publs. math.- 1974.- 21, 1-2.- p. 151-154. (РЖМат, 1976, 3Б863).
223. Naito T., Nguyen Van Minh. Evolution semigroups and spectral criteria for almost periodic solutions of periodic evolution equations. J. Diff. Equat., 1999, 152, p. 358-376.
224. Nelson S., Triggiani R. Analytic properties of cosine operators // Proc. Amer. Math. Soc.- 1979.- 74.- p. 101-104. (РЖМат, 1979, 12Б899).
225. Neubrander F. On the relation between the semigroup and its infinitesimal generator // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V.100. № 1. P. 104-108.
226. Nguyen Thanh Lan. On nonautonomous higher order Cauchy problems. Preprint, 1998.

227. Nguyen Thanh Lan. On the wellposedness of nonautonomous second order Cauchy problems. Arbeitsberich Functionalanalysis,1998.
228. Niechwiej Y. Cosine functions of unbounded operators and second order differential equations // RADOVI Matematicki.- 6.- 1990.- p.195-204.
229. Oka H. A class of complete second order linear differential equations. Proc. Amer. Math. Soc., 124, № 10, p. 3143 - 3150, 1996.
230. Paquet L. Equations d'evolution pour operatours locaus et equations aus derives partilles. C.R. AB, 1978, 286, № 4, p. A215–A218.
231. Palencia C., Piskarev S. On the multiplicative perturbations of C_0-groups and C_0-cosine operator functions // Semigroup Forum, 2001, Vol. 63, № 2, p. 127-152.
232. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations . Springer-Verlag, New York. 1983. 280 p.
233. J. Peng, M. Wang and G. Zhu, The spectrum of the generator of a class of perturbed semigroups with applications, *Acta Math. Appl. Sinica*, 20(1997), 107-113.(in Chinese)
234. Petryshyn W.V. Approximation-solvability of nonlinear functional and differential equations. Marcel Dekker, New York - Basel - Hong Kong. 1993.
235. Piskarev S., Shaw S.-Y. Multiplicative perturbations of C_0-semigroups and some applications to step responses and cumulative outputs // J. Func. Anal. 1995. V.128. N. 2. P. 315-340.
236. Piskarev S., Shaw S.-Y. On certain operator families related to cosine operator functions // Taiwanese J. Math.- 1997.- 1.- p.527-546.
237. Piskarev S., Shaw S.-Y. Perturbation and comparison of cosine operator functions // Semigroup Forum.-1995.-51.- p.225-246.
238. Piskarev S., Shaw S.-Y. Perturbation of cosine operator functions by step response and cumulative output // Proceedings of the conference on evolution equations.- University of Strathclyde, July, 25-29, 1994.
239. Popescu N. Equations differentielles de deuxieme ordre et operateurs hermitien-equivalents dans les espaces de Banach // Proc. 4-th Conf. Oper. Theory, Timisoara.- 1979.- p. 12-22. (РЖМат, 1982, 1Б1207).
240. Prüss J. Evolutionary, integral equations and applications. Birkháuser, Basel, 1993.
241. Prüss J. Positivity and regularity of hyperbolic Volterra equations in Banach spaces // Math. Ann.- 1987.- 279.- p.317-344.
242. Radic M.V., Vajzovic F. On the bounded cosine operator function in Banach space // Mat. Весн.- 1987.- 39, 2.- p. 187-204. (РЖМат, 1988, 2Б1152).
243. Rankin III S.M. A remark on cosine families // Proc. Amer. Math. Soc.- 1980.- 79.- p. 376-378. (РЖМат, 1981, 2Б831).
244. B.P. Rao, Uniform stabilization of a hybrid system of elasticity, *SIAM J. Control & Optim.*, 33(1995), 440-445.

245. Rabiger R., Ricker W. C_0-semigroups and cosine families of linear operators in hereditarily indecomposable Banach spaces // Acta Sci. Math., - 1998, 64, № 3-4, p. 697-706.
246. Reghis M., Babescu Gh. Cosine and sine functions valued in Banach algebras (II): some spectral properties // Ann. Univ. Timisoara. Ser. sti. mat.-fiz.- 1988.- 26, 1.- p. 93-96.
247. Ruess W.M., Vu Q.P. Asymptotically almost periodic solutions of evolution equations in Banach spaces. J. Diff. Equat., 1995, 122, p. 282-301.
248. D.L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions, *SIAM Review*, 20(1978), 639-739.
249. Rassias J. M. Six-dimensional Landau inequalities // Bull. Calcutta Math. Soc., 1997, 87, № 6, p. 473-494.
250. Rassias J. M. Multi-dimensional Landau extremum problems // J.R. Acad. Bulg. Sci., 1997, 50, № 2, p. 5-9.
251. Sandefur J.T.Jr., Existence and uniqueness of solutions of second order nonlinear differential equations. SIAM J. Math. Anal., 1984, Vol. 14, № 3, p. 477-487.
252. Serisawa H., Watanabe M. Perturbations for cosine families in Banach spaces // Houston J. Math.- 1986.- 12, 1.- p. 117-124. (РЖМат, 1987, 5Б991).
253. Serisawa H., Watanabe M. Time dependent perturbations for cosine families // Houston J. Math.- 1986.- 12, 4.- p. 579-586. (РЖМат, 1987, 11Б1122).
254. Shaw S.-Y. Mean and pointwise ergodic theorems for cosine operator functions // Math. J. Okajama Univ.- 1985.- 27, Dec.- c. 197-203. (РЖМат, 1986, 8Б1013).
255. Shaw S.-Y. Mean ergodic theorems and functional equations // J. Funct. Anal. 1989. V.87. p. 428-441.
256. Shaw S.-Y. On w^*-continuous cosine operator functions // J. Funct. Anal.- 1986.- 66, 1.- p. 73-95. (РЖМат, 1986, 8Б1014).
257. Shaw S.-Y. , Lee C.-S., Chiou W.-L. Representation formulas for cosine and sine functions of operators, II // Aequat. Math.- 1986.- 31, 1.- p. 64-75. (РЖМат, 1987, 1Б913).
258. Shaw S.-Y., Piskarev S. Asymptotic behaviour of semigroup-related functions // Saitama Math. J. 1994. V.12. P. 7-12.
259. Shimizu M., Miyadera I. Perturbation theory for cosine families on Banach spaces // Tokyo J. Math.- 1978.- 1, 2.- p. 333-343. (РЖМат, 1979, 9Б813).
260. Shklyar A.Ya. Complete second order linear differential equations in Hilbert spaces // Operator theory Advanced and Appl., V.92, Biruhäuser, 1997.
261. Sova M. Cosine operator functions // Rozpr. mat.- 1966.- 49.- p. 1-47.
262. Sova M. Linear differential equations in Banach spaces // Rozpr. CSAV MPV.- 1975.- 85, 6.- p. 1-86. (РЖМат, 1975, 12Б967).
263. Sova M. On exponential growth of solutions of abstract initial value problems // Cas. pestov. mat.- 1981.- 106, 1.- p. 1-30. (РЖМат, 1981, 9Б790).

264. Stewart H.B. Generation of analytic semogroups by strongly elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 199, p. 141-162.
265. Stewart H.B. Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions // Trans. Amer. Math. Soc., 1980, 259, p. 299-310.
266. Takenaka T. A note on the generation theorem of cosine families in Banach spaces // Тюбу Дайгаку Когакубу Кие: Met. Coll. Eng., Chubu Univ.- 1986.- 22.- p. 71-76. (РЖМат, 1987, 11Б1123).
267. Takenaka T., Okazawa N. A Phillips-Miyadera type perturbation theorem for cosine functions of operators // Tohoku Math. J.- 1978.- 30.- p. 107-115. (РЖМат, 1978, 12Б1356).
268. Travis C.C. Differentiability of weak solutions to an abstract inhomogenious differential equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V.82. P. 425-430.
269. Travis C. C., Webb G. F. Second order differential equations in Banach space // Nonlin. equat. in abstract space.- 1978.- p. 331-361. (РЖМат, 1980, 10Б795).
270. Travis C. C., Webb G. F. Compactness, regularity and uniform continuity properties of strongly continuous cosine families // Houston J. Math.- 1977.- 3, 4.- p. 555-567. (РЖМат, 1978, 11Б1032).
271. Travis C. C., Webb G. F. Cosine families and abstract non-linear second order differential equations // Acta math. Acad. Sci. hung.- 1978.- 32, 3.- 4.- p. 75-96. (РЖМат, 1979, 6Б737).
272. Travis C. C., Webb G. F. Perturbation of strongly continuous cosine family generators // Colloq. math.- 1981.- 45, 2.- p. 277-285.
273. R. Triggiani, Lack of uniform stabilization for noncontractive semigroups under compact perturbation, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 105(1989), 375-383.
274. Tymovski S. On the analogue of the formula $cos(t) = (e^t + e^{-t})/2$ for operator cosine function // Rocz. Ptm.- 1983.- Ser. 1.- 23, 1.- p. 173-182. (РЖМат, 1984, 1Б1099).
275. Vainikko G. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem. Nonlinear Anal. Theory Meth. and Appl., 2, (1978), 647-687.
276. Vajzovic F. On the cosine operator function // Glas. mat. 1987.- 22, 2.- p. 381-406. (РЖМат, 1989, 1Б1237).
277. Vajzovic F. On cosine operator functions in Banach spaces // Rad. Acad. Nauka i Umjetn. bih od. prirod. i mat. Nauka.- 1982.- 62, 20.- p. 23-30. (РЖМат, 1983, 7Б856).
278. van Neerven J. The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators// Birkhauser Verlag.- 1996.
279. van Neerven J. Hahn-Banach type theorem for adjoint semigroups. // Math. Ann., 1990, 28, p. 63-71.
280. Vidav I., Spectral of perturbed semigroups with applications to transport theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 30(1970), 264-279.
281. Voigt J. On convex compactness property for strong operator topology // Notes di Matematika 12(1992), p. 259-269.
282. Warga J., Optimal Control of Differential Equations, Academic Press, New York, 1972.

283. Watanabe M. A new proof of the generation theorem of cosine families in Banach spaces // Houston J. Math.- 1984.- 10, 2.- p. 285-290. (РЖМат, 1985, 10Б1204).
284. Watanabe M. A perturbation theory for abstract evolution equations of second order // Proc. Jap. Acad.- 1982.- 58.- p. 143-146. (РЖМат, 1982, 11Б973).
285. Watanabe M. Cosine families of operators and applications // Different. Equat. in Banach spaces: Lect. Notes Math.- 1986.- 1223.- p. 278-292. (РЖМат, 1987, 11Б1121).
286. Webb G.F. A representation formula for strongly continuous cosine families // Aequat. math.- 1980.- 20, 1.- p. 115-116. (РЖМат, 1980, 10Б796).
287. Webb G.F., Compactness of bounded trajectories of dynamic systems in infinite dimensional systems, *Proc. of the Royal Soc. of Edinburg,* 84A (1979), p. 19 - 33.
288. Webb G.F. An operator-theoretic formulation of asynchronic exponential grouth // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V.303. p. 751-763.
289. L. Weis. A new approach to maximal L_p regularity. *Proc of the 6th Internat. Conf on Evolution Equations*, Marcel Dekker 2000.
290. L. Weis. Operator-valued multiplier theorems and maximal L_p regularity. *Mathematische Annalen*, **319**, pp. 735 -758, 2001.
291. Xiao T., Liang J. Analyticity of the propagators of second order linear differential equations in Banach spaces. Semigroups Forum, 1992, V.44, p.356-363.
292. Xiao T., Liang J. Entire solutions of higher order abstract Cauchy problems // J. Math. Anal. and Appl., 1997, 208, p.298-310.
293. Xiao T., Liang J. Differential operators and C-welposedness of complete second order abstract Cauchy problems // Pacific J. Math., 1998, V.186, № 1, p. 167-200.
294. Xiao T., Liang J. The Cauchy problem for higher order abstract differential equations. Lect. Notes in Math. 1701, 1998.
295. You P.H. Characteristic conditions for a C_0-semigroups with continuity in the uniform operator topology for $t > 0$ in Hilbert space // Proc. Amer. Math. Soc.- 1992.- 116.- p.991-997.
296. Zaidman S. Topics in abstract differential equations. Pitman, V.304, 1994.
297. Zaidman S. Topics in abstract differential equations II. Pitman, V.321, 1994.
298. Zaidman S. Functional analysis and differential equations in abstract spaces. Chapman & Hall/CRC, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, V. 100, 1999.
299. Q.C. Zhang and F.L. Huang, On compact perturbations of C_0-semigroups, *J. Sichuan Univ.* 35(1998), 829-833. (in Chinese)