МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени
М.В. ЛОМОНОСОВА

Научно-исследовательский вычислительный центр

В.В. Васильев, С.И. Пискарёв

Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве

Теория полугрупп операторов

Издательство Московского университета
1996

Оглавление

Предисловие

Систематическое изложение теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, по-видимому, берет начало в монографиях Далецкого-Крейна [13], Хилле [36] и Хилле-Филлипса [37]. Затем последовал обширный поток публикаций, достигший апогея в 1980-90 годах.

К сожалению, эта важная тематика в настоящее время не имеет соответствующего отражения в русскоязычной литературе. В то время как за рубежом по теории полугрупп операторов регулярно выходят обширные издания, отражающие результаты современных исследований в этой области, в России, если не считать переводных книг [8], [27], мы располагаем лишь материалом примерно двадцатилетней давности — см. [21], [22].

Отметим также появление за рубежом литературы [55], [73], [107], [118], где делается попытка адаптации изложения теории полугрупп для студентов и аспирантов, и, таким образом, наряду с научными решаются также и методические задачи. Настоящая книга представляет собой учебное пособие, рассчитанное на студентов старших курсов математических и физических факультетов и аспирантов. Она содержит изложение теории C_0-полугрупп операторов. В России свой вклад в развитие этой теории традиционно вносили Московская, Воронежская и Свердловская научные школы, за рубежом география исследователей значительно шире. Рост количества публикаций по этой тематике за последние годы настолько велик, что даже появившиеся обзоры [23], [116] не были в состоянии охватить эту быстроразвивающуюся область естествознания. Первой попыткой систематического изложения теории C_0-полугрупп операторов и косинус оператор-функций на русском языке был обзор [5], вышедший в серии "Итоги науки и техники СССР", 1990, однако он слишком конспективен и по техническим причинам издательства ВИНИТИ содержит такое количество опечаток и неточностей, что его использование весьма затруднено.

Настоящее пособие ставит своей целью дать студентам и аспирантам общую картину состояния теории C_0-полугрупп операторов и изложить последние достижения в этой области. Вместе с тем приводимый материал будет использован нами при изложении численного анализа при решении уравнений в частных производных. Желая охватить максимальное количество материала (в рамках избранного направления), мы приводим многие утверждения без доказательства, указывая источник. В случае, когда восстановление доказательства, на наш взгляд, не представляет трудности, ссылка на первоисточник может быть опущена.

Современные возможности информатики и полиграфии, в частности пакет LATEX, позволяют использовать для подготовки текста рукописи компьютер. Это даст возможность оперативно отработать поступающий новый материал и организовать работу по совершенствованию издания в дальнейшем. Поэтому авторы будут благодарны читателям за конструктивные замечания, которые позволят улучшить текст.

Структура пособия такова: материал разбит на главы, главы — на разделы, в разделах приведены определения, теоремы и предложения, которые снабжены соответствующей нумерацией. В пособии частично использован материал обзора [5]. При этом приложен максимум усилий, чтобы избавиться от неточностей и опечаток. Адресуя книгу студентам и аспирантам, мы попытались, во-первых, переосмыслить постоянно поступающий новый материал, и, во-вторых, приводя утверждения, давать не только одни ссылки, но и в отдельных случаях краткие или более развернутые доказательства. Техника доказательств продемонстрирована на изложении разделов, посвященных семействам мультипликативного и аддитивного возмущения.

Отбирая материал, авторы предполагают на сегодня подготовку цикла изданий, куда следует включить:

а/ Теорию C_0-полугрупп операторов,

б/ Теорию C_0-косинус оператор-функций,

в/ Теорию модифицированных семейств операторов и, в первую очередь, проинтегрированные полугруппы, C-полугруппы, проинтегрированные косинус оператор-функции и C-косинус оператор-функции,

г/ Абстрактные задачи для дифференциальных уравнений порядка выше первого,

е/ Численный анализ для дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах,

ж/ Приложения теории полугрупп операторов.

Изложение перечисленных вопросов — предмет следующих пособий, готовящихся к изданию.

Разделы 2.2 - 2.4, 7.3, 8.3, 10.3, 11.2 и глава 13 написаны С.И. Пискарёвым, главу 14 написал В.В. Васильев. Остальной текст написан совместно.

Введение

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y'(t) = ay(t),\ y(0) = y^0,$$

нашла замечательное обобщение до уровня операторных полугрупп, т.е. задачи Коши

$$u'(t) = Au(t),\ u(0) = u^0,$$

в банаховом пространстве E, где A — неограниченный оператор в E. Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения выражается как $y(t) = e^{at}y^0$, а в случае абстрактной задачи Коши — $u(t) = e^{tA}u^0$, где построение семейства операторов e^{tA} базируется на скалярной формуле

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Известная конструкция Иосиды для полугруппы имеет вид

$$e^{tA} := \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}A\right)^{-n}.$$

Оказывается, что при определенных условиях на оператор A, построенная таким образом оператор-функция $e^{tA} : [0,\infty) \to B(E)$ обладает полугрупповым свойством, т.е. $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$, и, кроме того, при дифференцировании и интегрировании также ведет себя аналогично экспоненте.

В дальнейшем для абстрактного случая мы будем вместо e^{tA} использовать обозначение $exp(tA)$, чтобы различать обозначения операторной экспоненты и часто встречающейся обычной показательной функции.

Знаменитая теорема Хилле-Иосиды [36], [165], устанавливающая необходимые и достаточные условия на инфинитезимальный генератор A для порождения C_0-полугруппы, послужила основой для проникновения теории полугрупп операторов в исследование уравнений в частных производных и приближенных методов их решения.

После основополагающих работ Троттера [152] и Ушиджимы [154] стало очевидно, что весь классический численный анализ для простейших линейных параболических и гиперболических уравнений может быть переписан на языке функционального анализа с использованием теории полугрупп операторов и косинус оператор-функций. В то же время изучение свойств разрешающих семейств операторов, дающих решения абстрактных уравнений, представляют и самостоятельный научный интерес, позволяя извлекать новые свойства эволюционных уравнений. В результате теория C_0-полугрупп и C_0-косинус оператор-функций стала предметом интенсивного развития как "чистой", так и "прикладной" математики.

Изложение теории полугрупп ведется в настоящем пособии на языке функционального анализа, причем используется стандартная терминология — см. напр. [14], [15], [16], [25], [29], [35], [36], [37], [38].

Для удобства использования мы напомним основные определения и обозначения используемых понятий. Пусть E — банахово пространство над полем комплексных чисел с нормой $\|\cdot\|$. Для гильбертова пространства будем использовать обозначение H. Нам понадобятся равномерно выпуклые банаховы пространства E, т.е. пространства, в которых для любого ε существует такое $\delta(\varepsilon)$, что для любых элементов $x, y \in E$, таких что $\|x\|, \|y\| \leq 1$ и $\|x - y\| \geq \varepsilon$ имеет место неравенство $\|x + y\| \leq 2(1 - \delta)$. Примерами равномерно выпуклых пространств могут служить пространства L^p и l^p.

Границу множества Ω будем обозначать $\partial\Omega$, внутренность множества Ω — $int(\Omega)$, замыкание — $\overline{\Omega}$. Расстояние от элемента $x \in E$ до множества $\Omega \in E$, определяемое как $\inf\{\|x - y\| : y \in \Omega\}$, обозначим $dist(x, \Omega)$.

Линейную оболочку системы векторов $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $x_i \in E$, $i = \overline{1, n}$, обозначим $span\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Сопряженное к E пространство, как обычно, будем обозначать E^*, с элементами — x^*, y^*, ..., а значение функционала $x^* \in E^*$ на элементе $x \in E$ запишем в виде $\langle x, x^* \rangle$. Напомним какие виды сходимости определяются в пространствах E и E^*.

Пусть последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in E$, $n \in N$, сходится в топологии нормы $\|\cdot\|$, т.е. $x_n \to x$ при $n \to \infty$ в смысле $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Мы будем обозначать сильный предел этой последовательности как $x := s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$. Если последовательность $\{y_n\}$, $y_n \in E$, $n \in N$, слабо сходится к элементу $y \in E$, т.е. для любого $y^* \in E^*$ мы имеем $\langle y_n, y^* \rangle \to \langle y, y^* \rangle$ при $n \to \infty$, то этот факт мы будем записывать $w\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = y$. В сопряженном пространстве E^* норма элемента $y^* \in E^*$ будет записываться как $\|y^*\|$ и предел сильно сходящейся последовательности $\{y_n^*\}, y_n^* \in E^*$, $n \in N$, будем обозначать как $s\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n^* = y^*$, а предел в *-слабой топологии, т.е., если для любого $x \in E$ имеем $\langle x, y_n^* \rangle \to \langle x, y^* \rangle$ при $n \to \infty$, обозначим $w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n^* = y^*$.

Множество линейных операторов, действующих из $D(A) \subseteq E$ в E обозначим через $L(E)$, а множество линейных непрерывных операторов - через $B(E)$. В случае, если операторы действуют из одного пространства E в другое - F, будем писать соответственно $L(E,F)$ и $B(E,F)$. Область определения и область значений оператора A будем записывать соответственно как $D(A)$ и $R(A)$, а нуль-пространство — $N(A)$.

На операторных пространствах будут рассматриваться разные типы сходимости. Пусть последовательность $\{B_n\}$, $B_n \in B(E)$, $n \in N$, сходится в операторной норме к оператору $B \in B(E)$, т.е. $\|B_n - B\| \to 0$ при $n \to \infty$, тогда равномерный предел операторов B_n будем записывать как $u\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n = B$; сильный предел запишем как $B = s\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n$; слабый — $w\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n$.

Традиционную запись будем использовать для резольвентного множества $\rho(A)$ и спектра $\sigma(A)$ оператора A, который, как обычно, будем делить на точечный - $P\sigma(A)$, непрерывный - $C\sigma(A)$ и остаточный - $R\sigma(A)$.

Замкнутые операторы в E с плотной областью определения ($\overline{D(A)} = E$) выделим в множество $\mathcal{C}(E) \subseteq L(E)$.

Линейное многообразие $D(A)$, наделенное нормой $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$, в случае $A \in \mathcal{C}(E)$ становится банаховым пространством — будем обозначать его $\mathcal{D}(A)$.

На функции со значениями в банаховых пространствах обобщаются многие понятия, имеющие место для обычных функций.

Пусть $J := [\alpha, \beta]$ - отрезок вещественной прямой, $R_+ := (0, \infty)$— положительная полуось. Множество натуральных чисел будем, как обычно, обозначать N, целых – Z, вещественных – R, комплексных – C, набор чисел $1, 2, .., n$ обозначим $\overline{1, n}$.

Определение 0.0.1 *Функция $u(\cdot) : J \to E$ называется* ***непрерывной в точке*** $t_0 \in J$, *если*

$$\lim_{t\to t_0, t\in J} \|u(t) - u(t_0)\| = 0.$$

Функция называется ***непрерывной на*** J, *если она непрерывна в каждой точке $t \in J$; при этом пишут $u(\cdot) \in C(J; E)$ или просто $u \in C(J; E)$.*

Здесь $C(J; E)$, как обычно, — пространство непрерывных функций, определенных на J, со значениями в E и с нормой

$$\|u\| := \max_{t\in J} \|u(t)\|.$$

Определение 0.0.2 ***Производной*** *функции* $u(\cdot) : J \to E$ *в точке* $t_0 \in J$ *называется такой элемент* $u'(t_0) \in E$*, что*

$$\lim_{h\to 0, t_0+h\in J} \left\| \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} - u'(t_0) \right\| = 0.$$

Если функция $u(\cdot)$ *имеет непрерывную производную* $u'(t)$ *в каждой точке* $t \in J$*, то она называется* ***непрерывно дифференцируемой на*** J***.*** *При этом пишут* $u(\cdot) \in C^1(J; E)$.

Аналогично определению 0.0.2 определяют множество k - раз непрерывно дифференцируемых функций $C^k(J; E)$.

Интеграл от функции $u(\cdot) : [a, b] \to E$ со значениями в банаховом пространстве E будем понимать в смысле Бохнера (см. [14]) и обозначать $\int_a^b u(t)\, dt$.

Обычные понятия и конструкции из математического анализа (элементы дифференциального и интегрального исчисления, пространства Соболева и т.п.) мы будем использовать без каких-либо пояснений.

Указатель обозначений

Глава 1

Задача Коши и разрешающие семейства

В данной главе дано определение корректной постановки задачи Коши в банаховом пространстве. Данное понятие корректности связано с условием существования C_0-полугруппы, выступающей в качестве разрешающего семейства операторов этой задачи Коши. Мы приводим также конкретные примеры некоторых C_0-полугрупп и их генераторов.

Изменение понятия корректности ведет к появлению разрешающих семейств с иными свойствами, мы коснемся этого материала в томе 3.

1.1 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу Коши для уравнения n - го порядка вида

$$u^{(n)}(t) = Au(t), \quad t \in \overline{R}_+ := [0, \infty), \tag{1.1}$$

$$u(0) = u^0,\, u'(0) = u^1, ..., \, u^{(n-1)}(0) = u^{n-1}, \tag{1.2}$$

где $A \in \mathcal{C}(E)$, а $u^{(n)}(\cdot)$ означает n -ю производную (т.е. $(d/dt)^n u(t)$) функции $u(\cdot)$.

Определение 1.1.1 *Функция $u(\cdot) : \overline{R}_+ \to E$ называется* ***классическим решением уравнения*** *(1.1), если $u(\cdot) \in C^n(\overline{R}_+, E)$, значения функции $u(t) \in D(A)$ при любом $t \in \overline{R}_+$ и выполняется равенство (1.1).*

Определение 1.1.2 *Задача Коши (1.1)-(1.2) называется* ***равномерно корректной на*** $\overline{R}_+$ *, если:*

(i) существует такое плотное подмножество $D \subseteq E$ *, что при* $u^0, u^1, ..., u^{n-1} \in D$ *существует единственное классическое решение на* $\overline{R}_+$ *уравнения (1.1) со свойством* $u^{(k)}(0) := \lim\limits_{h\to 0+} u^{(k)}(h) = u^k$, $k = \overline{0, n-1}$;

(ii) классическое решение задачи (1.1)-(1.2) равномерно устойчиво по t *на любом компакте* $\mathcal{K} \subset \overline{R}_+$, *т.е. из условия* $u_p^k \to 0 \quad (u_p^k \in D, k = \overline{0, n-1})$ *при* $p \to \infty$ *следует сходимость решений задачи (1.1)-(1.2)* $u_p(t) \to 0$ *равномерно по* $t \in \mathcal{K}$, *где* $u_p^{(k)}(0) = u_p^k, \quad k = \overline{0, n-1}$.

Поскольку в этой книге речь идет, в основном, о классических решениях, то слово "классическое" в дальнейшем будет опускаться, когда ситуация не вызывает сомнений.

Для изучения свойств решения равномерно корректной задачи Коши (1.1)-(1.2) вводят в рассмотрение ***пропагаторы*** $\mathcal{P}_j(t)$, $j = \overline{0, n-1}$, которые дают решение (1.1)-(1.2) с начальными условиями $u_j^{(k)}(0) = \delta_{jk}x$ (δ_{jk} - дельта Кронекера, $x \in D(A)$), т.е. $u_j(t) = \mathcal{P}_j(t)x$.

Предложение 1.1.1 *[90] Операторы* $\mathcal{P}_j(t)$, $j = \overline{0, n-1}$, *плотно определены, сильно непрерывны по* t *и при любом* t *могут быть продолжены по непрерывности на все* E.

Предложение 1.1.2 *[90] Если* $u(\cdot)$ *- решение (1.1)-(1.2), то*

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{P}_j(t) u^j, \quad t \in \overline{R}_+. \tag{1.3}$$

Теорема 1.1.1 *[90],[20] Задача Коши (1.1)-(1.2) при* $n \geq 3$ *равномерно корректна тогда и только тогда, когда* $A \in B(E)$, *т.е.* A *является непрерывным оператором с* $D(A) = E$. *В этом случае имеем*

$$\mathcal{P}_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{kn+j} A^k/(nk+j)!\,.$$

Поскольку операторы взятия производных не ограничены, то теорема 1.1.1 показывает, что изучение равномерно корректных задач для случая $n \geq 3$ с точки зрения теории уравнений в частных производных не очень содержательно. В то же время полное уравнение n-го порядка

$$u^{(n)}(t) + A_1 u^{(n-1)}(t) + ... + A_n u(t) = 0$$

до настоящего времени изучено недостаточно даже для случая $n = 2$.

1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения 1 - го и 2-го порядков

Если пространство E конечномерно, то задача Коши для уравнения второго порядка легко сводится к системе уравнений первого порядка. Как мы увидим, в общем случае банахова пространства E возникающие для операторных матриц пространства строятся не по производящему оператору и зачастую оказывается полезным вводить в рассмотрение косинус оператор-функции.

Чтобы подробно обсудить случаи $n = 1$ и $n = 2$, дадим следующие определения.

Определение 1.2.1 *Однопараметрическое семейство операторов* $\mathcal{T}(t) \in B(E)$, $t \in [0, \infty)$, *называется* C_0*-* ***полугруппой операторов*** *на* E, *если*

(i) $\mathcal{T}(t+s) = \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s)$ *при любых* $t, s \geq 0$*;*

(ii) $\mathcal{T}(0) = I$ *— единичный оператор на* E *;*

(iii) $s\text{-}\lim_{t\to 0+} \mathcal{T}(t)x = x$ *при любом* $x \in E$ *.*

Определение 1.2.2 *Линейный оператор* A *с областью определения*

$$D(A) := \{x \in E : \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(\mathcal{T}(h) - I)x \quad \text{существует}\}$$

и заданный как

$$Ax := \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(\mathcal{T}(h) - I)x \quad \text{при} \quad x \in D(A)$$

называется ***производящим (инфинитезимальным) оператором (генератором)*** C_0*-полугруппы* $\mathcal{T}(\cdot)$ *.*

Предложение 1.2.1 *[127] Производящий оператор* C_0*-полугруппы* $\mathcal{T}(\cdot)$ *принадлежит* $\mathcal{C}(E)$*.*

C_0-полугруппу с производящим оператором A в дальнейшем будем обычно записывать как $exp(\cdot A)$ или $exp(tA)$ в случае, когда важно, при каком именно значении t рассматривается полугруппа.

Очевидно, что по каждой C_0-полугруппе производящий оператор определяется однозначно. Справедливо и обратное

Предложение 1.2.2 *[127] Каждому производящему оператору соответствует только одна полугруппа.*

Таким образом, соответствие между производящими операторами и C_0-полугруппами взаимно однозначно.

Теорема 1.2.1 *[22] Задача Коши (1.1)-(1.2) при $n = 1$, т.е. задача*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \in [0, \infty), \\ u(0) = u^0, & u^0 \in D(A), \end{cases} \tag{1.4}$$

равномерно корректна тогда и только тогда, когда оператор A является производящим оператором C_0-полугруппы.

Предложение 1.2.3 *[127] Решение равномерно корректной задачи (1.4) дается формулой*

$$u(t) = exp(tA)u^0, \qquad t \geq 0.$$

Теорема 1.2.2 *[156] Пусть оператор A замкнут. Задача Коши (1.4) допускает следующие эквивалентные постановки:*

(i) Ищется непрерывно дифференцируемая функция $u(\cdot) : [0, \infty) \to D(A)$, для которой удовлетворяются уравнение и начальное условие (1.4);

(ii) Ищется дважды непрерывно дифференцируемая функция $v(\cdot) : [0, \infty) \to D(A)$ такая, что

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + u^0, \quad t \in [0, \infty), \quad u^0 \in D(A), \\ v(0) = 0; \end{cases} \tag{1.5}$$

(iii) Ищется слабо непрерывная функция $w(\cdot) : [0, \infty) \to D(A)$ такая, что для любого $x^* \in D(A^*)$ функция $t \to \langle w(t), x^* \rangle$ непрерывно дифференцируема и

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\langle w(t), x^* \rangle = \langle w(t), A^* x^* \rangle, & t \in [0, \infty), \ x^* \in D(A^*), \\ w(0) = u^0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Ясно, что решения задач (i) и (ii) связаны следующим образом:

$$v(t) = \int_0^t u(s)\, ds.$$

Решения задач (iii) и (i) оказываются совпадающими.

Для абстрактных уравнений второго порядка строится другое разрешающее семейство — косинус оператор-функции.

Определение 1.2.3 *Однопараметрическое семейство операторов $C(t) \in B(E)$, $t \in R$, называется* ***C_0-косинус оператор-функцией*** *на E, если*

(i) $C(t+s)+C(t-s) = 2C(t)C(s)$ для любых $t, s \in R$ (уравнение Даламбера);

(ii) $C(0) = I$ — единичный оператор на E ;

(iii) $s\text{-}\lim_{h\to 0} C(t)x = x$ при любом $x \in E$.

С косинус оператор-функцией $C(\cdot)$ ассоциируют ***C_0-синус оператор-функцию:***

$$S(t)x := \int_0^t C(s)x\,ds, \qquad x \in E,\ t \in R, \tag{1.7}$$

и линейные многообразия

$$E^k := \{x \in E:\ C(\cdot)x \in C^k(R;E)\}, \qquad k = 1,2. \tag{1.8}$$

Определение 1.2.4 *Линейный оператор A с областью определения $D(A)$, состоящей из всех x, для которых существует предел*

$$Ax := s\text{-}\lim_{h\to 0+} 2\frac{C(h)-I}{h^2}x, \tag{1.9}$$

называется ***производящим (инфинитезимальным) оператором (генератором)*** *C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot)$.*

Предложение 1.2.4 *[143] Производящий оператор C_0-косинус оператор-функции плотно определен и замкнут, т.е. принадлежит $\mathcal{C}(E)$.*

Косинус и синус оператор-функции с производящим оператором A будем обозначать соответственно через $C(\cdot, A)$ и $S(\cdot, A)$.

Предложение 1.2.5 *[149] Область определения $D(A)$ производящего оператора C_0-косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$ совпадает с E^2 .*

Теорема 1.2.3 *[92] Задача Коши (1.1)-(1.2) при $n = 2$, т.е. задача*

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t), & t \in [0,\infty), \\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1, & u^0 \in D(A),\, u^1 \in E^1, \end{cases} \tag{1.10}$$

равномерно корректна тогда и только тогда, когда оператор A является производящим оператором C_0-косинус оператор-функции.

Предложение 1.2.6 *[92] Решение равномерно корректной задачи (1.10) при любых $u^0 \in D(A)$ и $u^1 \in E^1$ можно записать через C_0-косинус и C_0-синус оператор-функции следующим образом*

$$u(t) = C(t,A)u^0 + S(t,A)u^1, \quad t \in R. \tag{1.11}$$

1.3 Примеры

Понятия C_0-полугрупп и C_0-косинус оператор-функций являются абстрактным обобщением задач, хорошо известных по курсу математической физики. Приведенные ниже примеры стали традиционными в теории C_0-полугрупп. Они изложены в различных учебниках, однако для подробного изучения можно порекомендовать предназначенные для студентов и аспирантов книги [8], [73], [118].

1. Полугруппа сдвигов.

Пусть $E = C[0,\infty]$ - пространство непрерывных функций, определенных при $t \geq 0$ и имеющих предел на бесконечности, с нормой

$$\|f\|_E := \sup\{|f(t)| : \ t \geq 0\}.$$

В E рассмотрим семейство операторов $\mathcal{T}(t)$ $(t \geq 0)$, определенное соотношением

$$(\mathcal{T}(t)\, f)(x) = f(t+x), \quad t \geq 0. \tag{1.12}$$

Тогда семейство $\mathcal{T}(\cdot)$ есть C_0-полугруппа с производящим оператором

$$A = \frac{d}{dx} \quad , \tag{1.13}$$

имеющим область определения

$$D(A) = \{f \in C[0,\infty] : \ f' \,\text{существует при всех}\, t \geq 0 \ \text{и} \ f' \in C[0,\infty]\}.$$

При этом $\|\mathcal{T}(t)\| = 1$ при любом $t \geq 0$.

Отметим, что оператор (1.13) порождает C_0-полугруппу не только в пространстве $C[0,\infty]$, но и в пространствах равномерно непрерывных функций, определенных на оси — $BUC(R^1)$, а также в пространствах суммируемых функций типа $L^p[0,\infty)$ (см. следующий пример).

2. Полугруппа Гаусса - Вейерштрасса.

Рассмотрим пространство $E = L^p(-\infty,\infty)$ с нормой

$$\|\varphi\|_E := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

и семейство операторов $\mathcal{T}(t)$ $(t \geq 0)$, действующих в нем, согласно равенствам

$$\begin{cases} (\mathcal{T}(t)\, \varphi)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, \varphi(y)\, dy, & t > 0, \\ (\mathcal{T}(0)\, \varphi)(x) = \varphi(x), & t = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

при $\varphi \in E$.

Тогда равенства (1.14) в $E = L^p(-\infty, \infty)$ определяют сильно непрерывную C_0-полугруппу с $\|\mathcal{T}(t)\| \leq 1$, $t \in \overline{R}_+$.

Отметим, что первое из равенств (1.14) дает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in R^1,\, t \in R^1_+, \tag{1.15}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{1.16}$$

и, таким образом, производящий оператор в этом случае есть

$$Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с областью определения

$$D(A) = \{f :\ f' \text{ дифференцируема п.в. и } f',\, f'' \in E\}.$$

Мы видим, в частности, что теория полугрупп включает в себя и теорию задач Коши (1.15)-(1.16).

3. Полугруппа Пуассона.

Рассмотрим пространство $E = L^p(-\infty, \infty)$ и семейство операторов $\mathcal{T}(t)$, $t \geq 0$, действующих в нем, определенное равенствами

$$\begin{cases} (\mathcal{T}(t)\,\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+(x-y)^2}\,\varphi(y)\,dy, & t > 0, \\ (\mathcal{T}(0)\,\varphi)(x) = \varphi(x), & \text{t=0}, \end{cases} \tag{1.17}$$

при $\varphi \in E$.

Тогда равенства (1.17) в E определяют сильно непрерывную C_0-полугруппу с $\|\mathcal{T}(t)\| \leq 1$.

Первое из равенств (1.17) дает представление решения гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in R^1,\, t \in R^1_+, \tag{1.18}$$

через значения $u(\cdot)$ на прямой $t = 0$:

$$u(x,0) = f(x). \tag{1.19}$$

Производящий оператор полугруппы Пуассона A имеет область определения $W^1_p(R)$ и на $D(A)$ может быть представлен в виде

$$A = \frac{d}{dx}\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}\frac{d}{dx}, \quad \text{где } (\hat{\mathcal{H}}\varphi)(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy.$$

Оператор $\hat{\mathcal{H}}$ называют преобразованием Гильберта.

4. Полугруппа, порожденная "дробными интегралами" .

Рассмотрим семейство операторов $\mathcal{T}(t)$ $(t \geq 0)$, действующих в $L^p(0,1)$, определенное равенствами

$$\begin{cases} (\mathcal{T}(t)\,f)(x) = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^x (x-y)^{t-1}\,f(y)\,dy, & t > 0, \\ (\mathcal{T}(0)\,f)(x) = f(x), & \text{t=0}. \end{cases} \tag{1.20}$$

Операторы $\mathcal{T}(\cdot)$, называемые дробными интегралами Римана-Лиувилля, образуют C_0-полугруппу. Название семейства оправдано тем, что при целых t равенство (1.20) определяет обычный повторный n-кратный интеграл.

Производящий оператор Af полугруппы (1.20) на элементе f определяется как $-\gamma f + (Gf)'$, где γ – некоторая константа, а

$$(Gf)(x) = \int_0^x \log(x-y) f(y)\,dy, \qquad 0 < x < 1.$$

5. Операторная экспонента (случай ограниченного оператора).

Пусть E – банахово пространство и $B \in B(E)$ – ограниченный оператор в E. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tB)^k}{k!} = I + \frac{t}{1!}B + \frac{t^2}{2!}B^2 + \dots \tag{1.21}$$

сходится по норме операторов и определяет C_0-полугруппу с производящим оператором B в пространстве E. Из (1.21) легко видеть, что C_0-полугруппа $exp(\cdot B)$ допускает оценку $\|exp(tB)\| \leq e^{t\|B\|}$, $t \geq 0$.

1.4 Библиографические замечания

Как видно из теорем 1.2.1 и 1.2.3, равномерно корректные задачи Коши 1-го и 2-го порядков тесно связаны с C_0-полугруппами и C_0-косинус оператор-функциями. Обобщение понятия корректности решения задачи Коши приводит к более широким классам полугрупп и операторных косинусов.

Работы [72], [121], [146], [147] посвящены изучению так называемых C - полугрупп, с помощью которых изучались как задачи первого, так и второго порядков, а также полугрупп, имеющих особенность в нуле.

Большая часть отмеченного выше материала будет отражена подробнее в дальнейших частях работы авторов.

Глава 2

Полугруппы операторов

Материал, приведенный в этой главе, носит большей частью традиционный характер. В качестве основных источников можно использовать имеющиеся в России книги [14], [27], [21], [22], [37]. Отметим также литературу изданную за рубежом [59], [73], [93], [113], [127], [145]. Ссылка в тексте, как правило, дается лишь на один из возможных источников.

2.1 Основные свойства C_0-полугрупп операторов

Предложение 2.1.1 *[113] Для любой C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ существуют такие константы $M \geq 1$ и $\omega \in R$, что*

$$\|exp(tA)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{при} \quad t \geq 0 \ . \tag{2.1}$$

Определение 2.1.1 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется* ***равномерно ограниченной****, если $\|exp(tA)\| \leq M$ при $t \geq 0$ и некоторой константе $M \geq 1$. C_0-полугруппа называется* ***сжимающей****, если $M = 1$.*

Ясно, что меньше единицы константа M никогда быть не может, т.к. при $t = 0$ C_0-полугруппа $exp(tA)$ обращается в единичный оператор I и $1 = \|I\| \leq \overline{\lim}_{t\to 0+}\|exp(tA)\|$.

Заметим, что, если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ удовлетворяет оценке (2.1), то $e^{-\alpha t}exp(tA)$, $t \geq 0$, является C_0-полугруппой, удовлетворяющей условию (2.1) с $\omega_1 = \omega - \alpha$, и ее производящий оператор есть $A - \alpha I$.

Предложение 2.1.2 *[122] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ существует предел*

$$\omega(A) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|exp(tA)\| = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|exp(tA)\|, \tag{2.2}$$

который равен также
$\inf\{\omega \in R : \forall\, \delta > \omega\ \exists\, M_\delta$ *со свойством* $\|exp(tA)\| \leq M_\delta e^{\delta t},\ t \geq 0\}$.

Определение 2.1.2 *Число $\omega(A)$ называется* ***типом C_0-полугруппы*** *$exp(\cdot A)$.*

Предложение 2.1.3 *[122] Тип C_0-полугруппы может быть как конечным, так и равным $-\infty$.*

Предложение 2.1.4 *[27] Пусть $E = H$ - гильбертово пространство. Тогда для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ имеем*

$\omega(A) = \inf\{\alpha \in R : \alpha + i\beta \in \rho(A)$ *при всех* $\beta \in R$ *и резольвента* $R(\alpha + i\beta, A)$ *равномерно ограничена по* $\beta \in R\}$.

Предложение 2.1.5 *[14] Если задана C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ и $\lambda \in C$ таково, что $Re\lambda > \omega(A)$, то $\lambda \in \rho(A)$ и*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} exp(tA)x\, dt \qquad \text{при} \quad \text{всех} \quad x \in E. \tag{2.3}$$

В приложениях, если имеется C_0-полугруппа, то искать ее генератор, исходя из определения, часто оказывается нелегко. Поэтому иногда удобнее, пользуясь представлением (2.3), получить резольвенту генератора, а по ней найти сам производящий оператор - см., напр. [118]. Отметим попутно, что при манипуляции с резольвентой часто полезной оказывается формула

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\Big((\lambda I - A)^{-1}\Big) = (\lambda I - A)^{-n-1} n! \text{ для всех } n \in N.$$

Вопрос о том, когда оператор A порождает C_0-полугруппу, решает так называемая теорема Хилле-Иосиды-Феллера-Филлипса-Миядеры.

Теорема 2.1.1 [*37*] *Для того, чтобы оператор $A \in L(E)$ являлся производящим оператором некоторой C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$, необходимо и достаточно, чтобы $A \in \mathcal{C}(E)$ и существовали константы* M *и ω со свойствами* $\{\lambda \in C : \mathrm{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ *и*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \quad \text{при} \quad Re\lambda > \omega,\, n \in N. \tag{2.4}$$

Тот факт, что оператор $A \in \mathcal{C}(E)$ порождает C_0-полугруппу (то есть является генератором) $exp(\cdot A)$, удовлетворяющую оценке (2.1), будем записывать так: $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$.

Предложение 2.1.6 *[14] Для сжимающих C_0-полугрупп в формулировке теоремы 2.1.1 условие (2.4) можно заменить на*
$\{\lambda \in C : Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ *и*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq 1/(Re\lambda) \quad \text{\textit{при}} \quad Re\lambda > 0. \tag{2.5}$$

Справедливо и более общее утверждение.

Предложение 2.1.7 *[14] Если некоторая полуплоскость $Re\lambda > \omega$ принадлежит $\rho(A)$ и $\|R(\lambda, A)\| \leq 1/(Re\lambda - \omega)$ при $Re\lambda > \omega$, то оператор $A \in \mathcal{C}(E)$ является производящим оператором C_0-полугруппы.*

Отметим, что на практике проверка того, что A является генератором C_0-полугруппы с помощью теоремы 2.1.1 оказывается сложна, поэтому утверждения 2.1.6, 2.1.7, дающие простые достаточные условия порождения C_0 - полугруппы, имеют большое значение. Часто полезной оказывается следующая

Теорема 2.1.2 *[44] Оператор $A \in \mathcal{C}(E)$ является производящим оператором C_0-полугруппы тогда и только тогда, когда найдется такое ω, что $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ и существует сильно непрерывная функция $\mathcal{T}(\cdot) : [0, \infty) \to B(E)$ со свойствами $\|\mathcal{T}(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, и*

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{T}(t)\, dt. \tag{2.6}$$

В этом случае $\mathcal{T}(\cdot) = exp(\cdot A)$.

Теорема 2.1.3 *[16], [37] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ имеем*

(i) если $x \in D(A)$, то функция $t \to exp(tA)x$ дифференцируема по t и

$$\frac{d}{dt} exp(tA)x = Aexp(tA)x = exp(tA)Ax \quad \text{\textit{при}} \quad t \geq 0; \tag{2.7}$$

(ii) для любых $x \in E$ и $t > 0$ элемент $\int_0^t exp(sA)x\, ds$ принадлежит $D(A)$ и

$$A \int_0^t exp(sA)x\, ds = exp(tA)x - x; \tag{2.8}$$

(iii) если $x \in E$, то

$$exp(tA)x - exp(\tau A)x = A\int_{\tau}^{t} exp(sA)x\,ds \quad при \quad t,\tau \geq 0;$$

(iv) область определения любой степени производящего оператора C_0-полугруппы инвариантна относительно полугруппы, т.е. для любого $t \geq 0$ имеем $exp(tA)x \in D(A^n)$ при $x \in D(A^n), n \in N$.

Предложение 2.1.8 *[15] Обращение представления резольвенты генератора через полугруппу – (2.3) при $x \in E$ и $t > 0$ возможно в нескольких вариантах:*

(i) аппроксимация Иосиды:

$$exp(tA)x = s\text{-}\lim_{\lambda\to\infty} exp\Big(t\lambda AR(\lambda, A)\Big)x;$$

(ii) аппроксимационная формула обращения Уиддера-Поста:

$$exp(tA)x = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{t}R(\frac{k}{t}, A)\right)^k x = s\text{-}\lim_{k\to\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} R\left(\frac{k}{t}, A\right)^{(k)} x.$$

Предложение 2.1.9 *[126] Пусть задана C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ и некоторое замкнутое подпространство $F \subseteq E$. Следующие условия равносильны:*

(i) подпространство F является $\{exp(tA) : t \geq 0\}$ -инвариантным;

(ii) существуют такие числа $s_0 \in C$, $r \in R$ и $n_0 \in N$, что F является инвариантным подпространством относительно операторов $R(s_0 + nr, A)$ при любых $n \geq n_0$.

Предложение 2.1.10 *[59] Для того чтобы элемент $x \in E$ оставался инвариантным относительно C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$, (т.е. чтобы равенство $exp(tA)x = x$ выполнялось для всех $t \geq 0$), и чтобы C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ была сжимающей или позитивной, необходимо и достаточно, чтобы резольвента $R(\lambda, A)$ имела соответственно эти же свойства при $\lambda > \omega(A)$.*

Предложение 2.1.11 *[14] Множество элементов вида $\int_0^t exp(sA)x\,ds$ $(t > 0,\ x \in E)$, входящее в $D(A)$, является плотным в E и очевидно, что*

$$\lim_{t\to 0+} t^{-1}\int_0^t exp(sA)x\,ds = x \quad для \quad всех \quad x \in E. \tag{2.9}$$

Предложение 2.1.12 *[127] Для любых $x \in E$, $\lambda \in C$ имеем*

$$(\lambda I - A) \int_0^t e^{\lambda(t-s)} exp(sA)x\, ds = \Big(e^{\lambda t} - exp(tA)\Big)x. \qquad (2.10)$$

Определение 2.1.3 *Подмножество $D \subseteq D(A)$ называется* ***сердцевиной*** *оператора $A \in L(E)$, если замыкание его сужения $A|_D$ на подмножество D есть A, или, что то же, если D плотно в $D(A)$ в норме графика оператора A .*

Предложение 2.1.13 *[16] Если линейное многообразие $\tilde{D} \subseteq D(A)$ плотно в E и является $\{exp(tA) : t \geq 0\}$-инвариантным, то $\tilde{D}$ - сердцевина оператора A .*

Предложение 2.1.14 *В случае произвольного неограниченного оператора A множество $D(A^\infty)$ может состоять лишь из нулевого элемента.*

Предложение 2.1.15 *[14], [37] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ множество $D(A^k)$ плотно в E при любом $k \in N$.*
Более того, множество $D(A^\infty) := \cap_{k=0}^{\infty} D(A^k)$ (иногда называемое множеством бесконечно дифференцируемых векторов оператора A) тоже плотно в E и является сердцевиной оператора A.

Предложение 2.1.16 *[37] Определим множества $\tilde{E}_\alpha := R(exp(\alpha A))$ при каждом $\alpha > 0$ и $\tilde{E}_0 := \cup_{\alpha>0} \tilde{E}_\alpha$. Тогда $\tilde{E}_\beta \subseteq \tilde{E}_\alpha$ при $0 \leq \alpha \leq \beta$.*

Предложение 2.1.17 *[122] Для C_0-полугрупп $exp(\cdot A)$ и $exp(\cdot B)$ следующие условия эквивалентны:*
(i) $exp(tA)exp(tB) = exp(tB)exp(tA)$ при $t \geq 0$;
(ii) $R(\lambda, A)R(\lambda, B) = R(\lambda, B)R(\lambda, A)$ при некотором $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$;
(iii) условие (ii) имеет место при любом $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$.

В случае выполнения этих условий определена C_0-полугруппа $\{exp(tC) := exp(tA)exp(tB) : t \in \overline{R}_+\}$. Множество $D_0 := D(A) \cap D(B)$ является сердцевиной оператора C, где $Cx = Ax + Bx$ при всех $x \in D_0$.

Предложение 2.1.18 *[59], [126] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ при всех $x \in E$ имеем*

$$exp(tA)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} [\lambda R(\lambda, A)]^k x,$$

$$exp(tA)x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{k\lambda t} \frac{R(\lambda k, A)x}{(k-1)!}$$

равномерно на любом конечном отрезке $t \in [0, T]$.

Предложение 2.1.19 *[59] Если $x \in D(A^m)$, то справедлива формула Тейлора*

$$exp(tA)x = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} A^k x + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (t-s)^{m-1} exp(sA) A^m x \, ds$$

и соотношение

$$[exp(tA) - I]^m x = \int_0^t \dots \int_0^t exp\Big((s_1 + \dots + s_m)A\Big) A^m x \, ds_1 \dots ds_m.$$

Определение 2.1.4 *Определим* ***модуль непрерывности*** *C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ на $[0,T]$:*

$$\omega_T(\delta, exp(\cdot A)x) = \sup_{0 \le t,s \le T} \{\|exp(tA)x - exp(sA)x\| : |t-s| \le \delta\}.$$

В случае, когда $T = 1$, будем писать просто $\omega(\delta, exp(\cdot A)x)$.

Положим также

$$\mathcal{A}_\tau := (exp(\tau A) - I)/\tau. \tag{2.11}$$

Предложение 2.1.20 *[59] Для любого $x \in E$ справедливо равенство*

$$exp(tA)x = \lim_{\tau \to 0} exp(t\mathcal{A}_\tau)x,$$

причем сходимость равномерна на любом конечном отрезке $t \in [0, b]$ и

$$\|exp(tA)x - exp(t\mathcal{A}_\tau)x\| \le \omega_{b+1}\Big(\tau^{1/3}, exp(\cdot A)x\Big) + K\tau^{1/3}\|x\|,$$

где константа $K := Mb(M^b + 4Me^{b(M-1)})$ не зависит от τ, а $M := \max_{t\in[0,b]} \|exp(tA)\|$.

Предложение 2.1.21 *[59] Пусть задана C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ и*

$$\Delta_\tau^m exp(tA) := \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k exp\Big((t + k\tau)A\Big)$$

(C_m^k-биномиальные коэффициенты). Тогда

$$\frac{1}{\tau^m} \Delta_\tau^m exp(tA) = \left[\frac{exp(\tau A) - I}{\tau}\right]^m exp(tA) = \mathcal{A}_\tau^m exp(tA)$$

и

$$exp(tA)x = \lim_{\tau\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k\tau^k}\left(\Delta_\tau^k exp(\zeta A)x\right)\Big|_{\zeta=0},$$

причем сходимость равномерна по $t \in [0,T]$ *с любым* $T < \infty$.

Предложение 2.1.22 *[59] Пусть имеется* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$. *Тогда*

$$exp(tA)x = \lim_{k\to\infty}\left[(1-t)I + t\,exp(\frac{1}{k}A)\right]^k x$$

равномерно по $t \in [0,1]$, *причем*

$$\|\sum_{k=0}^{m} C_m^k t^k (1-t)^{m-k} exp(\frac{k}{m}A) - exp(tA)x\| \le$$

$$\le \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, exp(\cdot A)x\right)$$

и

$$\|\int_0^1 \{\sum_{k=0}^{m} C_m^k t^k (1-t)^{m-k} exp(\frac{k}{m}A)\}xdt - \int_0^1 exp(tA)xdt\| \le$$

$$\le \omega\left(\frac{1}{m+1}, exp(\cdot A)x\right).$$

Более общая аппроксимационная теорема приведена в [59].

Предложение 2.1.23 *[59] Пусть при* $t \ge 0$ *и* $x \in D(A^{m-1})$

$$\tilde{B}_t^m x := \frac{m!}{t^m}\left(exp(tA)x - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}A^k x\right) \tag{2.12}$$

(выражение, стоящее в скобках, есть остаток в формуле Тейлора – см. предложение 2.1.19). Предел $\lim_{t\to 0+}\tilde{B}_t^m x$ *существует тогда и только тогда, когда* $x \in D(A^m)$ *и* $\lim_{t\to 0+} B_t^m x = A^m x$.

Предложение 2.1.24 *[59] Предел выражения*

$$\tilde{P}_t^m(g_{0,m}, ..., g_{m-1,m})x := \frac{m!}{t^m}\left(exp(tA)x - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}g_{k,m}\right) \tag{2.13}$$

при $t \to 0+$; $x, g_{i,m} \in E$ *существует тогда и только тогда, когда* $x \in D(A^m)$ *и* $g_{i,m} = A^i x$ *(заметим, что оператор (2.12) есть частный случай (2.13)).*

В случае, если предел существует, он равен $A^m x$.

Предложение 2.1.25 *[59] Пусть при $t > 0$*

$$\tilde{C}_t^m x := \frac{1}{t^m}\left\{\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k exp(ktA)x\right\}. \tag{2.14}$$

Предел выражения (2.14) при $t \to 0+$ существует тогда и только тогда, когда $x \in D(A^m)$, и равен $A^m x$.

Предложение 2.1.26 *[59] При $t \geq 0$ положим*
$T_m(t) := I - (I - exp(tA))^m$. Тогда для $x \in E$

(i) если $\|T_m(t)x - x\| = \mathrm{o}(t^m)$ при $t \to 0+$, то

$$T_m(t)x = x \quad \text{при} \quad \text{всех} \quad t \in \overline{R}_+;$$

(ii) если $x \in D(A^m)$, то

$$\|T_m(t)x - x\| = O(t^m) \quad \text{при} \quad t \to 0+;$$

(iii) в случае рефлексивного E утверждение (ii) обращается.

Предложение 2.1.27 *[59] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$. Тогда при фиксированном $m \in N$ справедливы импликации:*

(i) $x \in E \Longrightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \|\Big(\lambda R(\lambda, A)\Big)^m x - x\| = 0;$

(ii) $x \in D(A) \Longrightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \|\frac{\lambda}{m}\Big([\lambda R(\lambda, A)]^m x - x\Big) - Ax\| = 0;$

(iii) $x \in D(A^m) \Longrightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda^m\Big(\lambda R(\lambda, A)x - \sum_{k=0}^{m-1} A^k x/k!\Big) - A^m x\| = 0.$

Предложение 2.1.28 *[59] Пусть $x \in D(A^{m-1})$, $\quad y \in E \quad$ и*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\|\lambda^m\Big(\lambda R(\lambda, A)x - \sum_{k=0}^{m}\lambda^{-k}A^k x\Big) - y\right\| = 0.$$

Тогда $x \in D(A^m)$ и $A^m x = y$. Если при этом $y = 0$, то

$$\lambda R(\lambda, A)x = \sum_{k=0}^{m-1} A^k x/\lambda^k \quad \text{при} \quad \lambda > \max(0, \omega(A)).$$

Предложение 2.1.29 *[59] Следующие утверждения для фиксированного* $(x \in E)$ *эквивалентны:*

(i) $\psi(t,x) := \|(exp(tA) - I)x\| = O(t)$ *при* $t \to 0+$ *;*

(ii) $\|[\lambda R(\lambda, A)]^m x - x\| = O(\lambda^{-1})$ *при* $\lambda \to \infty$ *и любом фиксированном* $m \in N$.

Если E *рефлексивно, то каждое из условий (i),(ii) эквивалентно условию* $x \in D(A)$.

Предложение 2.1.30 *[59] Для* $x \in D(A^{m-1})$ *следующие условия эквивалентны:*

$$(i) \quad \|exp(tA)x - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} A^k x\| = O(t^m/m!) \quad \text{при} \quad t \to 0+;$$

$$(ii) \quad \|\lambda R(\lambda, A)x - \sum_{k=0}^{m-1} A^k x/k!\| = O(\lambda^{-m}) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Если E *рефлексивно, то каждое из условий (i),(ii) эквивалентно условию* $x \in D(A^m)$.

Предложение 2.1.31 *[59] Для фиксированного* $x \in E$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\|(exp(tA) - I)^m x\| = O(t^m)$ *при* $t \to 0+$ *;*

(ii) $\|[\lambda R(\lambda, A) - I]^m x\| = O(\lambda^{-m})$ *при* $\lambda \to \infty$ *;*

(iii)$\|\{\prod_{k=1}^m [\frac{\lambda}{k} R(\frac{\lambda}{k}, A) - I]\}x\| = O(m!\lambda^{-m})$ *при* $\lambda \to \infty$.

В случае $x \in D(A^{m-1})$ *каждое из этих утверждений эквивалентно утверждениям 2.1.30.*

Предложение 2.1.32 *[59] Если* x *таково, что имеет место оценка*

$$\|\Big(exp(tA) - exp(sA)\Big)x\| \le L(x)\frac{(t-s)^\gamma}{(t+s)^{\gamma/2}}, \quad s,t \in \overline{R}_+,$$

то $\|\Big(exp(t\mathcal{A}_\tau) - exp(tA)\Big)x\| \le L(x)\tau^{\gamma/2}$ *при* $t \ge 0$.

Предложение 2.1.33 *[59] Пусть H – бесконечномерное гильбертово пространство, $P \in B(H)$ - проектор конечного ранга, а C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ такова, что*

$$\sup\{\|exp(tA)\| : t \geq 0\} = \infty \quad \text{и} \quad \sup\{\|exp(tA)exp(-tP)\| : t \geq 0\} < \infty.$$

Тогда замыкание множества $\cup_{t\geq 0} R\Big(exp(tA)(I-P)\Big)$ — правильное $exp(\cdot A)$ - инвариантное подпространство в H.

Предложение 2.1.34 *[31] Если операторы A и B самосопряжены и оператор $exp(-B/2)exp(-A)exp(-B/2)$ ограничен, то оператор $A+B$ ограничен снизу и*

$$\|exp\Big(-(A+B)\Big)\| \leq \|exp(-B/2)exp(-A)exp(-B/2)\|.$$

Определение 2.1.5 *Двусторонняя последовательность $\{x_k\}_{k\in Z} \subset E$ называется **суммируемой по Чезаро**, если существует предел*

$$C_1\text{-}\sum_{k\in Z} x_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - |k|/(n+1)\Big) x_k. \tag{2.15}$$

Предложение 2.1.35 *[163] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$, $x \in E$, $\zeta_0 \in C$ и $\{\zeta_0 + ik : k \in Z\} \subset \rho(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $x \in R\Bigg(e^{2\pi\zeta_0} I - exp(2\pi A)\Bigg)$;

(ii) предел $C_1\text{-}\sum_{k\in Z} R(\zeta_0 + ik, A)x$ существует ;

(iii) предел $C_1\text{-}\sum_{k\in Z} R(\zeta_0 + ik, A)Q_k(\zeta_0)x$ существует , где $Q_k(\xi) := (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}e^{-t\xi}exp(tA)x\,dt$.

Если найдется такое $r > 0$, что $\zeta \to C_1\text{-}\sum_{k\in Z} R(\zeta + ik, A)x$ аналитична в $\Delta(r) := \{z \in C : |z - \zeta_0| < r\}$, то функция $\zeta \to \Big(e^{2\pi\zeta} I - exp(2\pi A)\Big)^{-1} x$ аналитична в $\Delta(r)$.

Предложение 2.1.36 *[50] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ такова, что для некоторого $T > 0$ имеем $(I \pm exp(tA))^{-1} \in B(E)$ при всех $t \geq T$. Тогда $(I \pm exp(tA))^{-1} \in B(E)$ при всех $0 < t \leq T$.*

2.2 Семейства операторов $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$

В ряде работ (см. напр., [62], [139] и др.) вводились в рассмотрение семейства операторов, связанные с полугруппами операторов и косинус оператор-функциями некоторыми уравнениями.

Так, например, в [62] рассмотрено уравнение

$$U(t+s) - U(t-s) + 2U(t)U(s) = 2U(t)exp(sA), \quad s,t \geq 0, \quad U(0) = 0,$$

а в [139] изучалась задача

$$U(t+s) + exp(2sA)U(t-s) = 2U(t)U(s), \quad s,t \geq 0, \quad U(0) = I.$$

Подобные семейства используют иногда для исследования возмущенных уравнений в банаховых пространствах. В данной книге мы коснемся двух семейств операторов $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$, связанных с C_0-полугруппой подобными соотношениями, которые отличаются лишь порядком сомножителя в правой части.

Определение 2.2.1 *Семейством мультипликативного возмущения $\{U(t);\, t \geq 0\}$ операторов в $B(E)$ для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ называется семейство операторов, удовлетворяющее соотношению*

$$U(t+s) - U(t) = exp(tA)U(s) \quad \text{для } t,\, s \geq 0 \tag{2.16}$$

$$\text{с} \quad U(0) = 0.$$

Семейством аддитивного возмущения $\{V(t);\, t \geq 0\}$ операторов в $B(E)$ для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ называется семейство операторов, удовлетворяющее соотношению

$$V(t+s) - V(t) = V(s)exp(tA) \quad \text{для } t,\, s \geq 0, \tag{2.17}$$

$$\text{с} \qquad V(0) = 0.$$

Семейства $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ имеют в биологических моделях (см. напр. [27], [85]) определенную смысловую нагрузку, и, например, получение численных алгоритмов для вычисления $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ является актуальной самостоятельной задачей. В данной книге мы будем интересоваться семействами $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ в связи с иными целями, а именно, нас будет интересовать подход, позволяющий использовать их для изучения возмущений C_0- полугрупп.

2.3 Измеримость и непрерывность семейств $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$

Хорошо известно ([37]), что сильно измеримая полугруппа должна быть сильно непрерывной на $(0,\infty)$. Следующая теорема показывает, что семейство мультипликативного возмущения и семейство аддитивного возмущения обладают тем же свойством.

Теорема 2.3.1 *Если семейство мультипликативного возмущения $U(\cdot)$ - сильно (равномерно) измеримо на $(0,\infty)$, тогда $U(\cdot)$ - сильно (соответственно, равномерно) непрерывно на $(0,\infty)$. Если семейство аддитивного возмущения $V(\cdot)$ - равномерно измеримо на $(0,\infty)$, тогда $V(\cdot)$ равномерно непрерывно на $(0,\infty)$.*

Доказательство. Следуя [37], мы можем переписать (2.16)

$$U(t) = U(t+h) - exp(tA)U(h) \ \text{ для } \ t,h \geq 0$$

и проинтегрировать это уравнение по h от α до β. Выбирая $0 < \varepsilon < \alpha < \beta < t$, получаем

$$(\beta-\alpha)\Big(U(t\pm\varepsilon) - U(t)\Big)x =$$

$$= \int_\alpha^\beta [U(t\pm\varepsilon+h) - exp((t\pm\varepsilon)A)U(h) - (U(t+h) - exp(tA)U(h))]x\,dh.$$

Следовательно,

$$\|(U(t\pm\varepsilon) - U(t))x\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\beta-\alpha)}\Bigg[\| \int_{t+\alpha}^{t+\beta} \Big(U(\xi\pm\varepsilon) - U(\xi)\Big)x d\xi -$$

$$-\Big(exp((t\pm\varepsilon)A) - exp(tA)\Big)\int_\alpha^\beta U(h)x\ dh\|\Bigg] \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\beta-\alpha)}\Bigg[\int_{t+\alpha}^{t+\beta} \|[U(\xi\pm\varepsilon) - U(\xi)]x\| d\xi +$$

$$+\|\Big(exp((t\pm\varepsilon)A) - exp(tA)\Big)\int_\alpha^\beta U(h)x\,dh\|\Bigg]$$

сходится к 0 при $\varepsilon \to 0$, если мы сможем показать, что сильная измеримость $U(\cdot)$ гарантирует ограниченность $\|U(t)\|$ на каждом интервале $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, или, что эквивалентно, $\|U(t)x\|$ ограничена на $[\alpha, \beta]$ для каждого $x \in E$. Чтобы показать это, допустим от противного, что найдутся такие элемент $\hat{x} \in E$ и последовательность $\{t_n\} \subset [\alpha, \beta]$, что $\|U(t_n)\hat{x}\| \geq n$ и $t_n \to \gamma$, при $n \to \infty$. С другой стороны, поскольку $\|U(t)\hat{x}\|$ является измеримой, то найдутся постоянная $L > 0$ и множество $F \subset [0, \gamma]$ с мерой $m(F) > \gamma/2$ такие, что $\sup_{t \in F} \|U(t)\hat{x}\| \leq L$. Положим $F_n = \{t_n - \eta : \eta \in F \cap [0, t_n]\}$. Тогда мера $m(F_n) \geq \gamma/2$ для достаточно больших n, и

$$n \leq \|U(t_n)\hat{x}\| \leq \|U(t_n - \eta)\hat{x}\| + \|exp\Big((t_n - \eta)A\Big)\| \cdot \|U(\eta)\hat{x}\| \leq$$

$$\leq \|U(t_n - \eta)\hat{x}\| + \ Me^{\omega\beta}L$$

для всех $\eta \in F \cap [0, t_n]$. Поэтому

$$\|U(t)\hat{x}\| \geq n - Me^{\omega\beta}L$$

для каждого $t \in F_n,\ m(F_n) \geq \gamma/2$. Следовательно,

$$\|U(t)\hat{x}\| = \infty \quad \text{для всех} \quad t \in F_\infty := \lim\ F_n$$

с $m(F_\infty) \geq \gamma/2$. Это противоречит тому, что $\|U(t)\|$ конечна всюду в $[0, \infty)$. Доказательство для случая семейства аддитивного возмущения аналогично.

Подобно полугруппам, сильная непрерывность функций $U(\cdot)$ (и $V(\cdot)$) в нуле влечет сильную непрерывность на $[0, \infty)$.

Следствие 2.3.1 *Справедливы следующие утверждения :*

(i) *Если $exp(\cdot A)$ - C_0-группа и функция $U(\cdot)$ сильно измерима, тогда $U(\cdot)$ сильно непрерывна на $[0, \infty)$;*

(ii) *Если $exp(\cdot A)$ - равномерно непрерывная C_0-полугруппа и $U(\cdot)$ сильно измерима, тогда $U(\cdot)$ равномерно непрерывна на $[0, \infty)$;*

(iii) *Предположим, что $V(\cdot)$ равномерно измерима на $(0, \infty)$ и ограничена около 0. Если полугруппа $exp(\cdot A)$ - сильно (равномерно) непрерывна на $[0, \infty)$, тогда $V(\cdot)$ - сильно (соответственно, равномерно) непрерывна на $[0, \infty)$.*

Доказательство. (i) По теореме 2.3.1 $U(\cdot)x$ сильно непрерывна на $(0, \infty)$. Тогда, беря любое $t > 0$, мы имеем $U(h)x = exp(-tA)[U(t + h)x - U(t)x] \to 0$

при $h \to 0$. Следовательно, $U(\cdot)x$ также непрерывна в нуле справа и потому непрерывна на $[0, \infty)$.

(ii) По теореме 2.3.1 $U(\cdot)$ сильно непрерывна на $(0, \infty)$. Следовательно, для каждого n функция $exp(\frac{1}{n}A)U(h)x = [U(\frac{1}{n}+h)x - U(\frac{1}{n})x]$ непрерывна по h на $[0, \infty)$. Поскольку $exp(\frac{1}{n}A)$ сходится равномерно к I, то последовательность $exp(\frac{1}{n}A)U(\cdot)x$ есть равномерно сходящаяся последовательность сильно непрерывных функций на $[0, 1]$. Поэтому предельная функция $U(\cdot)$ также сильно непрерывна на $[0, 1]$. Таким образом, $U(\cdot)$ может быть записана по формуле (iv) предложения 2.4.1. Равномерная непрерывность $exp(\cdot A)$ влечет равномерную непрерывность $U(\cdot)$.

(iii) По теореме 2.3.1 имеем $\|V(h)exp(tA)\| = \|V(t+h) - V(t)\| \to 0$ при $h \to 0$ для всех $t > 0$. Поскольку $V(\cdot)$ равномерно ограничена на $[0, 1]$ и

$$\|V(h)x\| \leq \|V(h)(I - exp(tA))x\| + \|V(h)exp(tA)x\| \leq$$

$$\leq \|V(h)\| \cdot \|(exp(tA) - I)x\| + \|V(h)exp(tA)\| \cdot \|x\|,$$

то из $exp(tA) \to I$ сильно (равномерно) при $t \to 0+$, следует $V(h) \to 0$ сильно (соответственно, равномерно) при $h \to 0+$.

Следствие 2.3.2 *Если семейство мультипликативного возмущения $U(\cdot)$ для $exp(\cdot A)$ - слабо непрерывно в нуле справа, то $U(\cdot)$ сильно непрерывно на $(0, \infty)$.*

Доказательство. Слабая непрерывность справа $U(\cdot)$ в 0 влечет

$$\langle U(t+h)x - U(t)x, x^* \rangle = \langle exp(tA)U(h)x, x^* \rangle =$$

$$= \langle U(h)x, T^*(t)x^* \rangle \to 0 \ \text{ при } \ h \to 0+,$$

для всех $x \in E$, $x^* \in E^*$ и $t \geq 0$. То есть $U(\cdot)$ слабо непрерывна справа на $[0, \infty)$. Так как слабая односторонняя непрерывность влечет сильную измеримость для любой векторно-значной функции, то из теоремы 2.3.1 следует, что $U(\cdot)$ сильно непрерывна на $(0, \infty)$.

Предложение 2.3.1 *Семейство мультипликативного возмущения (или семейство аддитивного возмущения) для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ сильно (равномерно) непрерывно на $[0, \infty)$, если оно сильно (соответственно, равномерно) непрерывно в нуле справа.*

Доказательство. Результат следует из оценок

$$\|U(t+h)x - U(t)x\| \leq \max\Big\{\|exp(tA)\|, \|exp((t+h)A)\|\Big\} \cdot \|U(|h|)x\|,$$

$$\|V(t+h)x - V(t)x\| \leq$$
$$\leq \|V(|h|)exp(tA)x\| + \|V(|h|)\| \cdot \|exp((t+h)A)x - exp(tA)x\|$$

для $0 < |h| < t$.

Предложение 2.3.2 *Если непрерывное семейство мультипликативного возмущения $U(\cdot)$ коммутирует с $exp(\cdot A)$, то есть $U(t)exp(tA) = exp(tA)U(t)$ для всех $t \geq 0$, то $U(\cdot)$ - коммутативное семейство, то есть $U(t)U(s) = U(s)U(t)$ для $s, t \geq 0$. То же самое имеет место для непрерывного семейства аддитивного возмущения.*

Доказательство. Обозначим $\tau_n = t/n$ и выберем последовательность k_n так, что $\frac{k_n}{n} \to s/t$ при $n \to \infty$. В силу представлений

$$U(t) = \sum_{k=0}^{n-1} exp(\tau_n A)^k U(\tau_n), \quad U(k_n\tau_n) = \sum_{k=0}^{k_n-1} exp(\tau_n A)^k U(\tau_n)$$

и непрерывности $U(\cdot)$, имеем

$$U(t)U(s) = \lim_{n\to\infty} U(t)U(k_n\tau_n) = \lim_{n\to\infty} U(k_n\tau_n)U(t) = U(s)U(t).$$

2.4 Преобразование Лапласа и инфинитезимальные операторы

Впредь мы всегда предполагаем, что семейства $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ сильно непрерывны на $[0, \infty)$ (т.е. являются C_0-семействами). Пусть $\hat{U}(\cdot)$ и $\hat{V}(\cdot)$ — их преобразования Лапласа.

Предложение 2.4.1 *Пусть $U(\cdot)$ есть C_0-семейство мультипликативного возмущения и $V(\cdot)$ — C_0-семейство аддитивного возмущения для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$.*

Имеют место следующие свойства :

(i) $(exp(tA)-I)U(s)=(exp(sA)-I)U(t)$
и $V(s)(exp(tA)-I)=V(t)(exp(sA)-I)$ *для* $t,s\geq 0$;

(ii) *функции* $U(\cdot)$ *и* $V(\cdot)$ *экспоненциально ограничены;*

(iii) $\frac{d}{dt}[\lambda(\lambda-A)^{-1}U(t)x]=exp(tA)\lambda^2\hat{U}(\lambda)x$
и
$\frac{d}{dt}[V(t)\lambda(\lambda-A)^{-1}x]=\lambda^2\hat{V}(\lambda)exp(tA)x$ *для* $x\in E,\ \lambda>\omega$, *и* $t>0$*;*

(iv) $U(t)x=(\lambda-A)\int_0^t T(s)\lambda\hat{U}(\lambda)x\,ds=$

$=\int_0^t exp(sA)\lambda^2\hat{U}(\lambda)x\,ds-(T(t)-I)\lambda\hat{U}(\lambda)x$ *для* $x\in E,\ t\geq 0$;

(v) $V(t)x=\lambda\hat{V}(\lambda)(\lambda-A)\int_0^t exp(sA)x\,ds =$

$=\lambda^2\hat{V}(\lambda)\int_0^t exp(sA)x\,ds-\lambda\hat{V}(\lambda)(exp(tA)-I)x$ *для* $x\in E,\ t\geq 0$.

Доказательство. Свойства (i) и (ii) - легко следуют из (2.16) и (2.17) (см. в [85] доказательство (ii) для равномерно непрерывного случая).

Докажем (iii). Пусть $Q(t,\lambda)=\lambda(\lambda-A)^{-1}U(t)$ и $D(t,\lambda)=V(t)\lambda(\lambda-A)^{-1},\lambda>\omega,t\geq 0$. Из (2.16) и (2.17) следует, что $Q'_t(t,\lambda)=exp(tA)Q'_t(0,\lambda)$, если $Q'_t(0,\lambda)$ существует, и $D'_t(t,\lambda)=D'_t(0,\lambda)exp(tA)$, если $D'_t(0,\lambda)$ существует. Следовательно, достаточно показать, что $Q'_t(0,\lambda)=\lambda^2\hat{U}(\lambda)$ и $D'_t(0,\lambda)=\lambda^2\hat{V}(\lambda)$. Беря преобразование Лапласа в (2.16) и (2.17) по t, мы получаем

$$s^{-1}(e^{\lambda s}-1)\hat{U}(\lambda)-s^{-1}\int_0^s e^{-\lambda\tau}U(\tau)d\tau\cdot e^{\lambda s}=(\lambda-A)^{-1}U(s)/s$$

и

$$s^{-1}(e^{\lambda s}-1)\hat{V}(\lambda)-s^{-1}\int_0^s e^{-\lambda\tau}V(\tau)d\tau\cdot e^{\lambda s}=(V(s)/s)(\lambda-A)^{-1}.$$

Полагая $s\to 0+$, получаем необходимые равенства. Интегрируя равенство $Q'_t(t,\lambda)=exp(tA)\lambda^2\hat{U}(\lambda)$ от 0 до t, имеем

$$\lambda(\lambda-A)^{-1}U(t)x=Q(t,\lambda)x=\int_0^t T(s)\lambda^2\hat{U}(\lambda)xds,\ x\in E, \tag{2.18}$$

и, следовательно, (iv) доказано. Утверждение (v) доказывается аналогично.

Множество C_0-семейств мультипликативных возмущений изоморфно множеству $B(E)$. Действительно, для любого фиксированного $\lambda>\omega$ определим $U_{B,\lambda}(\cdot)$ и $V_{B,\lambda}(\cdot)$ как функции

$$U_{B,\lambda}(t)x:=(A-\lambda)\int_0^t exp(sA)Bx\,ds,\quad x\in E,t\geq 0, \tag{2.19}$$

$$V_{B,\lambda}(t)x := B(A-\lambda)\int_0^t exp(sA)x\,ds, \quad x \in E,\, t \geq 0. \tag{2.20}$$

Ясно, что $U_{B,\lambda}(\cdot)$ есть C_0-семейство мультипликативных возмущений и $V_{B,\lambda}(\cdot)$ есть C_0-семейство аддитивных возмущений для $exp(\cdot A)$. Следовательно, если мы выберем $U(\cdot)$ и λ в (iv) предложения 2.4.1 равными $U_{B,\lambda}(\cdot)$ и μ, соответственно, то (iv) можно записать как

$$U_{B,\lambda}(t)x = (\mu - A)\int_0^t T(s)\mu\hat{U}_{B,\lambda}(\mu)x\,ds, \quad \text{для } x \in E,\, \mu > \omega,\, t \geq 0.$$

Аналогично

$$V_{B,\lambda}(t)x = \mu\hat{V}_{B,\lambda}(\mu)(\mu - A)\int_0^t exp(sA)x\,ds, \quad \text{для } x \in E,\, \mu > \omega,\, t \geq 0.$$

Эти равенства имеют место, в частности, для $\mu = \lambda$. Тогда, вычитая, получаем

$$(\lambda - A)\int_0^t exp(sA)[B + \lambda\hat{U}_{B,\lambda}(\lambda)]x\,ds = 0$$

для всех $x \in E$ и $t \geq 0$, и

$$(B + \lambda\hat{V}(\lambda))\int_0^t T(s)(\lambda - A)x\,ds = 0$$

для всех $x \in D(A)$ и $t \geq 0$. Поскольку $\lambda - A$ обратим, то легко видеть, что $B = -\lambda\hat{U}_{B,\lambda}(\lambda) = -\lambda\hat{V}_{B,\lambda}(\lambda)$. Эти рассуждения можно подытожить в следующем предложении.

Предложение 2.4.2 *Для любого $\lambda > \omega$, отображение $\Phi : B \to U_{B,\lambda}(\cdot)$ есть биекция из $B(E)$ на множество C_0-семейств мультипликативных возмущений, и отображение $\Psi : B \to V_{B,\lambda}(\cdot)$ есть биекция из $B(E)$ на множество всех C_0-семейств аддитивных возмущений для $exp(\cdot A)$. Кроме того, $\Phi^{-1}(U(\cdot)) = -\lambda\hat{U}(\lambda)$ и $\Psi^{-1}(V(\cdot)) = -\lambda\hat{V}(\lambda)$.*

Предложение 2.4.3 *Функции $\hat{U}(\cdot)$ и $\hat{V}(\cdot)$ имеют следующие свойства:*

(i) $\|\hat{U}(\lambda)\| \to 0$ *и* $\|\hat{V}(\lambda)\| \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$;

(ii) $\lambda\hat{U}(\lambda) \to 0$ *и* $\lambda\hat{V}(\lambda) \to 0$ *сильно при* $\lambda \to \infty$;

(iii) *если семейство* $U(\cdot)$ *липшиц-непрерывно, тогда*
$w^*\text{-}\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^2\hat{U}^*(\lambda)x^* = A_U^*x^* - A^*x^*$ *для всех* $x^* \in D(A^*)$;

(iv) $\lambda^2\hat{V}(\lambda)x \to A_Vx - Ax$ *сильно при* $\lambda \to \infty$ *для всех* $x \in D(A)$;

(v) *если* $\|U(t)\| \to 0$ *при* $t \to 0+$, *тогда* $\|\lambda\hat{U}(\lambda)\| \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$;

(vi) *если* $\|V(t)\| \to 0$ *при* $t \to 0+$, *тогда* $\|\lambda\hat{V}(\lambda)\| \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Если $U(t) \to 0$ сильно (равномерно) при $t \to 0+$, тогда $U(\cdot)$ - сильно (соответственно, равномерно) $(C,1)$ суммируема к 0. Поскольку $U(\cdot)$ экспоненциально ограничена, стандартная аргументация из [37] показывает, что $\lambda\hat{U}(\lambda) \to 0$ сильно (соответственно, равномерно) при $\lambda \to \infty$. То же самое справедливо для $V(\cdot)$. Следовательно, имеют место утверждения (i) и (ii). Утверждение (iii) следует из (i) очевидным образом. Доказательство утверждений о поведении $\lambda^2\hat{U}(\lambda)^*$ и $\lambda^2\hat{V}(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ будет обсуждено в следствиях 2.4.1 и 13.3.1.

Определение 2.4.1 *Пусть $U(\cdot)$ является C_0-семейством мультипликативных возмущений для $exp(\cdot A)$.* ***Инфинитезимальный оператор*** W_U ***семейства*** $U(\cdot)$ *определяется как*

$W_U x = \lim_{h\to 0^+} \frac{U(h)}{h}x$, *с естественной областью определения.*

Инфинитезимальный оператор A_U ***пары*** $(exp(\cdot A), U(\cdot))$ *определяется как*

$$A_U x := \lim_{h\to 0+} \frac{(exp(hA) + U(h) - I)x}{h}, \text{ с естественной областью определения.}$$

Инфинитезимальный оператор W_V C_0***-семейства аддитивных возмущений*** $V(\cdot)$ *и* ***инфинитезимальный оператора*** A_V ***пары*** $(V(\cdot), exp(\cdot A))$ *определяются таким же путем, как*

$$W_V x := \lim_{h\to 0+} \frac{V(h)x}{h} \quad \text{и} \quad A_V x := \lim_{h\to 0+} \frac{(exp(hA) + V(h) - I)x}{h}.$$

Теорема 2.4.1 *Операторы W_U и A_U замкнуты и*

$$W_U = \lambda(\lambda - A)\hat{U}(\lambda), \quad Re\lambda > \omega, \tag{2.21}$$

$$A_U = A(I - \lambda\hat{U}(\lambda)) + \lambda^2\hat{U}(\lambda), \quad Re\lambda > \omega. \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть $C_h = h^{-1}(exp(hA) + U(h) - I)$. В силу (iv) предложения 2.4.1 при всех $x \in E$

$$h^{-1}U(h)x = h^{-1}\int_0^h exp(sA)\lambda^2\hat{U}(\lambda)x\,ds - \lambda h^{-1}(exp(hA) - I)\hat{U}(\lambda)x \tag{2.23}$$

и

$$C_h x = h^{-1}\int_0^h exp(sA)\lambda^2\hat{U}(\lambda)xds + h^{-1}(exp(hA) - I)(I - \lambda\hat{U}(\lambda))x. \tag{2.24}$$

Первый член справа сходится к $\lambda^2\hat{U}(\lambda)x$ при $h \to 0+$. Поэтому $D(W_U) = D(A\hat{U}(\lambda))$ и

$$W_U x = \lambda(\lambda - A)\hat{U}(\lambda)x \text{ для } x \in D(W_U), \tag{2.25}$$

и аналогично получаем $D(A_U) = D(A(I - \lambda\hat{U}(\lambda))$ и

$$A_U x = \lambda^2\hat{U}(\lambda)x + A(I - \lambda\hat{U}(\lambda))x \quad \text{для} \quad x \in D(A_U). \tag{2.26}$$

Поскольку A замкнут и $\hat{U}(\lambda)$ ограничен, то легко видеть, что W_U и A_U замкнуты.

Замечание 2.4.1 *Вообще говоря, области определения операторов W_U и A_U не обязательно плотны в E. Области определения $D(W_V)$ и $D(A_V)$ всегда плотны в E, т.к. содержат плотное в E множество $D(A)$.*

Теорема 2.4.2 *Инфинитезимальные операторы W_V и A_V имеют следующие свойства для $Re\lambda > \omega$:*

$$D(A) \subseteq D(W_V) \text{ и } W_V x = \lambda\hat{V}(\lambda)(\lambda - A)x \quad \text{для } x \in D(A), \tag{2.27}$$

$$D(A) \subseteq D(A_V) \text{ и } A_V x = (I - \lambda\hat{V}(\lambda))Ax + \lambda^2\hat{V}(\lambda)x \text{ для } x \in D(A). \tag{2.28}$$

Кроме того, если $V(t)$ равномерно непрерывна по t, тогда A_V замкнут, $D(A_V) = D(A)$, и $A_V = (I - \lambda\hat{V}(\lambda))A + \lambda^2\hat{V}(\lambda)$ для больших λ.

Доказательство. Пусть $D_h = h^{-1}\Big(exp(hA) + V(h) - I\Big)$. В силу (v) предложения 2.4.1 имеем равенства

$$h^{-1}V(h)x = \lambda^2\hat{V}(\lambda)h^{-1}\int_0^h exp(sA)x\,ds - \frac{\lambda\hat{V}(\lambda)}{h}\cdot(exp(hA) - I)x$$

и

$$D_h x = \lambda^2\hat{V}(\lambda)h^{-1}\int_0^h exp(sA)x\,ds + \frac{(I - \lambda\hat{V}(\lambda))}{h}\cdot(exp(hA) - I)x,$$

которые показывают, что $D(A) \subseteq D(W_V) \cap D(A_V), W_V x = \lambda\hat{V}(\lambda)(\lambda - A)x$ и $A_V x = (I - \lambda\hat{V}(\lambda))Ax + \lambda^2\hat{V}(\lambda)x$ для $x \in D(A)$.

Если $\|V(t)\| \to 0$ при $t \to 0+$, тогда $\|\lambda\hat{V}(\lambda)\| \to 0$ при $\lambda \to \infty$ (Предложение 2.4.3 (vi)). Таким образом $I - \lambda\hat{V}(\lambda)$ обратим для больших λ, и мы имеем $D(A_V) \subseteq D(A)$. Если $\{x_n\}$ - последовательность в $D(A)$ такая, что $x_n \to x$ и $(I - \lambda\hat{V}(\lambda))Ax_n \to y$, тогда $Ax_n \to (I - \lambda\hat{V}(\lambda))^{-1}y$ так что $x \in D(A)$ и $Ax = (I - \lambda\hat{V}(\lambda))^{-1}y$. Следовательно, $(I - \lambda\hat{V}(\lambda))A$ замкнут. То же самое справедливо для A_V.

Из теоремы 2.4.2 и предложения 2.4.3 (ii) следует

Следствие 2.4.1 *Если* $\lambda \to \infty$, *тогда* $\lambda^2 \hat{V}(\lambda)x \to (A_V - A)x$ *для всех* $x \in D(A)$.

Замечание 2.4.2 *Если* C_0*-семейство мультипликативных возмущений для* $exp(\cdot A)$ *коммутативно, т.е. удовлетворяет соотношению* $U(\cdot)exp(\cdot A) = exp(\cdot A)U(\cdot)$, *то* $U(\cdot)$ *также является* C_0*-семейством аддитивных возмущений и по теоремам 2.4.1 и 2.4.2 имеем*

$$W_U = W_V = \lambda(\lambda - A)\hat{U}(\lambda) \supseteq \lambda\hat{U}(\lambda)(\lambda - A)$$

и

$$A_U = A_V = A(I - \lambda\hat{U}(\lambda)) + \lambda^2\hat{U}(\lambda) \supseteq (I - \lambda\hat{U}(\lambda)) + \lambda^2\hat{U}(\lambda),$$

где последнее включение превращается в равенство в случае равномерно непрерывной $U(\cdot)$.

Глава 3

Группы операторов

Группы — один из наиболее интересных классов полугрупп операторов. В этом классе естественным образом вводятся в рассмотрение, скажем, классы Румье, Берлинга и Жевре. Так, например, в [7] показано, что множество аналитических векторов генератора ограниченной C_0-группы плотно в E. Сегодня эта тематика получила существенное развитие в работах [9], [10], [28]. Подробнее этих вопросов мы коснемся во второй книге.

3.1 C_0-группы операторов

Определение 3.1.1 *Однопараметрической C_0-**группой операторов** называется семейство операторов, удовлетворяющее условиям определения 1.2.1 с заменой $\overline{R}_+$ на R.*

Предложение 3.1.1 *[14] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ продолжается до C_0-группы (иногда говорят вкладывается в группу), то такое расширение единственно. При этом за C_0-группой сохраняем обозначение $exp(\cdot A)$.*

Теорема 3.1.1 *[14] Для того чтобы оператор $A \in L(E)$ являлся производящим оператором C_0-группы $exp(\cdot A)$, необходимо и достаточно, чтобы $A \in \mathcal{C}(E)$ и существовали константы $M \geq 1$ и ω со свойствами $\{\lambda \in C : |Re\lambda| > \omega\} \subseteq \rho(A)$ и*

$$\|R(\lambda, A)^k\| \leq \frac{M}{(|Re\lambda| - \omega)^k} \quad \text{при} \quad |Re\lambda| > \omega,\, k \in N. \tag{3.1}$$

Предложение 3.1.2 *Если $A \in B(E)$, то простейший пример C_0-группы операторов дается формулой*

$$exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} (tA)^k/k!, \quad t \in R.$$

Предложение 3.1.3 *[113] Если для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ при каждом $t > 0$ существует оператор $\hat{\Phi}(t) := [exp(tA)]^{(-1)} \in B(E)$, то $\hat{\Phi}(\cdot)$ — C_0-полугруппа с производящим оператором $-A$, которая может быть вложена в C_0-группу $\Phi(\cdot)$ следующим образом:*

$$\Phi(t) = \begin{cases} exp(tA), & t \geq 0; \\ \hat{\Phi}(t), & t \leq 0. \end{cases}$$

Определение 3.1.2 *Множество операторов A, порождающих C_0-группы с оценкой $\|exp(tA)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \in R$, будем обозначать $\mathcal{GR}(M, \omega)$.*

Предложение 3.1.4 *[113] Если $0 \in \rho(exp(t_0 A))$ при некотором $t_0 > 0$, то $0 \in \rho(exp(tA))$ при всех $t > 0$ и C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ может быть вложена в C_0-группу.*

Предложение 3.1.5 *[122] Пусть оператор $exp(t_0 A) - I$ вполне непрерывен при некотором $t_0 > 0$. Тогда C_0-полугруппа $exp(tA)$ обратима при любом $t \geq 0$ и вкладывается в C_0-группу.*

Предложение 3.1.6 *[68] Пусть $exp(\cdot A)$ есть C_0-группа операторов с неограниченным A. Тогда существует число μ такое, что для любых $\alpha, \beta \in \overline{R}_+$ имеем*

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} (\|exp(tA) - I\| - 1 - e^{\mu t}) > 0.$$

Предложение 3.1.7 *[76] Пусть iA порождает C_0-группу и $p(\cdot)$ – полином четной степени с положительным коэффициентом при старшей степени. Тогда $-p(A)$ порождает аналитическую C_0-полугруппу с углом $\frac{\pi}{2}$.*

Предложение 3.1.8 *[56] Пусть $exp(\cdot A)$ и $exp(\cdot G)$ — коммутирующие между собой C_0-группы операторов, а элемент $\tilde{x}$ таков, что $\tilde{x} \in D(A^2) \cap D(G^2)$; $A\tilde{x}, G\tilde{x} \in D(A) \cap D(G)$; $AG\tilde{x} = GA\tilde{x}$. Тогда*

$$\|A\tilde{x} - iG\tilde{x}\| \leq 2\|\tilde{x}\| \frac{m(\rho)}{\rho} + 2\sqrt{2} h(\tilde{x}) \frac{m(1/\rho)}{\rho} + 4\|A\tilde{x} + iG\tilde{x}\| m(\rho) \ln \rho$$

при всех $\rho \geq 1$, где $h(x) := \|A(Ax + iGx)\| + \|B(Ax + iGx)\|$,

$$m(r) := \sup\{\|exp(tA)exp(sG)\| : \ t, s \in R; \ |t + is| \leq r \quad \text{при } r > 0\}.$$

Предложение 3.1.9 *[56] В условиях предложения 3.1.8 имеем*

$$\max(\|A\tilde{x}\|, \|G\tilde{x}\|) \leq$$

$$\leq \|\tilde{x}\|\frac{m(\rho)}{\rho} + \sqrt{2}h(\tilde{x})\frac{m(1/\rho)}{\rho} + \|A\tilde{x} + iG\tilde{x}\| \cdot \Big(1/2 + 2m(\rho)\ln\rho\Big), \quad \rho \geq 1.$$

Предложение 3.1.10 *[56] Если в условиях предложения 3.1.8 дополнительно $m(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to \infty$, то для любых $L, \varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\|\tilde{x}\|$, $h(\tilde{x}) < L$ неравенство $\|A\tilde{x} + iG\tilde{x}\| < \varepsilon$ влечет $\|A\tilde{x} - iG\tilde{x}\| < \varepsilon$.*

Если в условиях 3.1.8 дополнительно $m(\rho) \leq m$ при $\rho \geq 0$, то для $\rho \geq 1$ имеем

$$\|A\tilde{x} - iG\tilde{x}\| \leq$$

$$\leq \begin{cases} 4m\|A\tilde{x} + iG\tilde{x}\|, & \text{\textit{если}}\ \|x\| + \sqrt{2}h(x) \leq 2\|Ax + iGx\|; \\ 4m\|A\tilde{x} + iG\tilde{x}\| \cdot \Big(1 + \ln\Big[(\|\tilde{x}\| + \sqrt{2}h(x))/(2Ax + iGx\|)\Big]\Big) & \\ & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$$

Определение 3.1.3 *Множество*

$$\mathfrak{A}(A) := \{x \in D(A^\infty) : \exists\, \alpha, c > 0 : \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^k,\ k \in N\} \tag{3.2}$$

называют ***множеством аналитических векторов*** *оператора A, а*

$$\mathfrak{A}_c(A) := \{x \in D(A^\infty) : \forall \alpha > 0\, \exists c > 0 : \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^k,\ k \in N\} \tag{3.3}$$

- ***множеством целых векторов*** *оператора A .*

Очевидно, что для любого $A \in \mathcal{C}(E)$ имеем $\mathfrak{A}_c(A) \subseteq \mathfrak{A}(A) \subseteq D(A^\infty)$.

Предложение 3.1.11 *[11] Если $A \in B(E)$, то $\mathfrak{A}(A) = D(A^\infty) = \mathfrak{A}_c(A) = E$.*

Предложение 3.1.12 *[28] Если $A \in \mathcal{GR}(\mathrm{M}, \omega)$, то $\mathfrak{A}_c(A)$ плотно в E.*

Предложение 3.1.13 *[10] Имеется пример оператора $A \in \mathcal{G}(\mathrm{M}, 0)$ такого, что $\mathfrak{A}(A) = \{0\}$.*

Определим также

$$D(A, \eta) := \{x \in D(A^\infty) : \exists c = c(x, \eta) > 0 : \|A^k x\| \leq c\eta^k,\ k \in N\}$$

и

$$EXP(A) := \{x \in D(A^\infty) : \exists \alpha, c > 0 : \|A^k x\| \leq c\alpha^k, k \in N\}.$$

Определение 3.1.4 *Множество $EXP(A)$ называется множеством* ***векторов экспоненциального типа.***

Замечание 3.1.1 *Если оператор $A \in L(E)$ обладает полной системой собственных векторов, то пространство $EXP(A)$ плотно в E.*

Предложение 3.1.14 *[10] Множество $D(A,\eta)$, наделенное нормой*

$$\|x\|_{D(A,\eta)} := \sup_{k\in N} \eta^{-k}\|A^k x\|,$$

является банаховым пространством.

Предложение 3.1.15 *[10] Имеют место утверждения:*

(i) $D(A,\eta_1) \subseteq D(A,\eta_2)$ и $\|x\|_{D(A,\eta_2)} \le \|x\|_{D(A,\eta_1)}$ при $x \in D(A,\eta_1)$ и $\eta_1 \le \eta_2$;

(ii) множество $D(A,\eta)$ инвариантно относительно A и

$$\|Ax\|_{D(A,\eta)} \le \eta\|x\|_{D(A,\eta)} \qquad \text{при } x \in D(A,\eta);$$

(iii) $\cup_{k=1}^{\infty}\sigma(A|_{D(A,k)}) \subseteq \sigma(A)$ и $\|R(\lambda,A)x\|_{D(A,\eta)} \le \|R(\lambda,A)\|\cdot\|x\|_{D(A,\eta)}$ при $\lambda \in \rho(A)$ и $x \in D(A,\eta)$;

(iv) если $\overline{EXP(A)} = E$, то любой элемент $x \in E$ может быть представлен как $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, где $x_k \in D(A,k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_{D(A,k)} < \infty$ и $\|x\| = \inf\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_{D(A,k)}$, где $\inf$ взят по всем возможным представлениям x. Более того,

$D(A) = \{x \in E:\ x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k,\ x_k \in D(A,k),\ \sum_{k=1}^{\infty} k\|x_k\|_{D(A,k)} < \infty\}$ *и*

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} A|_{D(A,k)}x_k, \qquad x \in D(A).$$

Предложение 3.1.16 *[10] Если $A \in \mathcal{GR}(M,0)$, то $\overline{EXP(A)} = E$.*

Глава 4

Аналитические полугруппы

Аналитические полугруппы представляют собой весьма важный для приложений класс C_0-полугрупп, поскольку они являются абстрактной конструкцией, соответствующей широкому классу задач для параболических уравнений. Тем не менее, этот уровень абстракции не теряет основных свойств и даже при рассмотрении разностных схем позволяет получить оптимальные результаты.

4.1 Дифференцируемые полугруппы

Из определения инфинитезимального оператора ясно, что в общем случае функция $t \to exp(tA)x$ не является дифференцируемой при всех $x \in E$. Однако для некоторых часто встречающихся в приложениях классов C_0-полугрупп имеет место дифференцируемость при $t > 0$.

Определение 4.1.1 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется* ***дифференцируемой, начиная с t_0 (или становится дифференцируемой)****, если при любом $x \in E$ функция $t \to exp(tA)x$ дифференцируема на (t_0, ∞). C_0-полугруппа называется* ***дифференцируемой****, если $t_0 = 0$.*

Имеет место следующий критерий того, что C_0-полугруппа становится дифференцируемой:

Предложение 4.1.1 *[23], [127] Для того чтобы C_0-полугруппа становилась дифференцируемой начиная с t_0, необходимо и достаточно существование таких чисел $a, b > 0, M > 0$, что*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq M|Im\lambda| \quad \text{при} \quad Re\,\lambda > a - b\ln|Im\lambda|.$$

Предложение 4.1.2 *[127] Если существуют константы $C > 0$ и $\delta_c > 0$ такие, что*

$$\|exp(tA) - I\| \leq 2 + C \cdot t \ln t, \qquad 0 < t < \delta_c, \tag{4.1}$$

то C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ становится дифференцируемой, начиная с $3M/C$, где константа M взята из (2.1).

Предложение 4.1.3 *[162] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ становится дифференцируемой, то операторы $exp(tA)$ сюръективны при каждом $t \geq 0$.*

Предложение 4.1.4 *[162] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$ и оператор $exp(t_0 A)$ не является сюрьективным при некотором $t_0 > 0$. Тогда C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ не является сюръективной ни при каком $t > 0$, и в этом случае C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ не становится дифференцируемой.*

4.2 Аналитические полугруппы

Обозначим через $\Sigma(\theta) := \{z \in C : |arg\, z| < \theta\}$ сектор комплексной плоскости C.

Определение 4.2.1 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется **аналитической C_0-полугруппой** с углом $\theta \in (0, \pi/2)$ или просто аналитической, если она расширяется до оператор-функции $exp(zA) : z \to B(E)$, аналитической в $\Sigma(\theta)$ и сильно непрерывной в нуле по любому лучу внутри $\Sigma(\theta)$.*

Определение 4.2.2 *Если для любого положительного $\psi < \theta$ выполнена оценка $\|exp(zA)\| \leq M_\psi \leq \infty$ при всех $z \in \Sigma(\psi)$, то аналитическую C_0-полугруппу называют **ограниченной аналитической**.*

Предложение 4.2.1 *[22] Оператор-функция $exp(\cdot A)$ сохраняет в $\Sigma(\theta)$ полугрупповое свойство, т.е.*

$$exp((z_1 + z_2)A) = exp(z_1 A) exp(z_2 A), \quad z_1, z_2 \in \Sigma(\theta).$$

В $\Sigma(\theta)$ при $\omega > \omega(A)$ остается справедливой оценка (2.1) в виде

$$\|exp(zA)\| \leq M e^{\omega\, Re z}, \qquad |arg\, z| \leq \theta_1 < \theta < \pi/2. \tag{4.2}$$

Будем обозначать через $\mathcal{H}(\theta, \omega)$ множество производящих операторов аналитических полугрупп с углом θ, удовлетворяющих оценке (4.2).

Теорема 4.2.1 *[127] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является аналитической;

(ii) существуют такие $M \geq 1, \omega \in R$, что при $Re\lambda \geq \omega > \omega(A)$ определена резольвента $R(\lambda, A)$ и

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}; \tag{4.3}$$

(iii) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является дифференцируемой и для ее производной справедлива оценка с некоторыми $M \geq 1, \omega \in R$

$$\|\frac{d}{dt}exp(tA)\| \leq Mt^{-1}e^{\omega t}, \quad t \in R_+; \tag{4.4}$$

(iv) имеет место оценка (вещественный критерий аналитичности)

$$\|A(I - \lambda A)^{-k}\| \leq \frac{C}{k\lambda}, \qquad (0 < \lambda < \lambda_0,\ k \in N,\ k\lambda \leq 1);$$

(v) имеет место оценка

$$\|\frac{d^{m+k}}{d\lambda^{m+k}}(\lambda^k R(\lambda, A))\| \leq \frac{Mm!k!\rho^k}{(\lambda - \omega)^{m+1}}, \qquad m, k \in N,\ \lambda > \omega(A).$$

Предложение 4.2.2 *[59] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ условия $\tilde{E}_t \subseteq D(A)$ и $\|tAexp(tA)\| \leq Q$ при $0 < t \leq 0$ эквивалентны тому, что C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ аналитически продолжается в сектор $\Sigma(\frac{1}{Qe})$ и выполняется условие*

$s\text{-}\lim_{\zeta \to 0} exp(\zeta A)x = x \quad (\zeta \in \Sigma(\theta))$ для любого $x \in E$.

Кроме того, при $0 < t \leq 1$ и $\alpha \in (0, \frac{1}{Qe})$ имеем

$$Aexp(tA) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - t| = t\cdot\sin\alpha} exp(\zeta A)/(\zeta - t)^2\, d\zeta,$$

где контур интегрирования обходится в положительном направлении.

Предложение 4.2.3 *[59] Если аналитическая C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ удовлетворяет условиям Предложения 4.2.2, $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$ и допускает оценку*

$$\|exp(\zeta A)\| \leq M_1 \quad \text{при} \quad \zeta \in \{\zeta \in C:\ 0 \leq Re\zeta \leq 2,\ |arg\,\zeta| \leq \frac{\varepsilon}{eM}\},$$

где $0 \leq \epsilon \leq 1$, а константа Q взята из Предложения 4.2.2. Тогда для α из предложения 4.2.2 выполнена оценка

$$\|tAexp(tA)\| \leq \frac{M_1}{\sin\alpha}.$$

Предложение 4.2.4 *[16] Для аналитической C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ имеем*

$$(i) \quad \|\frac{d^k}{dt^k}(exp(tA))\| = \|A^k exp(tA)\| \leq M_k e^{\omega t}/t^k, \ t > 0; \tag{4.5}$$

$$(ii) \, \|A^k\Big(exp(tA) - exp(sA)\Big)\| \leq \frac{M_k(t^k - s^k)e^{\omega t}}{k(ts)^k}, \ 0 < s \leq t, \tag{4.6}$$

где $M_k = M^k k^k$, $k \in N$ и $\omega > \omega(A)$.

Предложение 4.2.5 *[73] Оператор A порождает ограниченную аналитическую C_0-полугруппу с углом θ тогда и только тогда, когда $\Sigma(\theta + \pi/2) \subset \rho(A)$ и для любого $\psi \in (0, \theta)$ существует такая константа M_ψ, что $\|R(\lambda, A)\| \leq M_\psi/|\lambda|$ при $\lambda \in \Sigma(\psi + \pi/2)$.*

Предложение 4.2.6 *[16] C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является аналитической тогда и только тогда, когда найдутся $\omega_1 > \omega(A)$ и $M \geq 1$ со свойством $\|R(\omega_1 + i\eta, A)\| \leq M/|\eta|$ при всех $\eta \in R$.*

Предложение 4.2.7 *[77] Если A порождает ограниченную C_0-группу операторов $exp(\cdot A)$, то $-A^2$ порождает ограниченную аналитическую C_0-полугруппу с углом $\pi/2$. Утверждение остается в силе, если слова "ограниченную" снять.*

Предложение 4.2.8 *[148] Пусть A есть производящий оператор C_0- полугруппы и $SV(exp(\cdot A), t) < \infty$. Тогда полугруппа $exp(\cdot A)$ является аналитической.*

Предложение 4.2.9 *Пусть в $\Sigma(\theta)$ задана аналитическая C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$. Тогда оператор-функция $\Big\{exp(t \cdot e^{i\varphi} A), \, t \geq 0\Big\}$ является C_0-полугруппой при любом $\varphi \in (-\theta, \theta)$.*

Предложение 4.2.10 *[77] Пусть оператор $-A$ порождает ограниченную аналитическую C_0-полугруппу $exp(\cdot A)$ с углом θ и $n(\pi/2 - \theta) < \pi/2$. Тогда оператор $-A^n$ порождает ограниченную аналитическую C_0-полугруппу с углом $\pi/2 - n(\pi/2 - \theta)$ (случай $n = 2$ см. в [100]).*

Предложение 4.2.11 *[77] Если $-A$ порождает ограниченную аналитическую C_0-полугруппу с углом $\pi/2$, то оператор $-A^n$ порождает ограниченную аналитическую C_0-полугруппу для любого $n \in N$.*

Предложение 4.2.12 *[75] Пусть дана ограниченная аналитическая C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ с углом $\theta \in (0, \pi/2]$. Если $R(A)$ плотно в E, то $N(A) = \{0\}$ и оператор A^{-1} порождает ограниченную аналитическую C_0-полугруппу $exp(\cdot A^{-1})$ с углом θ, которая дается интегралом, сходящимся в равномерной операторной топологии*

$$exp(tA^{-1}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-z}A(zA+tI)^{-1}\,dz, \tag{4.7}$$

где $\Gamma = \partial\Big[\{z \in C : |z| = r > 0\} \cup \Sigma(\theta)\Big]$.

Предложение 4.2.13 *[75] Если пространство E рефлексивно, то в предложении 4.2.12 условие плотности можно заменить на условие $N(A) = \{0\}$.*

Предложение 4.2.14 *[156] Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является аналитической;

(ii) найдется такое число $\zeta \in C$, $|\zeta| = 1$, что

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\inf_x\{\|\zeta x - exp(tA)x\| : x \in E, \|x\| = 1\} > 0;$$

(iii) имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\sup_x\{\, t\|Aexp(tA)x\| : x \in D(A), \|x\| = 1\} < \infty; \tag{4.8}$$

(iv) оператор $\binom{A0}{AA}$ порождает C_0-полугруппу на $E \times E$;

(v) существуют константа C и число $b > 0$ со свойствами

$$n \cdot \|(\lambda R(\lambda, A))^n - (\lambda R(\lambda, A))^{n-1}\| \le C \quad \text{при} \quad \lambda > nb,\, n \in N;$$

(vi) существует такой полином q, что

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\|q(exp(tA))\| < L(q) := \sup\{|q(z)| : z \in C, |z| = 1\};$$

(vii) строгое неравенство

$$\lim_{h\to\infty}\sup_{s,t\in\mathcal{K}}\|\{q(exp(\frac{st}{n}A))\}^n exp(tA)\| < L(q)$$

выполняется для любых компактов $\mathcal{K} \subset R$ и всех полиномов $q(z)$ со свойством $|q(1)| < L(q)$;

(viii) для любого $\zeta \in C$ такого, что $|\zeta| = 1$ и $\zeta \ne 1$ при достаточно малых t оператор $\zeta I - exp(tA)$ ограниченно обратим.

Предложение 4.2.15 *[156] Если для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ имеет место неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\|exp(tA)-I\|<2, \tag{4.9}$$

то C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ аналитична. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, но оно имеет место, например, в случае равномерно выпуклого E и сжимающей C_0-полугруппы.

Предложение 4.2.16 *[22] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ аналитична с углом θ, то $\tilde{E}_\alpha \subseteq D(A^\infty)$ при любом комплексном $\alpha \in \Sigma(\theta)$.*

Предложение 4.2.17 *[22] Пусть $exp(\cdot A)$ - ограниченная аналитическая C_0-полугруппа и $\delta = \pi/2+\psi$ с ψ из предложения 4.2.5. Тогда*

$$exp(tA)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varphi} e^{\lambda z}R(\lambda,A)\,d\lambda, \tag{4.10}$$

где $\Gamma_\varphi=\Gamma_{\varphi+}\cup\Gamma_{\varphi-}$, $\Gamma_{\varphi\pm}=\{\rho e^{\pm i\varphi}:0<\rho<\infty)\}$ при $\pi/2<\varphi<\delta$.

Предложение 4.2.18 *[59] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ аналитична. Тогда*

(i) $\psi(t,x)=O(t^\alpha)$ при $t\to 0+$ и $0<\alpha<1$ тогда и только тогда, когда $\|Aexp(tA)\|x=O(t^{\alpha-1})$ при $t\to 0+$, что в свою очередь имеет место тогда и только тогда, когда $\|A^2exp(tA)x\|=O(t^{\alpha-2})$ при $t\to 0+$;

(ii) если $\psi(t,x)=O(t)$, то $\|Aexp(tA)x\|=O(\log(1/t))$ и $\|A^2exp(tA)x\|=O(\frac{1}{t})$ при $t\to 0+$.

Предложение 4.2.19 *[12] Если A порождает ограниченную аналитическую C_0-полугруппу, то множество целых векторов $\mathfrak{A}_c(A)$ плотно в E.*

Предложение 4.2.20 *[12] Пусть A порождает сжимающую аналитическую C_0-полугруппу $exp(\cdot A)$. Тогда $\mathfrak{A}_c(A)=\cap_{t>0}R(exp(tA))$, для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ существуют обратные операторы, определенные на $\mathfrak{A}_c(A)$, и $[exp(tA)]^{-1}x=\sum_{k=0}^\infty t^k(-A)^k x/k!$ при всех $x\in\mathfrak{A}_c(A)$.*

Предложение 4.2.21 *[65] Пусть $A\in\mathcal{H}(\frac{\pi}{2},0)$ и $B^2=A$. Тогда для любого $\eta>0$ банаховы пространства $D(B,\eta)$ и $D(A,\eta^2)$ совпадают. При этом $EXP(B)=EXP(A)$.*

Глава 5

Фредгольмовы полугруппы

5.1 Фредгольмовы операторы

Для оператора $A \in \mathcal{C}(E)$ размерность ядра или нулевого подпространства $N(A)$ обозначим $nul(A) := dim N(A)$.

Определение 5.1.1 ***Дефект оператора*** *A определим как коразмерность $R(A)$, т.е. $def(A) = dim(E \setminus R(A))$. Если $nul(A)$ или $def(A)$ конечны, то определяют* ***индекс оператора****: $ind(A) := nul(A) - def(A)$.*

Определение 5.1.2 *Оператор $A \in \mathcal{C}(E)$ называется* ***фредгольмовым (нетеровым)****, если $R(A)$ замкнуто и $nul(A)$ и $def(A)$ конечны. Если же только одно из чисел $nul(A)$ и $def(A)$ конечно, то оператор называют* ***полуфредгольмовым****.*

5.2 Полуфредгольмовы полугруппы

Определение 5.2.1 *C_0-полугруппу $exp(\cdot A)$ называют* ***полуфредгольмовой****, если оператор $exp(tA)$ полуфредгольмов при каждом $t \geq 0$.*

Предложение 5.2.1 *[98] Пусть $t_0 > 0$. Справедливы утверждения:*

(i) если $nul(exp(t_0 A)) < \infty$, то $nul(exp(tA)) = 0$ для любого $t \geq 0$;

(ii) если $def(exp(t_0 A)) < \infty$, то $def(exp(tA)) = 0$ для любого $t \geq 0$;

(iii) если оператор $exp(t_0 A)$ фредгольмов, то оператор $exp(tA)$ биективен при любом $t \in \overline{R}_+$;

(iv) если оператор $exp(t_0 A)$ полуфредгольмов, то для всех $t > 0$ оператор $exp(tA)$ полуфредгольмов и $nul(exp(tA)) = nul(exp(t_0 A))$ и $def(exp(tA)) = def(exp(t_0 A))$.

Теорема 5.2.1 *[98] Пусть пространство E рефлексивно. Тогда C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является полуфредгольмовой тогда и только тогда, когда для любых $\mu > \omega(A)$ и $1 \le p < \infty$*

$$\inf_{\|x\|=1} \int_0^\infty e^{-\mu t}\|exp(tA)x\|^p dt + \inf_{\|y^*\|=1} \int_0^\infty e^{-\mu t}\|exp(tA)^* y^*\|^p dt > 0.$$

Предложение 5.2.2 *[98] Дифференцируемая C_0-полугруппа с неограниченным производящим оператором не может быть полуфредгольмовой.*

Предложение 5.2.3 *[98] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ полуфредгольмова и имеет неограниченный производящий оператор, то*

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \|exp(tA) - I\| \ge 2.$$

Определим ***приведенный минимальный модуль*** оператора $A \in L(E)$ как

$$\gamma(A) := \inf\{\|Ax\|/dist(x, N(A)) : \ x \notin N(A)\},$$

где $dist(x, N(A))$ - расстояние от элемента x до ядра $N(A)$.

Предложение 5.2.4 *[16] Область значений оператора $A \in \mathcal{C}(E)$ замкнута тогда и только тогда, когда $\gamma(A) > 0$.*

Предложение 5.2.5 *[98] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ полуфредгольмова, то*

(i) $\sup_{t>0} t^{-1}\ln[\gamma(exp(tA))] = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln[\gamma(exp(tA))] \le \omega(A)$;

(ii) существуют такие константы $\delta > 0$ и α , что

$$\delta e^{\alpha t} \le \gamma(exp(tA)) \le e^{\omega(A)\,t}, \qquad t \ge 0.$$

Предложение 5.2.6 *[98] Пусть оператор $exp(t_0 A)$ полуфредгольмов при некотором $t_0 > 0$ (а, следовательно, и для всех $t \ge 0$ - см. предл.5.2.1). Тогда в полуплоскости*

$$SF(A) := \{z \in C : Rez < \sup_{t>0} t^{-1}\ln[\gamma(exp(tA))]\} \quad \textit{имеем}$$

(i) $\lambda I - A$ является полуфредгольмовым при всех $\lambda \in SF(A)$;
(ii) $nul(\lambda I - A)$ и $def(\lambda I - A)$ постоянны при $\lambda \in SF(A)$, причем

$$nul(\lambda I - A) = 0, \quad \text{если} \quad nul(exp(t_0 A)) < \infty,$$

$$nul(\lambda I - A) > 0, \quad \text{если} \quad nul(exp(t_0 A)) = \infty,$$

$$def(\lambda I - A) = 0, \quad \text{если} \quad def(exp(t_0 A)) < \infty,$$

$$def(\lambda I - A) > 0, \quad \text{если} \quad def(exp(t_0 A)) = \infty;$$

(iii) $|\gamma(\lambda I - A) - \gamma(\lambda_1 I - A)| \leq |\lambda - \lambda_1|$ *при* $\lambda, \lambda_1 \in SF(A)$.

Предложение 5.2.7 *[98] Если* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *полуфредгольмова и резольвента* $R(\lambda, A)$ *компактна при некотором* λ, *то оператор* $exp(tA)$ *биективен при любом* $t \geq 0$.

Предложение 5.2.8 *[98] Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\|exp(tA)x\| \geq e^{\rho t} \cdot \|x\|$ *при всех* $x \in E$ *и* $t \geq 0$;

(ii) $\|(\lambda I - A)x\| \geq (\rho - \lambda)\|x\|$ *при всех* $\lambda < \rho$ *и* $x \in D(A)$;

(iii) для каждого $x \in D(A)$ *с единичной нормой найдется такой элемент* $x^* \in \theta(x)$ *(см. главу 7), что* $Re\langle Ax, x^*\rangle \geq \rho$.

Предложение 5.2.9 *[98] Для* $A \in \mathcal{G}(1,0)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(i) оператор $exp(tA)$ *- изометрия при каждом* $t > 0$;

(ii) $\|(\lambda I - A)x\| \geq -\lambda\|x\|$ *при всех* $\lambda < 0$ *и* $x \in D(A)$;

(iii) для каждого $x \in E$ *найдется* $x^* \in \theta(x)$ *такой, что* $Re\langle Ax, x^*\rangle = 0$.

В случае $E = H$ предложения 5.2.8 и 5.2.9 можно переформулировать, используя ***числовую область значения оператора***

$$W(A) := \{(Ax, x) : \ \|x\| = 1, \ x \in D(A)\}.$$

Предложение 5.2.10 *[98] Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *вкладывается в* C_0*-группу и*

$$\gamma(exp(tA)) \geq e^{\rho t} \quad \text{при} \quad t \geq 0;$$

(ii) $Re[W(A)] \geq \rho$;

(iii) $\|(\lambda I - A)x\| \geq (\rho - \lambda)\|x\|$ *при всех* $\lambda < \rho$ *и* $x \in D(A)$.

При выполнении этих утверждений имеем

$$\lim_{t \to 0} \gamma(exp(tA)) = 1.$$

Глава 6

Спектральные свойства полугрупп

Как известно, спектр производящего оператора C_0-полугруппы лежит в полуплоскости $\{\lambda \in C : \ Re\lambda \le \omega(A)\}$. Это слишком общее утверждение, однако, если нам известны некоторые дополнительные свойства полугруппы, то это моментально позволяет сделать некоторые заключения о более тонкой структуре спектра $\sigma(A)$. Вместе с тем информация о тонкой структуре спектра производящего оператора существенно обогащает интуицию в понимании свойств полугруппы.

6.1 Общие понятия и определения

Для оператора $A \in \mathcal{C}(E)$ обозначим спектр через $\sigma(A)$ и, как обычно, обозначим точечный спектр — $P\sigma(A)$, непрерывный спектр — $C\sigma(A)$ и остаточный спектр — $R\sigma(A)$.

Определение 6.1.1 ***Областью фредгольмовости*** *оператора $A \in \mathcal{C}(A)$ называется множество $\Omega_F(A)$ всех точек $z \in C$, для которых оператор $zI - A$ является фредгольмовым.*

Определение 6.1.2 *Дополнение к $\Omega_F(A)$ в C называется* ***существенным спектром*** *оператора $A \in \mathcal{C}(E)$ и обозначается $E\sigma(A)$.*

Предложение 6.1.1 *[27] Имеет место вложение $E\sigma(A) \subseteq \sigma(A)$ для любого $A \in \mathcal{C}(E)$.*

Определение 6.1.3 *Обозначим через* $EF\sigma(A)$ *множество тех* $z \in C$, *для которых оператор* $(zI - A)$ *не является полуфредгольмовым.*

Определение 6.1.4 *Множество всех точек* $\lambda \in C$, *для которых оператор* $\lambda I - A$ *не является инъективным или* $R(\lambda I - A)$ *незамкнуто в* E, *называется* ***аппроксимативным спектром*** *оператора* $A \in \mathcal{C}(E)$ *и обозначается* $A\sigma(A)$.

Предложение 6.1.2 *[122] Для любого* $A \in \mathcal{C}(E)$ *имеют место соотношения*

$$P\sigma(A) \subseteq A\sigma(A) \quad \text{и} \quad \sigma(A) = A\sigma(A) \cup R\sigma(A).$$

Предложение 6.1.3 *[122] Для любого* $A \in \mathcal{C}(E)$ *имеем*

(i) топологическая граница $\partial\sigma(A)$ *спектра* $\sigma(A)$ *содержится в* $A\sigma(A)$;

(ii) $R\sigma(A) = P\sigma(A^*)$.

Как обычно, для оператора $B \in B(E)$ определим ***спектральный радиус***

$$r(B) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\}, \tag{6.1}$$

а также ***существенный спектральный радиус***

$$Er(B) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in E\sigma(B)\}. \tag{6.2}$$

Определение 6.1.5 ***Мерой некомпактности Куратовского множества*** $\Omega \subset E$ *называется величина*

$\alpha(\Omega) := \inf\Big\{d > 0$: *существует конечное число таких подмножеств* $\{\Omega_j\}_{j=1}^k \subseteq E$, *что* $\Omega \subseteq \cup_{j=1}^k \Omega_j$, $\sup\{\|x - y\| : x, y \in \Omega_i\} \leq d$, $i = \overline{1,k}\Big\}$.

Мера некомпактности пустого множества считается равной нулю.

Подробно о свойствах мер некомпактности см., напр., [26].

Определение 6.1.6 *Пусть* $B \in B(E)$. *Величина*

$$\|B\|_\alpha := \inf\Big\{d > 0 : \alpha(B\Omega) \leq d \cdot \alpha(\Omega) \text{ при любом ограниченном } \Omega \in E\Big\}$$

называется ***мерой некомпактности оператора*** B.

Предложение 6.1.4 *[122] Для любого* $B \in B(E)$ *имеем*

$$Er(B) = \lim_{k\to\infty} \|B^k\|_\alpha^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \|B^k\|_*^{1/k}, \tag{6.3}$$

где $\|B\|_* = \inf\{\|B - K\| : K \in B_0(E)\}$.

6.2 Отображение спектра

Определение 6.2.1 ***Спектральной гранью оператора*** *A называют величину*

$$S(A) := \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}, \tag{6.4}$$

при этом

$$S(A) = -\infty, \quad \text{если} \quad \sigma(A) = \emptyset.$$

Предложение 6.2.1 *[122] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$. Тогда*

$$S(A) \le \omega(A). \tag{6.5}$$

Предложение 6.2.2 *[122] Неравенство (6.5) может быть строгим.*

Предложение 6.2.3 *[122] Равенство $\omega(A) = S(A)$ имеет место, например, в каждом из следующих случаев:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ становится компактной;

(ii) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ становится дифференцируемой;

(iii) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является аналитической.

Предложение 6.2.4 *[122] Для $A \in \mathcal{G}(\mathrm{M}, \omega)$ имеем*

$$r(exp(tA)) = e^{\omega(A)t}, \quad t \ge 0. \tag{6.6}$$

Определение 6.2.2 ***Существенным показателем роста C_0-полугруппы*** *$exp(\cdot A)$ называется величина*

$$E\omega(A) := \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|exp(tA)\|_\alpha = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|exp(tA)\|_\alpha. \tag{6.7}$$

Предложение 6.2.5 *[27] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$. Тогда $E\omega(A) \le \omega(A)$.*

Предложение 6.2.6 *[27] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$. Тогда (ср. с (6.6))*

$$Er(exp(tA)) = e^{E\omega(A)\,t} \quad \textit{при} \quad \textit{всех} \quad t \ge 0. \tag{6.8}$$

Предложение 6.2.7 *[27] Положим*

$$S_1(A) := \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A) \setminus E\sigma(A)\}.$$

Тогда

(i) $\sup\{Re\lambda : \lambda \in E\sigma(A)\} \le E\omega(A)$;

(ii) $\omega(A) = \max\{S(A), E\omega(A)\} = \max\{S_1(A), E\omega(A)\}$.

Предложение 6.2.8 *[37] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$. Если бесконечность — изолированная особая точка резольвенты $R(\lambda, A)$, то она является существенно особой.*

Предложение 6.2.9 *[122] Для любой C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ справедливо включение*

$$exp(t\sigma(A)) \subseteq \sigma(exp(tA)) \quad при \quad t \geq 0, \tag{6.9}$$

называемое теоремой об отображении спектра C_0-полугруппы; здесь $e^{t\Omega} := \{\lambda \in C : \exists z \in \Omega : \lambda = e^{tz}\}$.

Более детально:

(i) $e^{tP\sigma(A)} = P\sigma(exp(tA)) \setminus \{0\}$;
(ii) $e^{tR\sigma(A)} = R\sigma(exp(tA)) \setminus \{0\}$;
(iii) $e^{tA\sigma(A)} \subseteq A\sigma(exp(tA))$;
(iv) $e^{tE\sigma(A)} \subseteq E\sigma(exp(tA))$;
(v) $e^{tEF\sigma(A)} \subseteq EF\sigma(exp(tA))$.

Предложение 6.2.10 *[122] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ равенство*

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(exp(tA)) \setminus \{0\}, \quad t \geq 0, \tag{6.10}$$

справедливо, если, например,

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ становится компактной;
(ii) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ становится дифференцируемой;
(iii) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ аналитическая;
(iv) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ становится равномерно непрерывной.

Предложение 6.2.11 *[122] Если для C_0-группы $exp(\cdot A)$ справедлива оценка $\|exp(tA)\| \leq C(1+t)^k$ при $C > 0$, $k \in N$, и всех $t \in R$, то выполнено более слабое, чем (6.10), соотношение*

$$\sigma(exp(tA)) = \overline{e^{t\sigma(A)}} \qquad для \quad всех \quad t \geq 0, \tag{6.11}$$

называемое иногда слабой теоремой об отображении спектра.

Определение 6.2.3 *Функция $\omega(\cdot)$ называется* ***неквазианалитичной****, если*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \omega(t)}{1+t^2}\, dt < \infty.$$

Определение 6.2.4 *C_0-полугруппа (C_0-группа) $exp(\cdot A)$ называется* ***неквазианалитичной****, если $\|exp(tA)\| \leq \omega(t)$, $t \in \overline{R_+}$, с неквазианалитичной функцией $\omega(\cdot)$ (соответственно, $t \in R$).*

Теорема 6.2.1 *[123] Пусть C_0-группа $exp(\cdot A)$ неквазианалитична. Тогда выполняется слабая теорема об отображении спектра, т.е. имеет место соотношение (6.11).*

Теорема 6.2.2 *[135] C_0-группа $exp(\cdot A)$ с оценкой $\|exp(tA)\| \leq \omega(t)$, $t \in R$, имеет непустой спектр $\sigma(A) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\omega(\cdot)$ является неквазианалитичной.*

Предложение 6.2.12 *[122] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$. Тогда при любом $t \in \overline{R}_+$*

(i) если $\lambda \in C\sigma(A)$ и ни одно из чисел $\lambda_k = \lambda + 2\pi ik/t$, $(k \in Z)$, не принадлежит $P\sigma(A) \cup R\sigma(A)$, то $e^{t\lambda} \in C\sigma(exp(tA))$;

(ii) если $\lambda \in R\sigma(A)$ и ни одно из чисел $\lambda_k, k \in Z$, не принадлежит $P\sigma(A)$, то $e^{t\lambda} \in R\sigma(exp(tA))$;

(iii) если $e^{t\lambda} \in R\sigma(exp(tA))$, то ни одно $\lambda_k, k \in Z$, не принадлежит $P\sigma(A)$ и существует такое $\tilde{k} \in N$, что $\lambda_{\tilde{k}} \in R\sigma(A)$;

(iv) если $\lambda \in P\sigma(A)$, то $\mu := e^{t\lambda} \in \sigma(exp(tA))$. Если же $\mu \in P\sigma(exp(tA))$, то найдется $\tilde{k} \in Z$ такое, что $\lambda_{\tilde{k}} \in P\sigma(A)$ и $N((\mu - exp(tA))^l) = \vee_{k=-\infty}^{\infty} N((\lambda_k I - A)^l)$ при всех целых $l \geq 1$. Здесь $\vee_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$ — наименьшее замкнутое подпространство, содержащее все Ω_k .

Предложение 6.2.13 *[27] Утверждение предложения 6.2.12 (i) не обращается. Точнее, возможно, что $e^{t\lambda} \in C\sigma(exp(tA))$, в то время как $\lambda + 2\pi ik/t \in \rho(A)$, $k \in Z$.*

Предложение 6.2.14 *[122] Пусть $E = H$- гильбертово пространство и $A \in \mathcal{H}(M, \omega)$. Тогда при каждом $t \in \overline{R}_+$ множество $\sigma(exp(tA)) \setminus \{0\}$ равно $\{e^{t\lambda}$: либо $\lambda_k = \lambda + 2\pi ik/t \in \sigma(A)$ при некотором $k \in Z$, либо последовательность $\{\|R(\lambda_k, A)\|\}_{k \in Z}$ неограниченна $\}$.*

Предложение 6.2.15 *[37] Пусть $A \in \mathcal{C}(E)$. Тогда*

(i) $\rho(A) = \rho(A^*)$;
(ii) $P\sigma(A) \subseteq P\sigma(A^*) \cup R\sigma(A^*)$;
(iii) $R\sigma(A) \subseteq P\sigma(A^*) \subseteq P\sigma(A) \cup R\sigma(A)$;
(iv) $C\sigma(A) \subseteq R\sigma(A^*) \cup C\sigma(A^*)$.

Предложение 6.2.16 *[122] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ имеем:*

(i) $\sigma(exp(tA)) = \sigma(exp(tA)^{\odot}) = \sigma(exp(tA)^*)$ *при любом* $t \in \overline{R}_+$;
(ii) $R\sigma(exp(tA)) = P\sigma(exp(tA)^{\odot}) = P\sigma(exp(tA)^*)$ *при любом* $t \in \overline{R}_+$;
(iii) $\sigma(A) = \sigma(A^{\odot}) = \sigma(A^*)$;
(iv) $R\sigma(A) = P\sigma(A^{\odot}) = P\sigma(A^*)$;
(v) $S(A) = S(A^{\odot})$ *и* $\omega(A) = \omega(A^{\odot})$.

Глава 7

Равномерно ограниченные полугруппы

Хорошо известно, что замена генератора A C_0-полугруппы, удовлетворяющей оценке $\|exp(tA)\| \leq Me^{\omega t}$, на $A + \alpha I$ приводит к полугруппе, удовлетворяющей оценке

$$\|exp(t(A + \alpha I))\| \leq Me^{(\omega+\alpha)t}, \quad t \geq 0.$$

Отсюда следует, что любую C_0-полугруппу можно трансформировать в ограниченную. Тем не менее, изучение равномерно ограниченных C_0-полугрупп имеет самостоятельный интерес особенно в связи с асимптотическим поведением (см. напр. [157]), а также в связи с вопросами суммируемости. Обратим также внимание на тот факт, что только расположение спектра не определяет в бесконечномерном случае поведения полугруппы на бесконечности.

7.1 Равномерно ограниченные полугруппы

Для каждого элемента $y \in E$ определим ***сопряженное множество***

$$\theta(y) := \{y^* \in E^* : \ \|y\|^2 = \|y^*\|^2 = \langle y, y^* \rangle\}. \tag{7.1}$$

Предложение 7.1.1 *[115] Множество $\theta(y)$ непусто при любом $y \in E$, выпукло, замкнуто и $\theta(0) = \{0\}$.*

Рассмотрим отображение $\varphi : E \to E^*$ такое, что $\varphi(y) \in \theta(y)$ при любом $y \in E$. Такое отображение φ называется ***двойственным (дуальным) отображением.*** Фиксируем некоторое φ и положим $[x, y] := \langle x, \varphi(y) \rangle$ для любых $x, y \in E$. Функция $[x, y]$, действующая из $E \times E$ в R или C , называется ***полускалярным произведением*** в банаховом пространстве E.

Предложение 7.1.2 *[128] Пусть E сильно выпукло, а сжимающая C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ и $\|x\| = 1$ таковы, что $\lim_{t\to\infty} |\langle exp(tA)x, \varphi(x)\rangle| = 1$. Тогда x является собственным вектором оператора A, соответствующим чисто мнимому собственному значению.*

Предложение 7.1.3 *[115] Полускалярное произведение обладает свойствами:*

$$[x+y,z] = [x,z] + [y,z], \quad [\lambda x, y] = \lambda[x,y],$$
$$[x,x] = \|x\|^2, \quad |[x,y]| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{для любых } \lambda \text{ и } \quad x,y,z \in E.$$

Определение 7.1.1 *Оператор $A \in L(E)$ называется* ***диссипативным*** *(по отношению к полускалярному произведению $[x,y]$), если*

$$Re[Ax,x] \leq 0 \quad \text{при всех} \quad x \in D(A). \tag{7.2}$$

Если в определении 7.1.1 знак $\leq$ заменить на $\geq$, то говорят, что A ***аккретивен****.*

Определение 7.1.2 ***Числовой областью значений оператора*** *A называют множество (ср. с гильбертовым случаем - стр. 55)*

$$W(A) := \{[Ax,x]: \ x \in D(A), \ \|x\| = 1\}. \tag{7.3}$$

Положим также $\Theta(A) := \sup\{Re\lambda : \ \lambda \in W(A)\}$.

Предложение 7.1.4 *[115] Пусть $B \in B(E)$. Тогда*
$\Theta(B) = \lim_{t\to 0+} t^{-1}(\|I + tB\| - 1)$ и, более того, $\Theta(B) = \omega(B)$.

Предложение 7.1.5 *[16] Если оператор $B \in B(E)$ является диссипативным, то резольвента $R(\lambda, B)$ существует при любом λ таком, что $Re\lambda > 0$.*

Определение 7.1.3 *Диссипативный оператор A называется $m-$* ***диссипативным (максимальным диссипативным)****, если $\rho(A) \cap R_+ \neq \emptyset$. Оператор $-A$ называется m-****аккретивным****, если A m-диссипативен.*

Напомним, что любую C_0-полугруппу путем сдвига производящего оператора можно сделать ограниченной.

Теорема 7.1.1 *[115] Оператор A порождает сжимающую полугруппу тогда и только тогда, когда $\overline{D(A)} = E$ и A является m -диссипативным.*

Предложение 7.1.6 *[115] Оператор A диссипативен тогда и только тогда, когда при любом $\alpha > 0$ оператор $I - \alpha A$ инъективен и $\|(I-\alpha A)^{-1}\| \leq 1$.*

Предложение 7.1.7 *[122] Пусть A - диссипативный оператор. Тогда*

(i) если A замыкаем, то замыкание $\overline{A}$ также диссипативно;

(ii) если $\overline{D(A)} \supseteq R(A)$, в частности, если A плотно определен, то оператор A замыкаем;

(iii) оператор A m-диссипативен тогда и только тогда, когда $R(I - hA) = E$ при всех $h > 0$.

Определение 7.1.4 *Оператор A называют T-**аккретивным** на банаховой структуре, если он удовлетворяет условию*

$$\|\Big((I - \lambda A)^{-1}x - (I - \lambda A)^{-1}y\Big)^+\| \leq \|(x-y)^+\| \tag{7.4}$$

при $\lambda > 0$ и $x, y \in E$.

Предложение 7.1.8 *[60] Любой T-аккретивный оператор в банаховой структуре E является аккретивным тогда и только тогда, когда $dimE$ меньше 3 или норма является p-аддитивной при $p \geq 0$, т.е. $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p \quad (p < \infty)$ или $\|x+y\| = \max(\|x\|, \|y\|) \quad (p = \infty)$.*

Предложение 7.1.9 *[93] Пусть оператор $A \in \mathcal{GR}(1,0)$. Тогда*

$$Re\langle Ax, y\rangle = 0 \quad \text{при всех} \quad x \in D(A) \quad \text{и} \quad y \in \theta(x), \tag{7.5}$$

и равенство

$$(\lambda I - A)D(A) = E \tag{7.6}$$

выполняется при всех $\lambda \in R \setminus \{0\}$.

Предложение 7.1.10 *[93] Если A плотно определен и выполняются соотношения (7.5) и (7.6) при $\lambda_0 > 0$ и $\lambda_1 < 0$, то $A \in \mathcal{GR}(1,0)$.*

Предложение 7.1.11 *[122] C_0-группа сжатий $\|exp(\cdot A)\| \leq 1$ является изометрией, т.е. $\|exp(tA)x\| = \|x\|$ при любых $x \in E,\ t \in R$.*

Определение 7.1.5 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется **унитарной**, если оператор $exp(tA)$ унитарен при любом $t > 0$.*

Теорема 7.1.2 *(Теорема Стоуна). Оператор A в гильбертовом пространстве H является производящим оператором унитарной C_0-группы операторов тогда и только тогда, когда он имеет вид $A = iA_1$, где A_1 - самосопряжен в H. Эта C_0-группа обычно записывается как $exp(itA_1)$, $t \in R$.*

Предложение 7.1.12 *Пусть $exp(\cdot A)$ — равномерно ограниченная C_0-группа в H. Тогда существуют самосопряженный ограниченно обратимый оператор $Q \in B(H)$ и такие константы $C, c \in R$, что $c\|x\|^2 \leq (Qx, x) \leq C\|x\|^2$ при любом $x \in E$, и оператор-функция $Qexp(\cdot A)Q^{-1}$ является унитарной группой с производящим оператором QAQ^{-1} .*

Определение 7.1.6 *Оператор A* ***эквивалентен m-аккретивному****, если существует эквивалентная норма, в которой он m-аккретивен.*

Предложение 7.1.13 *[78] Пусть операторы A и A^2 оба эквивалентны m-аккретивным. Тогда $-A$ порождает равномерно ограниченную аналитическую C_0-полугруппу с углом $\pi/4$. Оператор $-A^2$ порождает аналитическую C_0-полугруппу с углом θ тогда и только тогда, когда $-A$ порождает равномерно ограниченную аналитическую C_0-полугруппу с углом $\pi/4+\theta/2 \quad (0 < \theta < \pi/2)$.*

Предложение 7.1.14 *[78] Пусть оператор A^{2^k} является эквивалентным m-аккретивному при $k = \overline{0, n}$. Тогда A порождает равномерно ограниченную аналитическую C_0-полугруппу с углом $\pi(1-2^{-n})/2$.*

Определение 7.1.7 *Оператор A называется* ***тотально аккретивным****, если для каждого натурального $n \in N$ оператор A^n является аккретивным. Аналогично определяется* ***тотальная m-аккретивность****.*

Предложение 7.1.15 *[78] Следующие условия эквивалентны:*

(i) оператор A эквивалентен тотально m-аккретивному;

(ii) оператор $-A$ порождает аналитическую C_0-полугруппу с углом $\pi/2$;

(iii) для всех $n \in N$ оператор $-A^n$ порождает аналитическую C_0-полугруппу с углом $\pi/2$.

Предложение 7.1.16 *[78] В гильбертовом пространстве H следующие условия эквивалентны:*

(i) оператор A m-аккретивен и тотально аккретивен;

(ii) оператор A тотально m-аккретивен;

(iii) оператор A самосопряжен и положителен.

Предложение 7.1.17 *[78] Если оператор A m-аккретивен в гильбертовом пространстве H, то существует только один m-аккретивный B такой, что $B^2 = A$. Если $W(A)$ лежит в $\Sigma(\theta)$, то $\sigma(B)$ и $W(B)$ содержатся в $\Sigma(\theta/2)$.*

Предложение 7.1.18 *[29], [16] Пусть полугруппы $exp(\cdot A), exp(\cdot B)$, $exp\Big(\cdot(\overline{A+B})\Big) \in \mathcal{G}(1,0)$. Тогда*

$$exp\Big(t(A+B)\Big)x = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\Big(exp(\frac{t}{k}A)exp(\frac{t}{k}B)\Big)^k x$$

для каждого $x \in E$ и равномерно по t из любого компакта в $\overline{R}_+$.

Предложение 7.1.19 *[8] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,0)$, $x_1 \in N(A)$, $x_2 \in R(A)$. Тогда*

$$\frac{1}{t}\int_0^t exp(sA)(x_1+x_2)\,ds = x_1 + O(1/t) \quad при \quad t\to\infty.$$

Предложение 7.1.20 *[8] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,0)$ и E рефлексивно. Тогда $E = N(A)\oplus\overline{R(A)}$, $N(A)\cap R(A) = \{0\}$ и проектор $P(0): E\to N(A)$ вдоль $R(A)$ имеет норму $\|P(0)\| \le M$. Более того, любой $x \in E$ представим в виде*

$$x = P(0)x + (I - P(0))x \in N(A)\oplus\overline{R(A)}$$

и

$$s\text{-}\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t exp(sA)x\,ds = P(0)x. \tag{7.7}$$

Предложение 7.1.21 *[8] Для $A \in \mathcal{G}(M,0)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $E = N(A)\oplus\overline{R(A)}$;

(ii) $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t exp(sA)xds$ *существует для каждого $x \in E$;*

(iii) $\lim_{\lambda\to 0+}\lambda R(\lambda,A)x$ *существует для каждого $x\in E$;*

(iv) $\lim_{\lambda\to 0+} R(\lambda,A)x$ *существует для каждого $x \in R(A)$.*

Предложение 7.1.22 *[8] (Мультипликативная формула Чернова) Пусть семейство сжатий $\{\mathcal{V}(t),\, t\ge 0\}$ на E обладает свойствами $\mathcal{V}(0) = I$, $\mathcal{V}'(0)x$ существует для всех $x \in \mathcal{B}\subseteq E$ и замыкание A сужения $\mathcal{V}'(0)|_{\mathcal{B}}$ порождает сжимающую C_0-полугруппу. Тогда для каждого $x\in E$ имеет место равенство*

$$exp(tA)x = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\mathcal{V}(t/k)^k x$$

равномерно по t из любого компакта в $\overline{R}_+$.

Предложение 7.1.23 *[133] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,0)$ и существует $\delta > 0$ такое, что $\|exp(hA) - I\| < 2$ при всех $h \in (0,\delta)$. Тогда при каждом $\zeta \in (0,\delta)$ и $x \in E$ имеем*

$$s\text{-}\lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t exp(sA)x\,ds = s\text{-}\lim_{k\to\infty} k^{-1} \sum_{j=0}^{k} exp(j\zeta A)x$$

в случае существования одного из пределов.

Предложение 7.1.24 *[127] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,0)$. Тогда*

$$\|Ax\| \le 4M^2\|x\| \cdot \|A^2x\|, \quad x \in D(A^2). \tag{7.8}$$

Предложение 7.1.25 *[8] Пусть в условиях предложения 7.1.24 пространство $E = H$ - гильбертово и $M = 1$. Тогда для каждого $x \in D(A^2)$ имеем*

$$\|Ax\| \le 2\|x\| \cdot \|A^2x\|, \quad x \in D(A^2). \tag{7.9}$$

причем неравенство переходит в равенство тогда и только тогда, когда $A^2x + \lambda Ax + \lambda^2 x = 0$ и $Re\langle A^2x, x\rangle = 0$ при некотором $\lambda \ge 0$. Если A порождает C_0-группу, то константа 2 в (7.9) становится равной 1. Это неравенство относится к серии неравенств моментов (см. [22]).

Определение 7.1.8 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется* ***слабо (сильно, равномерно) (C,α) эргодической на бесконечности****, если оператор $CH(t,\alpha)x \ := \alpha t^{-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} exp(sA)x\,ds$ существует при всех $t > 0$; $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\|CH(t,\alpha)x\|dt \ < \infty$ при всех $x \in E$ и $\lambda > \max(0,\omega(A))$ и если предел $(C,\alpha)\text{-}\lim exp(tA) := \lim_{t\to\infty} CH(t,\alpha)$ существует в слабой (сильной, равномерной) операторной топологии. Это так называемый* ***предел по Чезаро****.*

Определение 7.1.9 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется* ***слабо (сильно, равномерно) эргодической на бесконечности в смысле Абеля*** *, если предел*

$$(A)\text{-}\lim_{t\to\infty} exp(tA) := \lim_{\lambda\to 0+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} exp(tA)dt \equiv \lim_{\lambda\to 0+} \lambda R(\lambda, A) \tag{7.10}$$

существует в соответствующей операторной топологии.

Полагая $t \to 0+$ вместо $t \to \infty$ или $\lambda \to \infty$ вместо $\lambda \to 0+$, получим определения эргодичности в нуле.

Теорема 7.1.3 *[37] Если при фиксированном $\alpha \geq 0$ существует предел $(C,\alpha)\text{-}\lim_{t\to\infty} x(t) = y$, то при $\beta \geq \alpha$ существует предел $(C,\beta)\text{-}\lim_{t\to\infty} x(t) = A\text{-}\lim_{t\to\infty} x(t) = y$.*

Предложение 7.1.26 *[37] Полугруппа $exp(\cdot \mathrm{A})$ слабо эргодична в смысле Абеля в нуле (бесконечности) тогда и только тогда, когда она сильно эргодична в смысле Абеля в нуле (бесконечности).*

Предложение 7.1.27 *[37] Если полугруппа $exp(\cdot A)$ при $\alpha \geq 0$ слабо (C,α)-эргодична в нуле, то она сильно (C,α)-эргодична в нуле.*

Предложение 7.1.28 *[37] Пусть полугруппа $exp(\cdot A)$ сильно эргодична по Абелю на бесконечности и $(A)\text{-}\lim_{t\to\infty} exp(tA)x := Px$ при любом $x \in E$. Тогда*

(i) оператор P — проектор, т.е. $P = P^2$;

(ii) $Pexp(tA) = exp(tA)P$ при всех $t \geq 0$;

(iii) $PAx = 0$ при всех $x \in D(A)$ и $APx = 0$ при всех $x \in E$;

(iv) $R(P) = N(A)$;

(v) $E = R(P) \oplus N(P), \quad R(P) \cap N(P) = \{0\}, \quad E = N(A) \oplus \overline{R(A)}$.

Предложение 7.1.29 *[37] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ с $\omega(A) \leq 0$ следующие условия равносильны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ сильно эргодична по Абелю на бесконечности;

(ii) при каждом $x \in E$ множество $\{\lambda R(\lambda, A)x\}_{0<\lambda<\lambda_0}$ относительно секвенциально слабо компактно;

(iii) $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M$ при $0 < \lambda < \lambda_0$ и $E = N(A) \oplus \overline{R(A)}$.

Предложение 7.1.30 *[37] Пусть $u\text{-}(A)\text{-}\lim exp(tA) := Q$. Тогда $exp(tA) = Qexp(tB)$, $t \geq 0$, где $Q = Q^2$, $B \in B(E)$* и *$AQ = QA = A$. Кроме того, $u\text{-}\lim exp(tA) = Q$.*

Предложение 7.1.31 *[37] Для полугруппы $exp(\cdot A)$ с $\omega(A) \leq 0$ следующие условия эквивалентны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ равномерно эргодична по Абелю на бесконечности, причем $u\text{-}(A)\text{-}\lim_{t\to\infty} exp(tA) = P$, где $P^2 = P \in B(E)$;

(ii) точка $\lambda = 0$ является простым полюсом резольвенты и вычет $R(\lambda, A)$ относительно нуля есть P;

(iii) $s\text{-}\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^2 R(\lambda, A) = 0$ и $E = R(A) \oplus N(A)$, причем подпространства замкнуты;

(iv) $s\text{-}\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^2 R(\lambda, A) = 0$ и $R(A^2)$— замкнуто.

Предложение 7.1.32 *[37] Если $\omega(A) \leq 0$ и C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ равномерно эргодична по Абелю на бесконечности, то $R(A^k) = R(A)$ при $k \in N$.*

Предложение 7.1.33 *[114] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, 0)$ и E - пространство Гротендика со свойством Данфорда-Петтиса. Если пространство $E/\tilde{E}_0$ сепарабельно, то существуют операторы $B, P \in B(E)$ такие, что $I - P$ - проектор конечного ранга, $PB = BP$ и $exp(tA) = Pexp(tB), \quad t \geq 0$.*

7.2 Устойчивые полугруппы

Известен классический пример C_0-полугруппы (см. [37]) , когда $\sigma(A) = \emptyset$ и $\|exp(tA)\| = e^{(\pi t/2)}, \ t \in \overline{R}_+$. Более того (см. [166]), даже в случае гильбертова пространства $E = H$ для любых вещественных чисел $a < b$ найдется такая C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$, что $S(A) = a$ и $\|exp(tA)\| = e^{bt}, \ t \geq 0$.

Эти примеры говорят о существенном отличии бесконечномерного случая от конечномерного, когда, скажем, в качестве оператора A выступает матрица.

Определение 7.2.1 *Положим $\omega(x, A) := \inf\{\omega \in R : \|exp(tA)x\| \leq Me^{\omega t}$ при некотором* M *и $t \geq 0$ }* - ***граница экспоненциального роста*** *функции $exp(\cdot A)x$.*

Определение 7.2.2 *Число*

$$\omega_1(A) := \sup\{\omega(x, A) : x \in \ D(A)\} \tag{7.11}$$

- называется ***границей экспоненциального роста решения*** *задачи Коши первого порядка (1.4).*

Очевидно, что $\omega(A) = \sup\{\omega(x, A) : \ x \in E\}$.

Предложение 7.2.1 *[122] Для любого $x \in E$ и любой C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ имеем*

$$\omega(x, A) = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \ln \|exp(tA)x\|,$$

$$\omega(x, A) = \inf\{Re\lambda : \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|exp(tA)x\| \, dt \quad \textit{существует}\},$$

$$\omega_1(A) = \inf\left\{Re\lambda : \int_0^\infty e^{-\lambda t} exp(tA)x \, dt \quad \textit{существует}\right.$$

$$\text{как несобственный интеграл для любого } x \in E\Big\} =$$
$$= \inf\Big\{Re\lambda : \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|exp(tA)x\|\,dt \text{ существует для любого } x \in D(A)\Big\}.$$

Если $N(A) = \{0\}$, *то при* $x \in D(A)$ *имеем*

$\omega(x, A) = \inf\{Re\lambda : \int_0^\infty e^{-\lambda t} exp(tA)Ax\,dt$ *существует как несобственный интеграл*$\}$.

Предложение 7.2.2 *[122] Очевидно, что* $S(A) \leq \omega_1(A) \leq \omega(A)$ *, причем есть примеры, когда оба неравенства одновременно строгие.*

Определение 7.2.3 C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *называется*

a) ***устойчивой***, *если* $\|exp(tA)x\| \to 0$ *при* $t \to \infty$ *для любого* $x \in D(A)$ *;*
b) ***равномерно устойчивой***, *если a) выполняется при любом* $x \in E$*;*
c) ***экспоненциально устойчивой***, *если* $\omega_1(A) < 0$*;*
d) ***равномерно экспоненциально устойчивой***, *если* $\omega(A) < 0$.

Предложение 7.2.3 *[122] Пусть* $A \in B(E)$ *и* $S(A) < 0$. *Тогда* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *равномерно экспоненциально устойчива. В случае неограниченного оператора* A *это, вообще говоря, неверно.*

Предложение 7.2.4 *[122] Следующие утверждения эквивалентны:*
(i) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *устойчива ;*

(ii) $N(A) = \{0\}$ *и интеграл* $\int_0^\infty exp(tA)x\,dt$ *существует для всех* $x \in D(A)$.

Предложение 7.2.5 *[122] Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *устойчива и* $A \in \mathcal{G}(M, 0)$*;*

(ii) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *равномерно устойчива;*

(iii) $A \in \mathcal{G}(M, 0)$ *и существует такое плотное в* E *подмножество* $\tilde{D} \subset E$, *что интеграл* $\int_0^\infty exp(tA)x\,dt$ *существует для любого* $x \in \tilde{D}$.

Обозначим $b(x) := \inf\{Re\lambda : \int_0^\infty e^{-\lambda t} exp(tA)x\,dt$ существует $\}$.

Предложение 7.2.6 *[125] Пусть задана* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *и* $x \in D(A)$. *Тогда*

(i) $\omega(x, A) = \max(b(x), b(Ax))$*;*

(ii) если $b(Ax) \geq 0$, *то* $0 \leq \omega(x, A) \leq b(Ax) =$
$\inf\{\omega \in R : \|exp(tA)x - x\| \leq Me^{\omega t}$ *при некотором* M *и всех* $t \geq 0\}$;

(iii) если $N(A) = \{0\}$, *то* $\omega(x, A) = b(Ax)$;

(iv) если $b(Ax) < 0$, *то*
$b(Ax) = \inf\{\omega \in R : \|exp(tA)x - y\| \leq Me^{\omega t}$ *при некотором* M *и* $t \geq 0\}$,
где $y \in N(A)$.
Более того, если $N(A) = \{0\}$, *то* $\omega(x, A) < 0$.

Определение 7.2.4 *Введем обозначения* $(x \in E)$:

$\gamma(x, A) := \inf\Big\{a \in R :$ *функция* $\lambda \to R(\lambda, A)x$ *имеет голоморфное продолжение в полуплоскость* $\{\lambda \in C : Re\lambda \geq a\}\Big\}$,

$\gamma_0(x, A) := \inf\Big\{a \in R : a > \gamma(x, A)$ *и функция* $R(\lambda, A)x$ *ограничена в полуплоскости* $\{\lambda \in C : Re\lambda \geq a\}\Big\}$,

$\gamma_1(x, A) := \inf\Big\{a \in R : a > \gamma(x, A)$ *и функция* $R(\lambda, A)x$ *сходится к нулю равномерно по* $Re\lambda$ *при* $|Im\lambda| \to \infty$ *во всей полуплоскости* $\{\lambda \in C : Re\lambda \geq a + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0\Big\}$.

Предложение 7.2.7 *[125] Для любого* $x \in E$ *имеем* $\gamma(x, A) \leq \gamma_0(x, A) \leq \gamma_1(x, A) \leq \omega(A)$. *Если же* $x \in D(A^2)$, *то*

$$\gamma_1(x, A) \leq \omega(x, A) \leq \max\{\gamma(x, A), \gamma_0(A^2x, A)\}.$$

Предложение 7.2.8 *[125] Пусть задана позитивная равномерно ограниченная* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *в пространстве* E *с нормальным воспроизводящим конусом. Если* $\lim_{\lambda \to 0+} R(\lambda, A)x$ *существует при всех* $x \in D(A)$, *то* C_0*-полугруппа равномерно устойчива.*

Предложение 7.2.9 *[122] Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) тип полугруппы $\omega(A) < 0$;

(ii) $\lim_{t\to\infty} \|exp(tA)\| = 0$;

(iii) при некотором $t_0 > 0$ *имеем* $\|exp(t_0A)\| < 1$;

(iv) $S(A) < 0$ *и существует* t_0 *такое, что* $A\sigma(exp(t_0A))$ *лежит внутри единичного круга;*

(v) для любого (некоторого) $p \geq 1$ *существует* $\int_0^\infty \|exp(tA)x\|^p\, dt$ *при любом* $x \in E$.

Предложение 7.2.10 *[122] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ устойчива. Тогда*

(i) $S(A) \le 0$ и $Re\lambda < 0$ при любом $\lambda \in P\sigma(A) \cup R\sigma(A)$;

(ii) предел $\lim_{\lambda \to 0+} \lambda R(\lambda, A)x$ существует для любого $x \in D(A)$.

Предложение 7.2.11 *[122] Пусть $exp(\cdot A)$ - равномерно ограниченная аналитическая C_0-полугруппа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $0 \notin P\sigma(A) \cup R\sigma(A)$;

(ii) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ равномерно устойчива.

Предложение 7.2.12 *[140] Пусть $S(A) \le -\delta < 0$. Тогда*

(i) если $\|R(\lambda, A)\| = O(|\lambda|^k)$ при $|Im\lambda| \to \infty$ и $Re\lambda \ge -\delta$, и $k \ge -2$, то найдутся такие $0 < \mu < \delta$ и $g(\mu) > 0$, что $\|A^{-(k+2)}exp(tA)x\| \le g(\mu)e^{-\mu t}\|x\|$ при любых $x \in E,\ t \ge 0$;

(ii) если (i) выполняется при $k \ge -1$, то найдется $\mu \in (0, \delta)$ такое, что

$$\int_0^\infty |e^{\mu t}\langle A^{-(k+1)}exp(tA)x, x^*\rangle|^2\, dt \le K(\mu, x, x^*)$$

при всех $x \in E,\ \ x^* \in E^*$.

Предложение 7.2.13 *[122] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна и $D(A)^- := -D(A)^+$. Тогда неравенство $\omega_1(A) < 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $E^+ \subseteq AD(A)^-$.*

Предложение 7.2.14 *[122] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна и ограничена. Если тотальное в E подмножество $F \subset E^+$ таково, что $\lim_{\lambda \to 0+} R(\lambda, A)x$ существует при всех $x \in F$, то C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ равномерно устойчива.*

Предложение 7.2.15 *[45] Пусть E рефлексивно, $A \in \mathcal{G}(M, 0)$, $P\sigma(A) \cap iR = \emptyset$ и множество $\sigma(A) \cap iR$ счетно. Тогда C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является равномерно устойчивой.*

Предложение 7.2.16 *[45] Есть примеры, когда C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ равномерно устойчива, $P\sigma(A) \cap iR = \emptyset$, но $\sigma(A) \cap iR \ne \emptyset$.*

Предложение 7.2.17 *[45] Имеется пример C_0-полугруппы, не являющейся равномерно устойчивой в рефлексивном E, такой, что $P\sigma(A) = \emptyset$ и $\sigma(A) \subseteq iR$.*

Предложение 7.2.18 *[45] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,0)$, $R\sigma(A) \cap iR = \emptyset$ и множество $\sigma(A) \cap iR$ счетно. Тогда C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ равномерно устойчива.*

Предложение 7.2.19 *[45] Утверждение предложения 7.2.18 точное в следующем смысле:*

(i) существует унитарная C_0-группа $exp(\cdot A)$ такая, что $\sigma(A) \subseteq iR$, $R\sigma(A) = \emptyset$ и в то же время эта группа неустойчива; точнее, в этой ситуации условие $exp(tA)x \to 0$ при $t \to \infty$ влечет $x = 0$;

(ii) существует C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ такая, что $\omega(A) = 0$ и $Re\lambda < 0$ при $\lambda \in \sigma(A)$, однако C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ не является равномерно устойчивой;

(iii) пусть $E = C[0,\infty)$ и $(exp(tA)f)(s) = f(t+s)$. Тогда $\sigma(A) = \{\lambda \in C : Re\lambda \leq 0\}$ и C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ равномерно устойчива.

Предложение 7.2.20 *[45] Пусть E рефлексивно, $A \in \mathcal{G}(M,0)$ и множество $\sigma(A) \cap iR$ счетно. Тогда E есть прямая сумма инвариантных подпространств E_{st} и E_{ap} ($E = E_{st} \oplus E_{ap}$), где*

$E_{st} := \{x \in E : \lim_{t\to\infty} exp(tA)x = 0\}$,

$E_{ap} := span\{x \in D(A) : Ax = \lambda x, \lambda \in iR\}$.

Более того, сужение C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ на E_{ap} может быть вложено в группу на E_{ap}.

Предложение 7.2.21 *[140] Пусть $S(A) \leq -\delta < 0$ и C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ становится дифференцируемой. Тогда найдутся такие константы $\mu \in (-\delta, 0)$, $K = K(\mu)$, что $\|exp(tA)\| \leq Ke^{\mu t}$ при $t \geq 0$.*

Предложение 7.2.22 *[45] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ становится непрерывной по норме. Если $Re\lambda < 0$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$, то C_0-полугруппа равномерно устойчива.*

Предложение 7.2.23 *[122] Пусть позитивная C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ равномерно ограничена и становится непрерывной по норме. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ равномерно устойчива;

(ii) $0 \notin R\sigma(A)$, т.е. $N(A^*) = \{0\}$.

В случае, когда E рефлексивно, условия (i) и (ii) эквивалентны следующему:

(iii) $0 \notin P\sigma(A)$, т.е. $N(A) = \{0\}$.

Предложение 7.2.24 *[45] Если в предложении 7.2.18 условие ограниченности $A \in \mathcal{G}(M,0)$ заменить на предположения: $S(A) \leq 0$ и $\sup_{t\geq 0} \|exp(tA)B\|$*

$< \infty$, *где* $B \in B(E)$— *оператор, коммутирующий с* C_0*-полугруппой* $exp(\cdot A)$, *то констатирующая часть заменится на* $\lim_{t\to\infty} \|exp(tA)Bx\| = 0$ *для любого* $x \in E$.

Предложение 7.2.25 *[45] Пусть* $Re\lambda < 0$ *для всех* $\lambda \in \sigma(A)$ *и* $\sup_{t\geq 0} \|exp(tA)Ax\| < \infty$ *при некотором* $x \in D(A)$. *Тогда* $\lim_{t\to\infty} \|exp(tA)x\| = 0$, *т.е.* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *устойчива.*

Предложение 7.2.26 *[117] Пусть* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *равномерно ограничена, множество* $\sigma(A) \cap iR$ *счетно и сопряженный оператор* A^* *таков, что* $P\sigma(A^*) \cap iR = \emptyset$. *Тогда* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *равномерно устойчива.*

Предложение 7.2.27 *[117] Пусть* $exp(\cdot A)$ *— равномерно ограниченная* C_0*-группа и* $\sigma(A) \cap iR = \emptyset$. *Тогда она является равномерно устойчивой.*

Пусть $A \in \mathcal{C}(E)$, $m \in N \cup \{0\}$. Положим для $\lambda \in \rho(A)$

$$\omega_m(A) := \inf\{\omega \in R : \sup_{t\geq 0} \|e^{-\omega t} exp(tA)R(\lambda, A)^m\| < \infty\}$$

и

$$\Xi_m(A) := \inf\{s > \omega(A) : \|R(a+ib, A)\| = O(|b|^m) \text{ при } b \to \infty \text{ и } a \geq s\}.$$

Отметим, что $\omega_0(A)$ совпадает с типом C_0-полугруппы $\omega(A)$.

Предложение 7.2.28 *[141], [159] Пусть* $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$. *Тогда при любом* $m \in N \cup \{0\}$ *(см. предложение 7.2.12)*

(i) $\omega_{m+2}(A) \leq \Xi_m(A)$;

(ii) если $E = H$*- гильбертово, то* $\omega_m(A) \leq \Xi_m(A)$;

(iii) соотношение $\omega_{m+1}(A) \leq \Xi_m(A)$ *выполнено, в частности, если в качестве пространства* E *взять пространства Лебега, Бесова, Соболева.*

Предложение 7.2.29 *[141] Построены примеры, когда*

(i) $\omega_{m+1}(A) < \omega_m(A)$ *и* $S(A) < \Xi_m(A)$, $m \in N \cup \{0\}$;

(ii) E *равномерно выпукло и* $\omega_1(A) < \Xi_0(A) < \omega_0(A)$.

Определение 7.2.5 C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *в гильбертовом пространстве* H *называется* ***слабо*** L^p ***устойчивой***, *если при любых* $x, y \in H$ *выполняется условие*

$$\int_0^\infty |(exp(tA)x, y)|^p \, dt < \infty.$$

Предложение 7.2.30 *[161] Слабая L^p устойчивость C_0-полугруппы при некотором $p \in [1, \infty)$ влечет слабую устойчивость C_0-полугруппы при любом $p \in [1, \infty)$.*

Предложение 7.2.31 *[161] C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$, заданная на H, слабо L^p устойчива при некотором $p \in [1, \infty)$ тогда и только тогда, когда она равномерно экспоненциально устойчива.*

Предложение 7.2.32 *[162] Слабая L^p устойчивость, вообще говоря, не влечет равномерной экспоненциальной устойчивости.*

Предложение 7.2.33 *[122] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна. Тогда, если*

(i) оператор $(\lambda I - A)$ обратим при любом $\lambda \geq 0$,

либо

(ii) оператор A обратим и $A^{-1} \preceq 0$,

то C_0-полугруппа экспоненциально устойчива.

Определение 7.2.6 *Определим множество функций комплексной переменной со значениями в E*

$H^\infty := \{f(z) : f(\cdot) : z \to E$ *- ограничена и аналитична при* $Re z > 0\}$.

Предложение 7.2.34 *[161] Пусть $E = H$ – гильбертово пространство, и $R(z, A) \in H^\infty$. Тогда C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ равномерно экспоненциально устойчива.*

Предложение 7.2.35 *[122] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна, равномерно ограничена, квазикомпактна и $S(A) = 0$. Тогда существуют положительный проектор P конечного ранга и константы $\delta > 0$ и $M \geq 1$ такие, что $\|exp(tA) - P\| \leq Me^{-\delta t}$ при всех $t \geq 0$.*

Предложение 7.2.36 *[122] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна, равномерно ограничена и становится непрерывной по норме, а пространство E рефлексивно. Тогда при любом $x \in E$ существует предел $\hat{P}x = s\text{-}\lim_{t\to\infty} exp(tA)x$, где $\hat{P}$ - положительный проектор на $N(A)$.*

Предложение 7.2.37 *[122] Пусть в условиях и обозначениях 7.2.35 дополнительно p – порядок полюса $\lambda_0 = S(A)$ резольвенты $R(\lambda, A)$. Пусть $P(\lambda_0)$– проектор на $N((\lambda_0 I - A)^p)$ вдоль $R((\lambda_0 I - A)^p)$. Тогда*

(i) для любого $\eta \in (0, \varepsilon)$ существует константа $M(\eta)$ такая, что
$\|exp(tA)(I - P(\lambda_0))\| \leq M(\eta)e^{(\lambda_0-\eta)t} \quad$ *при* $t \in \overline{R}_+$;

(ii) если $p = 1$,то для любого $\eta \in (0, \varepsilon)$ имеем

$$\|e^{-\lambda_0 t} exp(tA) - P(\lambda_0)\| \leq M(\eta) e^{-\eta t}, \quad t \in \overline{R}_+;$$

(iii) если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ неприводима и $Ax_0 = \lambda_0 x_0,\ A^* x_0^* = \lambda_0 x_0^*, \langle x_0, x_0^* \rangle = 1$, то для любых $\eta \in (0, \varepsilon)$ и $x \in E$

$$\|e^{-\lambda_0 t} exp(tA)x - \langle x, x_0^* \rangle x_0\| \leq M(\eta) e^{-\eta t}, \quad t \in \overline{R}_+.$$

Предложение 7.2.38 *[112] C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ $(C,1)$-эргодична тогда и только тогда, когда*

$$E = \{x \in E : exp(tA)x = x,\, t \in \overline{R}_+\} \oplus \{x \in E : t^{-1} \int_0^t exp(sA)x\, ds \to 0 \ \text{при} \ t \to \infty\}.$$

Предложение 7.2.39 *[112] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ $(C,1)$-эргодична, то следующие условия эквивалентны:*

(i) элемент $y \in R(A)$;

(ii) $s\text{-}\lim_{\lambda \to 0+} R(\lambda, A)y$ существует;

(iii) $s\text{-}\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-1} \int_0^\alpha \int_0^\beta exp(sA)y\, ds d\beta$ существует;

(iv) для некоторой последовательности $\{\alpha_m\}$ существует

$$w\text{-} \lim_{\alpha_m \to \infty} \alpha_m^{-1} \int_0^{\alpha_m} \int_0^\beta exp(sA)y\, ds d\beta.$$

Предложение 7.2.40 *[112] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ такова, что $t^{-1}\|exp(tA)\| \to 0$ при $t \to \infty$ и $\sup t^{-1} \| \int_0^t exp(sA)x\, ds\| \leq M\|x\|$ для всех $x \in E$ и некоторого $M < \infty$. Тогда каждое из условий (i)-(iv) предложения 7.2.39 эквивалентно тому, что $y \in R(A|_{\overline{R(A)} \cap D(A)})$.*

Предложение 7.2.41 *[112] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, 0)$. Тогда условие $y^* \in R(A^*)$ равносильно условию $\sup_{t>0} \| \int_0^t exp(sA)^* y^*\, ds\| < \infty$.*

7.3 Асимптотика семейств $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$

В этом разделе мы рассматриваем асимптотическое поведение C_0-семейства мультипликативного возмущения $U(\cdot)$ и C_0-семейства аддитивного возмущения $V(\cdot)$ при $t \to \infty$. Будем всюду считать, что C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ выходит на предел с показателем роста $\lambda_0 \in R$.

Определение 7.3.1 *Говорят, что C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ выходит на предел с показателем роста $\lambda_0 \in R$, если существует оператор $P \in B(E)$ такой, что*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_0 t} exp(tA)x = Px \quad \text{для всех } x \in E.$$

Если $exp(\cdot A)$ выходит на предел с показателем роста $\lambda_0 \in R$, то ясно, что найдется постоянная $M_1 \geq 1$ со свойством

$$\|exp(tA)\| \leq M_1 e^{\lambda_0 t} \quad \text{для } t \geq 0. \tag{7.12}$$

В силу предложения 7.1.28 в данной ситуации P — проектор с областью значений $R(P) = N(\lambda_0 - A)$ и нулевым пространством $N(P) = \overline{R(\lambda_0 I - A)}$.

Замечание 7.3.1 *В определении Г.Вебба о выходе на предел с показателем роста λ_0 дополнительно предполагается, что оператор P имеет конечный ранг и $\|e^{-\lambda_0 t} exp(tA) - P\| \to 0$ при $t \to \infty$. Он показал [160], что $exp(\cdot A)$ имеет равномерный выход на конечномерный предел с показателем роста λ_0 если и только если $E\omega(A) < \lambda_0$, граничный спектр $B\sigma(A) = \{\lambda_0\}$ и λ_0 — простой полюс резольвенты $R(\cdot, A)$.*

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7.3.1 *Если непрерывная функция $f(\cdot) : [0, \infty) \to E$ такова, что $\lim_{t\to\infty} f(t) = \varphi$, $\varphi \in E$, тогда для любого λ с $Re\lambda > 0$ мы имеем*

$$e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f(s)\, ds \to \varphi/\lambda \quad \text{при } t \to \infty. \tag{7.13}$$

Доказательство. Чтобы доказать (7.13), достаточно рассмотреть случай $\varphi = 0$, так как

$$\lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s}(f(s) - \varphi)\, ds + \varphi - e^{-\lambda t}\varphi = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f(s)\, ds.$$

Положив $t = T + \zeta$, получим

$$e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} f(s)\, ds =$$

$$= e^{-\lambda(T+\zeta)} \int_T^{T+\zeta} e^{\lambda s} f(s)\, ds + e^{-\lambda(T+\zeta)} \int_0^T e^{\lambda s} f(s)\, ds =$$

$$= e^{-\lambda(T+\zeta)} \int_0^{\zeta} e^{\lambda T} e^{\lambda \eta} f(T+\eta)\, d\eta + e^{-\lambda\zeta} e^{-\lambda T} \int_0^T e^{\lambda s} f(s)\, ds.$$

Во-первых, понятно, что норма $\|e^{-\lambda\zeta}\int_0^\zeta e^{\lambda\eta}f(T+\eta)\,d\eta\|$ ограничена функцией $1/\lambda\ (1-e^{-\lambda\zeta})\sup_{t\geq T}\ \|f(t)\|$ для всех ζ и T. Теперь мы можем выбрать T таким большим, что первый член справа становится меньше чем ε. Тогда мы можем выбрать ζ такой большой, что второй член также будет меньшим чем ε. Мы установили (7.13) для $\varphi = 0$.

Предложение 7.3.1 *Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ выходит на предел с показателем роста $\lambda_0 \in R$. Справедливы следующие утверждения :*

(i) *Если $\lambda_0 < 0$, тогда $g(t) \equiv \int_0^t exp(sA)\,ds \to -A^{-1}$ в операторной норме при $t \to \infty$;*

(ii) *Если $\lambda_0 > 0$, тогда $e^{-\lambda_0 t}g(t) \to P/\lambda_0$ сильно при $t \to \infty$.*

Доказательство. Если $\lambda_0 < 0$, тогда оператор A обратим и $g(t) = (exp(tA) - I)A^{-1}$. Поэтому предел равен $-A^{-1}$. Чтобы установить (ii), мы можем переписать

$$e^{-\lambda_0 t}g(t) = e^{-\lambda_0 t}\int_0^t e^{\lambda_0 s}e^{-\lambda_0 s}exp(sA)\ ds.$$

Применяя лемму 7.3.1, получаем (ii).

Замечание 7.3.2 *В случае $\lambda_0 > 0$ из формулы*

$$e^{-\lambda_0 t}\int_0^t exp(sA)\ ds\ =$$

$$= -\lambda_0\int_0^t e^{-\lambda_0 s}\int_0^s exp(\zeta A)\ d\zeta\ ds + \int_0^t e^{-\lambda_0 s}exp(sA)\ ds$$

мы видим, что если $exp(\cdot A)$ удовлетворяет (7.12) (без предположения, что $exp(\cdot A)$ выходит на предел с некоторым показателем роста) и если существует предел по Чезаро $P = s\text{-}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\lambda_0 s}exp(sA)\,ds$, тогда существует и сильный предел по Чезаро

$$s\text{-}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\lambda_0 s}\int_0^s exp(\tau A)\,d\tau\,ds = P/\lambda_0.$$

Для доказательства случая $\lambda_0 = 0$ теоремы 7.3.1 нам нужно утверждение 7.2.40, которое мы переформулируем здесь следующим образом:

Пусть $\sup_{t>0}\|\frac{1}{t}\int_0^t exp(sA)ds\| < \infty$ и $\frac{1}{t}\ exp(tA) \to 0$ сильно при $t \to \infty$. Тогда $x := \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\int_0^s exp(\tau A)y\ d\tau\ ds$ существует если и только если

$y \in D(A) \cap \overline{R(A)}$ ($= R(A)$ в случае, если $exp(\cdot A)$ эргодична). Кроме того, этот элемент x — единственное решение уравнения $Ax = -y$ в $\overline{R(A)}$, то есть $x = -\tilde{A}^{-1}y$, где $\tilde{A} = A|_{\overline{R(A)}}$.

Используя предложения 2.4.1 (iv), 7.3.1 и вышеупомянутую теорему, получаем:

Теорема 7.3.1 *Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ выходит на предел с показателем роста $\lambda_0 \in R$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Если $\lambda_0 < 0$, тогда для каждого $\lambda > \omega$ имеем $\|U(t) - \lambda(A-\lambda)A^{-1}\hat{U}(\lambda)\| \to 0$ при $t \to \infty$. В частности, $U(t)x \to -A^{-1}\lambda(\lambda - A)\hat{U}(\lambda)x$ для $x \in D(A\hat{U}(\lambda))$;*

(ii) *Если $\lambda_0 = 0$, тогда $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t U(s)x\, ds$ существует тогда и только тогда $\hat{U}(\lambda)x \in \overline{R(A)}$ для некоторого (и, значит, всех) $\lambda > \omega$. В этом случае предел $-\lambda(\lambda - A)\tilde{A}^{-1}\hat{U}(\lambda)x$ не зависит от λ и равен $-\tilde{A}^{-1}\lambda(\lambda - A)\hat{U}(\lambda)x$, если $x \in D(A\hat{U}(\lambda))$;*

(iii) *Если $\lambda_0 > 0$, тогда для каждого $\lambda > \omega$ и $x \in E$ предел $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_0 t}U(t)x \quad = \lambda(\lambda/\lambda_0 - 1)P\hat{U}(\lambda)x$ равен $\lambda_0^{-1}\lambda^2\hat{U}(\lambda)x$, если $\hat{U}(\lambda)x \in N(\lambda_0 - A)$, и равен нулю, если $\hat{U}(\lambda)x \in \overline{R(\lambda_0 - A)}$.*

Доказательство. (i) Из $\lambda_0 < 0$ следует, что A - обратим и $\|exp(tA)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому в силу (iv) предложения 2.4.1 мы имеем

$U(t) = (exp(tA) - I)A^{-1}\lambda^2\hat{U}(\lambda) - (exp(tA) - I)\lambda\hat{U}(\lambda) \to -\lambda(\lambda - A)A^{-1}\hat{U}(\lambda)$ в операторной норме при $t \to \infty$.

(ii) $\lambda_0 = 0$ подразумевает $exp(tA) \to P$ сильно при $t \to \infty$. Из равенства

$$\frac{1}{t}\int_0^t U(s)x\, ds =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^s exp(uA)\lambda^2\hat{U}(\lambda)x\, duds - \frac{1}{t}\int_0^t exp(sA)\lambda\hat{U}(\lambda)x\, ds + \lambda\hat{U}(\lambda)x$$

мы видим, что существование предела слева эквивалентно существованию предела первого члена с правой стороны, что в свою очередь эквивалентно тому, что $\hat{U}(\lambda)x \in \overline{R(A)}$. Кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^s exp(uA)\hat{U}(\lambda)x\, du\, ds = -\tilde{A}^{-1}\hat{U}(\lambda)x$$

(см. например [137], теорема 3.4), где $\tilde{A} = A|_{(I-P)E}$. Утверждение доказано.

(iii) Для $\lambda_0 > 0$ можно записать

$$e^{-\lambda_0 t}U(t)x =$$

$$= e^{-\lambda_0 t}\int_0^t e^{\lambda_0 s}\Big(e^{-\lambda_0 s}exp(sA)\Big)\lambda^2\hat{U}(\lambda)x\,ds - e^{-\lambda_0 t}\Big(exp(tA)-I\Big)\lambda\hat{U}(\lambda)x.$$

Тогда, применяя лемму 7.3.1 к $f(t) = e^{-\lambda_0 t}exp(tA)\lambda^2\hat{U}(\lambda)x$, мы получаем, что предел есть $\frac{P\lambda^2\hat{U}(\lambda)x}{\lambda_0}$.

Теорема 7.3.2 *Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ выходит на предел с показателем роста $\lambda_0 \in R$. Справедливы следующие утверждения :*

(i) *Если $\lambda_0 < 0$, тогда $\|V(t) - \hat{V}(\lambda)\lambda(A-\lambda)A^{-1}\| \to 0$ для каждого $\lambda > \omega$ при $t \to \infty$. В частности, $V(t)x \to -\hat{V}(\lambda)A^{-1}\lambda(\lambda - A)x$ для $x \in D(A)$;*

(ii) *Если $\lambda_0 = 0$, тогда $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t V(s)x\;ds$ существует если и только если $x \in \overline{R(A)}$ для некоторого (и следовательно всех) $\lambda > \omega$. В этом случае, предел равен $-\hat{V}(\lambda)\lambda(\lambda - A)\tilde{A}^{-1}x$, причем он не зависит от λ, и для $x \in D(A)$ равен $-\hat{V}(\lambda)\tilde{A}^{-1}\lambda(\lambda - A)x$.*

(iii) *Если $\lambda_0 > 0$, тогда для каждого $\lambda > \omega$ и $x \in E$ предел $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_0 t}V(t)x \;\; = \hat{V}(\lambda)\lambda(\lambda/\lambda_0 - 1)Px$, который равен $\hat{V}(\lambda)\lambda_0^{-1}\lambda(\lambda - A)x$, если $x \in N(\lambda_0 - A)$ и равен нулю, если $x \in \overline{R(\lambda_0 - A)}$.*

Предложение 7.3.2 *Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ выходит на предел с показателем роста $\lambda_0 = 0$ по Г.Веббу, тогда*

(i) *$\lim_{t\to\infty} U(t)x$ существует если и только если найдется такое $\lambda > \omega$, что $\hat{U}(\lambda)x \in \overline{R(A)}$. В этом случае, предел равен $-\lambda(\lambda - A)\tilde{A}^{-1}\hat{U}(\lambda)x$, который равен также $-\tilde{A}^{-1}\lambda(\lambda - A)\hat{U}(\lambda)x$ если $x \in D(\hat{U}(\lambda))$;*

(ii) *$u\text{-}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}U(t) = \lambda^2\hat{U}(\lambda)$.*

Доказательство. Согласно нашим предположениям, как показано в [160], мы имеем разложение $E = PE \oplus (I-P)E$, где $exp(tA)P = P$ для $t \geq 0$ и $\|exp(tA)(I-P)\| \leq C_2 e^{\gamma t}$ с $E\omega(A) < \gamma < 0$ для $t \geq 0$. Поэтому из формулы

$$U(t) = \Big(I - exp(tA)\Big)\lambda\hat{U}(\lambda) + \lambda\left(tP + \tilde{A}^{-1}(exp(tA)-I)(I-P)\right)\lambda\hat{U}(\lambda),$$

где $\|\tilde{A}^{-1}exp(tA)(I-P)\| \leq C_1 e^{\gamma t}$ для всех $t \geq 0$ с $E\omega(A) < \gamma < 0$, мы получаем результат.

Предложение 7.3.3 *Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ выходит на предел с показателем роста $\lambda_0 = 0$ по Г.Веббу, тогда*

(i) *$\lim_{t\to\infty} V(t)x$ существует если и только если $x \in \overline{R(A)}$. В этом случае предел равен $-\lambda\hat{V}(\lambda)(\lambda - A)\tilde{A}^{-1}x$;*

(ii) *$u\text{-}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}V(t) = \lambda^2\hat{V}(\lambda)P$.*

Доказательство теоремы 7.3.2 и предложения 7.3.3 аналогично случаю для семейства $U(\cdot)$.

Замечание 7.3.3 *Условие выхода на предел по Г.Веббу можно ослабить, используя предложение 10.2.1. В самом деле, для C_0-полугруппы с выходом на предел при $\lambda_0 = 0$ пространство E расщепится на E_{st} и E_{ap}, где $exp(tA)x \to 0$ при $t \to \infty$ для любого $x \in E_{st}$. На подпространстве E_{ap} C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является почти периодической C_0-группой.*

Глава 8

Позитивные полугруппы

Положительность – одно из самых замечательных свойств анализа. В теории полугрупп операторов в банаховых пространствах это свойство вызвало обширный поток публикаций, не поддающийся на сегодня никакому обзору. Многие абстрактные утверждения, полученные в этом направлении, оказались почти оптимальными для конкретных дифференциальных уравнений.

8.1 Банаховы пространства с конусом

Определение 8.1.1 *Подмножество E^+ банахова пространства E есть* ***конус****, если*

(i) E^+ выпукло ;

(ii) вместе с любым элементом $x \in E^+$ конус E^+ содержит и луч $\{tx : t \geq 0\}$;

(iii) E^+ не содержит противоположных элементов, т.е. если $x \in E^+$, то $-x \notin E^+$;

(iv) E^+ замкнуто.

Определение 8.1.2 *Для двух элементов $x, y \in E$ соотношение $x \preceq y$ эквивалентно условию $y - x \in E^+$.*

Определение 8.1.3 *Конус E^+ называется* ***воспроизводящим****, если $E = E^+ - E^+$.*

Предложение 8.1.1 *Для любого воспроизводящего конуса в банаховом пространстве E существует такое число $\zeta > 0$, что для каждого $x \in E$ имеется представление $x = x_1 - x_2$, в котором $\|x_j\| \leq \zeta \cdot \|x\|$ $(x_j \in E^+, j = 1, 2)$.*

Частным случаем воспроизводящего конуса является ***телесный***, т.е. конус, содержащий внутренние точки.

Определение 8.1.4 *Конус называется* ***нормальным****, если при некотором числе ν и любых $0 \preceq x \preceq y$ следует, что $\|x\| \leq \nu \cdot \|y\|$. Если $\nu = 1$, то конус называется острым.*

Определение 8.1.5 *Множество $S \subseteq E$* ***порядково ограничено****, если существует такой элемент $\tilde{x}$, что $x \preceq \tilde{x}$ для всех $x \in S$. Элемент $\tilde{x}$ при этом называется* ***верхней гранью*** *для множества S.*

Определение 8.1.6 ***Супремумом множества*** *$S \subseteq E$ (пишут $\sup S$) называют наименьшую из всех верхних граней S (если она существует). Аналогично определяется* ***инфимум множества*** *.*

Определение 8.1.7 ***Банахова структура (решетка)*** *есть полуупорядоченное банахово пространство (т.е. пространство с воспроизводящим конусом E^+), для которого*

(i) конус E^+ острый;

(ii) для каждой пары элементов $x, y \in E$ определен их $\sup$.

Определение 8.1.8 *Пусть E — банахова структура.* ***Модулем элемента*** *$x \in E$ назовем величину $|x| := x^+ + x^-$, где $x^+ = \sup(x, 0)$ - положительная часть элемента x, $x^- = \sup(-x, 0)$ - отрицательная часть элемента x.*

Определение 8.1.9 *Полуупорядоченное пространство называется* ***порядково полным****, если всякое порядково ограниченное множество в нем имеет $\sup$. Оно называется σ* ***-порядково полным****, если всякое счетное порядково ограниченное множество имеет $\sup$.*

Определение 8.1.10 *Два элемента x, y банаховой структуры E называются* ***дизъюнктными****, если $\inf\{|x|, |y|\} = 0$.*

Определение 8.1.11 *Пусть $A, B \in B(E)$. Говорят, что $A \preceq B$, если $Ax \preceq Bx$ для всех $x \in E^+$.*

Определение 8.1.12 *Если $0 \preceq A \in L(E)$, то A назовем* ***положительным.***

Предложение 8.1.2 *Каждый положительный линейный оператор в банаховой решетке E является ограниченным.*

8.2 Позитивные C_0-полугруппы

Определение 8.2.1 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$, действующая в полуупорядоченном пространстве E , называется* ***позитивной****, если*

$$exp(tA)E^+ \subseteq E^+ \quad \text{при} \quad \text{любом} \quad t \geq 0. \tag{8.1}$$

Предложение 8.2.1 *[122] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна и $x \preceq y$. Тогда*

$$exp(tA)x \preceq exp(tA)y \quad \text{при} \quad \text{любом} \quad t \geq 0. \tag{8.2}$$

Предложение 8.2.2 *[27] Позитивность C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ эквивалентна выполнению любого из условий :*

(i) резольвента положительна при всех $\lambda > \omega(A)$, т.е. $R(\lambda, A)E^+ \subseteq E^+$;

(ii) из $x \preceq y$ следует $R(\lambda, A)x \preceq R(\lambda, A)y$ при $Re\lambda > \omega(A)$.

Определение 8.2.2 *Функционал $y^* \in E^*$ назовем* ***положительным****, если $\langle x, y^* \rangle \geq 0$ для всех $x \in E^+$. Совокупность положительных функционалов обозначим E^{*+}.*

Предложение 8.2.3 *Если конус E^+ нормален, то E^{*+} - конус в E^* .*

Предложение 8.2.4 *[46] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна, то $D(A)^+ := D(A) \cap E^+$ плотно в E^+, т.е. $\overline{D(A)^+} = E^+$, и $D(A^*)^+$ w^*-плотно в E^{*+}.*

Предложение 8.2.5 *[105] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна, а конус E^+ является нормальным и воспроизводящим. Тогда равенство (2.3) сохраняется при $S(A) < Re\mu \leq \omega(A)$, т.е.*

$$R(\mu, A)x = \int_0^\infty e^{-\mu t} exp(tA)x dt, \tag{8.3}$$

где интеграл существует как несобственный интеграл Римана.

Предложение 8.2.6 *[27] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)x$ позитивна, а E - банахова структура. Тогда*

$$|R(\mu, A)x| \preceq R(Re\mu, A)|x| \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad x \in E \text{ и } Re\mu > S(A). \tag{8.4}$$

Определение 8.2.3 *Линейное подмножество $\mathfrak{J} \subset E$ в банаховой решетке есть* ***идеал****, если из $x \in E$, $y \in \mathfrak{J}$ и $|x| \preceq |y|$ следует, что $x \in \mathfrak{J}$.*

Определение 8.2.4 *Позитивная полугруппа $exp(\cdot A)$ на банаховой решетке E называется* ***неприводимой****, если лишь $\{0\}$ и E являются идеалами, инвариантными относительно семейства $\{exp(tA),\ t \geq 0\}$.*

Определение 8.2.5 *Если $x \succeq 0$, то наименьший идеал, содержащий x, называется* ***главным идеалом*** *, отвечающим x, и обозначается $\mathfrak{J}_x$.*

Определение 8.2.6 *Если $\mathfrak{J}_x$ плотно в E, то элемент x называется* ***квазивнутренним****.*

Определение 8.2.7 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется* ***строго неприводимой*** *, если для любых $x \succeq 0, t > 0$ все элементы $exp(tA)x$ — квазивнутренние для конуса E^+ .*

Заметим, что аналогичным образом можно определить понятие неприводимости и строгой неприводимости для любого семейства операторов (например, для резольvenты $R(\lambda, A)$ при λ, принадлежащих некоторому подмножеству комплексной плоскости).

Предложение 8.2.7 *[105] Если E - банахова структура, то следующие утверждения эквивалентны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ неприводима;

(ii) $R(\lambda, A)$ строго неприводима для всех $\lambda > S(A)$;

(iii) $R(\lambda, A)$ неприводима для всех $\lambda > S(A)$;

(iv) для любых $x \succ 0$, $y^* \succ 0$ найдется такое $t \geq 0$, что имеет место неравенство $\langle exp(tA)x, y^* \rangle > 0$.

Предложение 8.2.8 *[27] Неприводимая положительная аналитическая C_0-полугруппа является строго неприводимой.*

Предложение 8.2.9 *[53], [27] Пусть аналитическая C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна на банаховой структуре E. Если $0 \preceq x \in E$ и $0 \preceq x^* \in E^*$ таковы, что $\langle exp(t_0 A)x, x^* \rangle = 0$ при некотором $t_0 > 0$, то*

$$\langle exp(tA)x, x^* \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \text{любом} \quad t \in \overline{R}_+. \tag{8.5}$$

Определение 8.2.8 *Функционал $p(x)$, определенный на векторном пространстве E, назовем* ***сублинейным****, если*

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ при $x, y \in E$;

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ при $x \in E$, $\lambda \geq 0$.

Определение 8.2.9 *В полуупорядоченном банаховом пространстве E* ***каноническим функционалом*** *по отношению к заданной полуупорядоченности назовем функционал*

$$p^+(x) := \inf\{\|x+y\| : y \in E^+\}. \tag{8.6}$$

Предложение 8.2.10 *[27] Пусть E - полуупорядоченное банахово пространство. Тогда канонический функционал сублинеен и $p^+(x) + p^+(-x) > 0$. Если E - банахова структура, то $p^+(x) = \|x^+\|$.*

Определение 8.2.10 *Пусть в банаховом пространстве E функционал $p(\cdot)$ сублинеен и непрерывен. Оператор $A \in L(E)$ называется* ***p-диссипативным,*** *если $p(x) \leq p(x - tAx)$ для всех $t \geq 0$ и $x \in D(A)$.*

Определение 8.2.11 *Пусть p -сублинейный функционал. Отображение $\mathfrak{T} \in L(E)$ называется* ***p-сжатием****, если $p(\mathfrak{T}x) \preceq p(x)$ для всех $x \in E$.*

Предложение 8.2.11 *[27] В полуупорядоченном банаховом пространстве всякое p^+ - сжатие есть положительный оператор, и всякий положительный сжимающий оператор есть p^+ - сжатие.*

Предложение 8.2.12 *[27] В полуупорядоченном банаховом пространстве всякая C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ есть p^+ сжатие при всех $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда ее генератор p^+ - диссипативен.*

Теорема 8.2.1 *[27] Пусть конус E^+ нормален. Для того чтобы линейный оператор A был генератором p^+ - сжимающей C_0-полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(i) оператор A был плотно определен;

(ii) оператор A был p^+ - диссипативен;

(iii) область значений $R(\lambda I - A) = E$ для некоторого $\lambda > 0$.

Определение 8.2.12 *Операторная норма в $B(E)$ называется* ***положительно достижимой****, если*

$$\|B\| = \sup\{\|Bx\| : 0 \preceq x \in E; \|x\| \leq 1\} \tag{8.7}$$

для каждого положительного оператора $B \in B(E)$.

Теорема 8.2.2 *[27] Пусть конус E^+ острый и норма в $B(E)$ положительно достижима. Для того чтобы A был генератором позитивной сжимающей полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы*

(i) оператор A был плотно определен;

(ii) оператор A был p^+ - диссипативен;

(iii) область значений $R(\lambda I - A) = E$ при некотором $\lambda > 0$.

Замечание. Утверждения этой теоремы остаются в силе и без предположения положительной достижимости нормы в случае, когда E - банахова структура.

Справедлив следующий аналог теоремы 2.1.1 о порождении C_0-полугруппы.

Предложение 8.2.13 *[53], [27] Пусть конус E^+ острый, норма в $B(E)$ положительно достижима. Оператор A порождает позитивную C_0-полугруппу $exp(\cdot A)$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{C}(E)$, $(\omega, \infty) \in \rho(A)$ и*

$$p^+\Big(R(\lambda, A)^n x\Big) \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} p^+(x), \qquad \lambda > \omega, \tag{8.8}$$

при всех $x \in E$, $n \in N$.

Предложение 8.2.14 *[53], [27] Для произвольной банаховой структуры предложение 8.2.13 остается справедливо с заменой (8.8) на*

$$\|\Big(R(\lambda, A)^n x\Big)^+\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \|x^+\| \tag{8.9}$$

при всех $x \in E$, $n \in N$.

Определение 8.2.13 *Говорят, что оператор $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$, определенный на банаховой структуре E, удовлетворяет* ***условию положительного минимума****, если для всех $x \in D(A)^+$ и $\varphi \in E^{\odot +} := E^{*+} \cap E^{\odot}$ равенство $\langle x, \varphi \rangle = 0$ влечет неравенство $\langle Ax, \varphi \rangle \geq 0$.*

Предложение 8.2.15 *[27] [89] Генератор позитивной C_0-полугруппы удовлетворяет условию положительного минимума.*

Предложение 8.2.16 *[156] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$ и существует такая сердцевина D_0 оператора A, что из принадлежности $x \in D_0$ следует $|x| \in D_0$. Тогда из выполнения условия положительного минимума для A следует позитивность C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$.*

Предложение 8.2.17 *[42] Пусть Δ -оператор Лапласа. Тогда для любого элемента $f \in L_1^{loc}(R^d)$ такого, что $\Delta f \in L_1^{loc}(R^d)$, имеет место оценка*

$$Re\Big(signf \cdot \Delta f\Big) \leq \Delta|f|, \tag{8.10}$$

где $signf$ — знак функции f.

Определение 8.2.14 *Для каждого $x \in E$ определим линейный оператор $sign_x$ свойствами:*

(i) $sign_x x = |x|$;

(ii) $|sign_x y| \preceq |y|$ для всех $y \in E$;

(iii) $sign_x y = 0$, если $\inf\{|x|, |y|\} = 0$.

Предложение 8.2.18 *[122], [27] В σ-порядково полной банаховой структуре по любому $x \in E$ оператор $sign_x$ определяется однозначно.*

Предложение 8.2.19 *[42], [134] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, 0)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна;

(ii) для всех $x \in D(A)$ и всех $0 \preceq \varphi \in D(A^\odot)$ имеем

$$\langle sign_{x^{**}}(Ax)^{**}, \varphi\rangle \leq \langle |x|, A^\odot \varphi\rangle$$

и при каждом $\lambda > 0$ существует множество $K_\lambda \subset D(A^\odot)^+$ такое, что $(\lambda I - A^\odot)K_\lambda$ отделяет $E^+ \setminus \{0\}$ от 0, т.е. для каждого $0 \prec x \in E$ существует $0 \preceq \varphi \in D(A^\odot)$ такой, что

$$\langle x, (\lambda I - A^\odot)\varphi\rangle > 0.$$

Предложение 8.2.20 *[134] Пусть в условиях предложения 8.2.19 дополнительно E – дедекиндово полно (т.е. любое мажорируемое подмножество $S \subset E$ имеет $\sup S \in E$). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна;

(ii) для каждого $x \in D(A)$ и $0 \preceq \varphi \in D(A)^*$ имеем

$$\langle sign_x(Ax), \varphi\rangle \leq \langle |x|, A^*\varphi\rangle,$$

и для каждого $\lambda > 0$ существует множество $K_\lambda \in D(A^*)^+$ такое, что $(\lambda I - A^*)K_\lambda$ отделяет $E^+ \setminus \{0\}$ от 0.

Определение 8.2.15 *Линейный оператор A в σ - порядково полной банаховой структуре удовлетворяет* ***неравенству Като****, если*

$$\langle sign_x(Ax), \varphi\rangle \leq \langle |x|, A^*\varphi\rangle \tag{8.11}$$

для всех $x \in D(A)$ и $0 \preceq \varphi \in D(A^*)$.

Предложение 8.2.21 *[41], [42] Генератор позитивной C_0-полугруппы в σ -порядково полной банаховой структуре удовлетворяет неравенству Като (8.11).*

Для формулировки достаточных условий вводятся дополнительные конструкции.

Определение 8.2.16 *Множество $S \subset E^{\odot+}$ называется строго положительным, если для любого $x \in E^+$ из равенств $\langle x, \varphi\rangle = 0$ при любом $\varphi \in S$ следует, что $x = 0$.*

Определение 8.2.17 *Функционал φ называется* ***строго положительным****, если множество $\{\alpha\varphi : \alpha \in R_+\}$ строго положительно.*

Определение 8.2.18 *Элемент $x \in E$ называется* ***положительным субвектором*** *оператора $A \in L(E)$, если $0 \preceq x \in D(A)$ и $Ax \preceq \lambda x$ при некотором $\lambda \in R$.*

Предложение 8.2.22 *[27] Если $exp(\cdot A)$ — позитивная C_0-полугруппа в банаховой структуре E , то существует строго положительное подмножество $K \subset E$, состоящее из положительных субвекторов A.*

Предложение 8.2.23 *[27] Пусть $exp(\cdot A)$ — C_0-полугруппа в σ - порядково полной банаховой структуре. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна;

(ii) оператор A удовлетворяет неравенству Като, и A^* имеет строго положительное множество положительных субвекторов.

Предложение 8.2.24 *[27] Если в условиях 8.2.23 на E определен строго положительный функционал, то позитивность C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ эквивалентна существованию такого положительного субвектора φ оператора A^*, для которого выполняется неравенство (8.11).*

Определение 8.2.19 *Линейный оператор A обладает* ***положительным внедиагональным свойством****, если из равенства $\langle x, \varphi \rangle = 0$ при $0 \preceq x \in D(A)$, $0 \preceq \varphi \in E^*$ следует, что $\langle Ax, \varphi \rangle \geq 0$. (Ср. с определением 8.2.13).*

Предложение 8.2.25 *[46], [53] Пусть конус E^+ телесен. C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна тогда и только тогда, когда A обладает положительным внедиагональным свойством и $R(\lambda, A) \geq 0$ для достаточно больших вещественных λ.*

Предложение 8.2.26 *[46], [53] Для пространства E с нормальным телесным конусом и оператора $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$ эквивалентны условия:*

(i) оператор A - генератор позитивной C_0-полугруппы;

(ii) оператор A обладает положительным внедиагональным свойством и $R(\lambda I - A) = E$ при достаточно больших $\lambda \in R$;

(iii) $R(\lambda, A) \geq 0$ при достаточно больших $\lambda \in R$.

Предложение 8.2.27 *[46], [53] Условия (i)-(iii) предложения 8.2.26 влекут равенства*

$$S(A) = \omega(A) =$$

$$= \inf\{\lambda \in R : \, Ax \preceq \lambda x \ \text{ для некоторого } x \in D(A) \cap intE^+\},$$

где $S(A)$ - спектральная грань C_0-полугруппы.

Предложение 8.2.28 *[27] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна в банаховой структуре $L^1(\Omega, \mu)$ или $L^2(\Omega, \mu)$, то $S(A) = \omega(A)$.*

Предложение 8.2.29 *[104], [105] Пусть $exp(\cdot A)$ – позитивная C_0-полугруппа в банаховой структуре E . Тогда:*

(i) если $\sigma(A) \neq \emptyset$, то $S(A)$ есть точка спектра;

(ii) если $S(A)$ - полюс резольвенты $R(\lambda, A)$ порядка m и $\tilde{\lambda}$ - другой полюс с $Re\tilde{\lambda} = S(A)$, то его порядок не превышает m;

(iii) все числа $S(A) + ik \cdot Im\tilde{\lambda}$, $(k \in Z)$ входят в $\sigma(A)$;

(iv) если $exp(\cdot A)$ становится компактной, то существует такое $\varepsilon > 0$, что в полосе $S(A) - \varepsilon < \mathrm{Re}\lambda < S(A)$ нет точек спектра оператора A;

(v) если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ неприводима и $S(A)$ - полюс резольвенты, то $S(A)$ - собственное число алгебраической кратности единица и отвечающий ему собственный вектор является квазивнутренним элементом;

(vi) граничный спектр $B\sigma(A)$ (т.е. часть спектра $\sigma(A)$, лежащая на прямой $S(A) + i\xi$, где $\xi \in R$) состоит из собственных значений алгебраической кратности единица вида $S(A) + i\nu k$ с $k \in Z$ и фиксированным $\nu \geq 0$.

Предложение 8.2.30 *[27] Если в условиях предложения 8.2.29 $S(A) < 0$, то существует такое $\omega > 0$, что для любого $x_0 \in D(A)$ выполняется неравенство*

$$\|exp(tA)x_0\| \leq M_0 e^{-\omega t}, \quad t \geq 0,$$

где M_0 может зависеть от x_0 .

Предложение 8.2.31 *[27] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ положительна в банаховой структуре E, то $S(A) = \omega_1(A)$.*

Определение 8.2.20 *Позитивная C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$* ***мажорирует*** *C_0-полугруппу $exp(\cdot G)$, если $|exp(tG)x| \preceq exp(tA)|x|$ при всех $x \in E$, $t \geq 0$.*

Предложение 8.2.32 *[122] C_0-полугруппа $exp(\cdot G)$ мажорируется C_0-полугруппой $exp(\cdot A)$ тогда и только тогда, когда $|R(\lambda, G)x| \preceq R(\lambda, A)|x|$ для всех $x \in E$ и больших вещественных λ .*

Предложение 8.2.33 *[122] C_0-полугруппа $exp(\cdot G)$ мажорируется C_0-полугруппой $exp(\cdot A)$ тогда и только тогда, когда выполняется обобщенное неравенство Като:*

$$Re\langle sign_x(Gx), \varphi\rangle \leq \langle |x|, A^{\odot}\varphi\rangle \ \text{ для всех } x \in D(G), \tag{8.12}$$

где $\varphi \in D(A^{\odot})^{+}$ и при каждом $\lambda > 0$ существует множество $K_\lambda \subset D(A^{\odot})^{+}$ такое, что $\langle x, (\lambda I - A^{\odot})\varphi\rangle \geq 0$ при всех $\varphi \in K_\lambda$ и $x \succeq 0$.

Предложение 8.2.34 *[122] В случае дедекиндовой полноты пространства E предложение 8.2.33 изменяется аналогично изменению 8.2.19 на предложение 8.2.20.*

Предложение 8.2.35 *[42] Пусть $exp(\cdot A)$ — позитивная C_0-полугруппа, G - плотно определенный линейный оператор и выполнено (8.12). Тогда G допускает замыкание $\overline{G}$. Если $(\lambda I - G)D(G)$ плотно в E для некоторого $\lambda > \max\{0, S(A)\}$, то G порождает C_0-полугруппу $exp(\cdot G)$, которая мажорируется C_0-полугруппой $exp(\cdot A)$.*

Предложение 8.2.36 *[122] Пусть C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ и $exp(\cdot G)$ позитивны. Тогда условия:*

(i) $exp(tG) \preceq exp(tA)$ при $t \geq 0$;

(ii) $\langle Gx, \varphi\rangle \leq \langle x, A^{\odot}\varphi\rangle$ для всех $x \in D(G)^{+}, \varphi \in D(A^{\odot})^{+}$;

эквивалентны и влекут за собой выполнение соотношения

(iii) $Gx \preceq Ax$ при $0 \preceq x \in D(A) \cap D(G)$.

Предложение 8.2.37 *[122] Если в условиях предложения 8.2.36 $D(A) \subseteq D(G)$ или $D(G) \subseteq D(A)$, то из (iii) следует (i).*

Предложение 8.2.38 *[27] Пусть E - банахова структура с порядково непрерывной нормой, а $exp(\cdot A)$— позитивная C_0-полугруппа на E . Пусть задана полугруппа $\tilde{\mathcal{T}}(\cdot)$ такая, что функция $\tilde{\mathcal{T}}(\cdot)x$ измерима при каждом $x \in E$ и $exp(tA) \preceq \tilde{\mathcal{T}}(t), t \geq 0$, причем $\sup_{t \geq 0} \|\tilde{\mathcal{T}}(t)\| < \infty$. Тогда $\tilde{\mathcal{T}}(\cdot)$ является позитивной C_0-полугруппой.*

Определение 8.2.21 ***Модулем*** *C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$, который обозначается $|exp(\cdot A)|$, называют минимальную позитивную C_0-полугруппу, которая мажорирует C_0-полугруппу $exp(\cdot A)$.*

Предложение 8.2.39 *[122] Имеются примеры C_0-полугрупп, для которых не существует модуля.*

Предложение 8.2.40 *[54] Пусть A - ограниченный оператор в порядково полной комплексной банаховой структуре, представимый в виде разности двух положительных операторов. Тогда для полугруппы $exp(\cdot A)$ существует модуль полугруппы.*

Предложение 8.2.41 *[54] Если для некоторой C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ в порядково полной банаховой структуре существует мажорирующая C_0-полугруппа, то существует и $|exp(\cdot A)|$.*

Предложение 8.2.42 *[54] Пусть $exp(\cdot A)$ - некоторая C_0-полугруппа в порядково полной банаховой структуре, $Q \in B(E)$ таков, что $Q \preceq \gamma I$ при некотором $\gamma > 0$. Тогда для C_0-полугрупп $exp(\cdot A)$ и $exp(\cdot(A+Q))$ модули существуют или не существуют одновременно и генераторы модулей (если они существуют) $A_{|\bullet|}$ и $(A+Q)_{|\bullet|}$ связаны соотношением*

$$(A+Q)_{|\bullet|} = A_{|\bullet|} + Re\, Q.$$

Определение 8.2.22 *Линейный оператор A, действующий в полуупорядоченном пространстве E с нормальным воспроизводящим конусом E^+, называется* ***резольвентно позитивным****, если*

(i) $(\zeta_0, \infty) \subset \rho(A)$ при некотором $\zeta_0 \in R$;

(ii) $R(\lambda, A) \succeq 0$ при всех $\lambda > \zeta_0$.

Определение 8.2.23 *Инфинимум ζ_0 , удовлетворяющих определению 8.2.22, обозначим $S_+(A)$.*

Предложение 8.2.43 *[43] Для резольвентно позитивных операторов при $S_+(A) < \lambda < \mu$ имеет место неравенство $0 \preceq R(\mu, A) \preceq R(\lambda, A)$.*

Предложение 8.2.44 *[43] Имеются примеры резольвентно позитивных операторов, не являющихся генераторами C_0-полугрупп.*

Предложение 8.2.45 *[43] Если $exp(\cdot A)$ - позитивная C_0-полугруппа,то $S_+(A) = S(A)$.*

Определение 8.2.24 *Множество $Q \subset E^+$ называется* ***кофинальным*** *в E^+, если для каждого $x \in E^+$ существует мажоранта $x \preceq y \in Q$.*

Предложение 8.2.46 *[43] Если A — плотно определенный резольвентно позитивный оператор, $D(A)^+$ кофинально в E^+ или $D(A^\odot)^+$ кофинально в $E^{\odot+}$, то A является генератором позитивной C_0-полугруппы, причем $S(A) = \omega(A)$.*

Предложение 8.2.47 *[43] Пусть A плотно определен и резольвентно позитивен. Тогда, если $\|R(\lambda_0, A)x\| \geq c\|x\|$, $x \in E^+$, при некоторых $\lambda_0 > S(A)$ и $c > 0$, то A порождает позитивную C_0-полугруппу и $S(A) = \omega(A)$.*

Предложение 8.2.48 *[43] Пусть норма пространства E аддитивна на конусе E^+ и $\overline{D(A)} = E$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) A порождает позитивную C_0-группу операторов;

(ii) операторы A и $-A$ резольвентно позитивны, и существуют такие $\lambda > \max\{S(A), S(-A)\}$ и $c > 0$, что

$$\|R(\lambda, \pm A)x\| \geq c\|x\|$$

при всех $x \in E^+$.

8.3 Положительность семейств $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$

В настоящем разделе мы предполагаем, что E является банаховой решеткой с положительным конусом E^+.

Определение 8.3.1 *Говорят, что C_0-семейство мультипликативных возмущений $U(\cdot)$ на E* ***положительно*** *, если для каждого $t \geq 0$ оператор $U(t)$ положителен (пишем, $U(t) \succeq 0$), т.е. $U(t)E^+ \subseteq E^+$. В случае, когда E является гильбертовым пространством H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, мы говорим, что $U(\cdot)$ положительно (пишем $U(\cdot) \geq 0$), если для каждого $t \geq 0$ оператор $U(t)$ положителен в том смысле, что $(U(t)x, x) \geq 0$ для всех $x \in E$.*

Известно (см. [122], предложение 4.8 и Лемма 4.18), что C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ доминирует I, то есть $exp(tA) - I \succeq 0$ положителен при $t \geq 0$, в смысле банаховой решетки если и только если генератор A ограничен и положителен. Аналогично мы имеем, что

Предложение 8.3.1 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ доминирует I на гильбертовом пространстве E если и только если генератор A ограничен и положителен.*

Доказательство. Предположим, что операторы $exp(tA) - I$ положительны для всех $t \geq 0$. Для $x \in D(A)$ определим $y = (\lambda - A)x$, где λ - некоторое положительное число, большее чем $\omega(A)$. Тогда

$$(Ax, (\lambda - A)x) = ((\lambda - A)^{-1}y, y) = ((\lambda(\lambda - A)^{-1} - I)y, y) =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}((exp(tA) - I)y, y)dt \geq 0,$$

так что $\lambda(Ax, x) \geq \|Ax\|^2$ для всех $x \in D(A)$. Следовательно, A положителен и $\|A\| \leq \lambda$. Обратное утверждение очевидно.

Следующие предложения характеризуют положительность семейств $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$.

Предложение 8.3.2 *Каждое C_0-семейство мультипликативных возмущений $U_{B,\mu}(\cdot)$ для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$, определенное в (2.19) с $\mu \leq 0$ и $B \succeq 0$, положительно, если и только если генератор A положителен. То же самое справедливо для C_0-семейства аддитивных возмущений.*

Предложение 8.3.3 *Каждое C_0-семейство мультипликативных возмущений $U_{B,\mu}(\cdot)$ для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ на гильбертовом пространстве H, определенное в (2.19) с $\mu \leq 0$ и $B \geq 0$ и коммутирующее с $exp(\cdot A)$, положительно, если и только если генератор A положителен. То же самое справедливо для C_0-семейства аддитивных возмущений.*

Глава 9

Полугруппы непрерывные по норме

C_0-полугруппы с ограниченным производящим оператором мало интересны для приложений. Однако очень важно иметь наиболее полный набор условий на полугруппу, которые влекут ограниченность генератора. Это позволяет в теоретических исследованиях исключить попытки "доказать интересные свойства" в "общих" случаях, которые в силу налагаемых условий на самом деле являются тривиальными.

9.1 Становящиеся непрерывными по норме полугруппы

Определение 9.1.1 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется* ***непрерывной в равномерной операторной топологии (непрерывной по норме), начиная с*** *t_0 (иногда будем говорить "****становится непрерывной по норме****"), если существует $t_0 > 0$ такое, что функция $t \to exp(tA)$ из $[t_0, \infty)$ в $B(E)$ непрерывна в равномерной операторной топологии. C_0-полугруппа называется* ***непрерывной по норме****, если $t_0 = 0$.*

Предложение 9.1.1 *[37] Если $\tilde{E}_{t_0} \subseteq D(A)$ при некотором t_0 , то $Aexp(tA) \in B(E)$ при $t \geq t_0$ и C_0-полугруппа $exp(tA)$ непрерывна по норме при $t > t_0$.*

Предложение 9.1.2 *[127] Если $\tilde{E}_\alpha \subseteq D(A)$ при всех $\alpha > 0$, то полугруппа $exp(\cdot A)$ бесконечно дифференцируема при $t \geq 0$.*

Предложение 9.1.3 *[98] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ непрерывна по норме, начиная с некоторого t_0, и полуфредгольмова, то $A \in B(E)$.*

Предложение 9.1.4 *[37] Пусть полугруппа $\mathcal{T}(t)$ сильно непрерывна при $t > 0$ и $\mathcal{T}(t_0) \in B_0(E)$ при некотором $t_0 > 0$. Тогда операторы $\mathcal{T}(t)$ компактны при всех $t \geq t_0$ и полугруппа $\mathcal{T}(t)$ непрерывна по норме при $t > t_0$. Отметим, что здесь не предполагается, что полугруппа $\mathcal{T}(\cdot)$ является C_0 - полугруппой.*

9.2 Полугруппы с ограниченным генератором

Предложение 9.2.1 *Для любого ограниченного оператора $B \in B(E)$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(tB)^k/k!$ равномерно сходится и оператор-функция*

$$exp(tB) = \sum_{k=0}^{\infty}(tB)^k/k!\,, \quad t \geq 0, \tag{9.1}$$

является непрерывной по норме C_0-полугруппой с производящим оператором B. При этом полугруппа $exp(\cdot B)$ допускает оценку

$$\|exp(tB)\| \leq e^{\|B\|\,t}, \quad t \geq 0.$$

Теорема 9.2.1 *[14] C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ непрерывна по норме тогда и только тогда, когда $A \in B(E)$.*

Предложение 9.2.2 *[15] Если $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$ и $D(A)$ - множество второй категории в E, то $\lim_{\tau\to 0+}\|exp(\tau A) - I\| = 0$ и $A \in B(E)$.*

Предложение 9.2.3 *[122] Если $exp(\cdot A)$ — C_0-группа операторов и $\overline{\lim}_{\tau\to 0}\|exp(\tau A) - I\| < 2$, то производящий оператор $A \in B(E)$.*

Предложение 9.2.4 *[127] Если $\tilde{E}_\alpha \subseteq D(A)$ при всех $\alpha > 0$ и*

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\, t\,\|Aexp(tA)\| \leq 1/e, \qquad \text{то} \qquad A \in B(E). \tag{9.2}$$

Предложение 9.2.5 *[2] Для C_0^*-непрерывной полугруппы $exp(\cdot A)$ следующие условия эквивалентны (это же справедливо для w-непрерывных полугрупп):*

(i) существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что

$$\|exp(tA) - I\| \leq 1 - \varepsilon \qquad \textit{при} \qquad 0 \leq t < \delta; \tag{9.3}$$

(ii) $\lim_{t\to 0+}\|exp(tA) - I\| = 0$.

Предложение 9.2.6 *[100] Если $A \in \mathcal{H}(\theta, \omega)$ и $-A \in \mathcal{G}(M, \omega)$, то $A \in B(E)$.*

Предложение 9.2.7 *[37] Если задана C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ и существует неограниченное открытое связное множество Ω , содержащее нуль и такие числа $0 \leq \alpha < \beta$, что $\sigma(exp(tA)) \cap \Omega = \emptyset$ при $t \in [\alpha, \beta]$, то $A \in B(E)$.*

Предложение 9.2.8 *[123] Пусть C_0-группа $exp(\cdot A)$ такова, что $0 \in \rho_\infty(exp(t_0 A))$ при некотором $t_0 \neq 0$, где $\rho_\infty(Q)$ – неограниченная связная компонента $\rho(Q)$. Оператор A ограничен тогда и только тогда, когда $\sigma(A)$ ограничен.*

Предложение 9.2.9 *[123] Пусть C_0-группа $exp(\cdot A)$ такова, что $\sigma(A) = \{0\}$. Если $0 \in \rho_\infty(exp(t_0 A))$ при некотором $t_0 \neq 0$, то A ограничен и $\sigma(exp(tA)) = \{1\}$ при всех $t \in R$.*

Предложение 9.2.10 *[123] Пусть C_0-группа $exp(\cdot A)$ неквазианалитична, т.е. такова, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + \|exp(tA)\|)}{1 + t^2}\, dt < \infty.$$

Тогда оператор A ограничен тогда и только тогда, когда спектр $\sigma(A)$ ограничен.

Определение 9.2.1 *Банахово пространство E называется **пространством Гротендика**, если любая последовательность $\{x_n^*\}$, $x_n^* \in E^*$, сходящаяся в w^*-топологии к нулю, сходится к нулю и в слабой топологии.*

Определение 9.2.2 *Будем говорить, что пространство E обладает **свойством Данфорда - Петтиса**, если для любого другого банахова пространства X каждый слабо компактный оператор $\mathfrak{N} : E \to X$ отображает слабо сходящиеся последовательности в последовательности, сходящиеся сильно.*

Предложение 9.2.11 *[114] Примером пространства Гротендика со свойством Данфорда-Петтиса является L^∞ .*

Предложение 9.2.12 *[114] Любая C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$, заданная на пространстве Гротендика со свойством Данфорда-Петтиса является непрерывной по норме, т.е. $A \in B(E)$.*

Предложение 9.2.13 *[114] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ задана в пространстве E со свойством Данфорда-Петтиса. Если семейство операторов $exp(\cdot A)^{**}$ является C_0-полугруппой на E^{**} , то C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ непрерывна по норме.*

Предложение 9.2.14 *[134] Пусть $A \in B(E)$, где E — банахова структура. Следующие условия эквивалентны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна ;

(ii)$\langle \varphi, sign_{x^{**}}(Ax)^{**} \rangle \leq \langle A|x|, \varphi \rangle$ при всех $x \in E$ и $0 \preceq \varphi \in E^*$;

(iii) если $0 \preceq x \in E$, $0 \preceq \varphi \in E^*$ такие, что $\langle x, \varphi \rangle = 0$, то $\langle Ax, \varphi \rangle \geq 0$;
(iv) оператор $A + \|A\| \cdot I \succeq 0$.

Предложение 9.2.15 *[134] Если $A, B \in B(E)$, где E - банахова структура, то следующие условия равносильны:*
(i) $|exp(tB)x| \preceq exp(tA)|x|$ для любых $x \in E$;
(ii) $\langle A|x|, \varphi \rangle \geq \langle sign_{x^{**}}(Bx)^{**}, \varphi \rangle$ для всех $x \in E$ и $0 \preceq \varphi \in E^*$;
(iii) $A \succeq B$ и $A + B \succeq -\|A + B\| \cdot I$.

Предложение 9.2.16 *[58] Если $A, B \in B(H)$ и операторы C и D обратимы в $B(H)$, причем $\sup_{t \geq 0} \|I - Cexp(-tA)Dexp(tB)\| \leq 1$, то операторы A и B подобны.*

Глава 10

Почти периодические полугруппы

Свойство почти периодичности решения задачи Коши накладывает достаточно жесткие ограничения на спектр $\sigma(A)$ и систему собственных векторов оператора A. Мы воспользуемся этими условиями при исследовании устойчивости разностных схем.

10.1 Предварительные сведения

Пусть задана функция $f(\cdot) : R \to E$. Число $\tau \in R$ называется ε -периодом функции $f(\cdot)$, если

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \varepsilon, \qquad t \in R.$$

Обозначим множество всех ε-периодов функции $f(\cdot)$ через $J(f, \varepsilon)$.

Определение 10.1.1 *Говорят, что функция $f(\cdot)$* ***почти периодична*** *(пишем п.п.), если для любого $\varepsilon > 0$ множество $J(f, \varepsilon)$ относительно плотно в R . Последнее означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $l_\varepsilon > 0$ со свойством: любой подинтервал из R длины l_ε пересекается с $J(f, \varepsilon)$,т.е.*

$$[a, a + l_\varepsilon] \cap J(f, \varepsilon) \neq \emptyset \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad a \in R.$$

Предложение 10.1.1 *[40] Для любой п.п. функции $f(\cdot)$ и любого $\varepsilon > 0$ множество ε-периодов $\{\tau_\varepsilon\}$ замкнуто.*

Понятно, что каждая периодическая функция является и почти периодической.

Предложение 10.1.2 *[40] Пусть п.п. функция $f(\cdot) : R \to E$ непрерывна. Тогда функция $f(\cdot)$ равномерно непрерывна на R .*

Предложение 10.1.3 *[40] Если $f(\cdot) : R \to E$ – п.п. функция, то множество значений $R_{f(\cdot)} := \{x \in E : \ x = f(t), t \in R\}$ относительно компактно в E.*

Предложение 10.1.4 *[40] Если $f(\cdot) : R \to E$ п.п. функция, у которой существует равномерно непрерывная производная $f'(\cdot)$ на R, то $f'(\cdot)$ является п.п. функцией.*

Теорема 10.1.1 *Пусть $f \in C(R;E)$. Для того чтобы $f(\cdot)$ была п.п. функцией, необходимо и достаточно, чтобы семейство функций $\{f(\cdot{+}h)\}_{-\infty<h<\infty}$, было компактным в $C(R;E)$.*

Предложение 10.1.5 *[24] Сумма $f(\cdot)+g(\cdot)$ двух п.п. функций есть функция п.п. Произведение п.п. функции f и числовой п.п. функции $\varphi(t)$ есть п.п. функция $\varphi(\cdot)f(\cdot) : R \to E$.*

Предложение 10.1.6 *[40] Для каждой п.п. функции $f(\cdot)$ предел*

$$a(\lambda, f) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int\limits_{-T}^{T} f(t)e^{-i\lambda t}\, dt \qquad \text{существует при любом} \quad \lambda \in R.$$

Предложение 10.1.7 *[40] В условиях предложения 10.1.6 предел*

$$a(0, f) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int\limits_{c-T}^{c+T} f(t)\, dt \quad \text{существует равномерно} \quad \text{по} \quad c \in R.$$

Определение 10.1.2 *Функция $a(\cdot, f)$ называется* ***преобразованием Бора*** *функции $f(\cdot)$. Те числа λ , для которых $a(\lambda, f) \neq \emptyset$, будем называть* ***спектром Фурье функции*** *$f(\cdot)$ и обозначать $SP(f)$.*

Предложение 10.1.8 *[40] Спектр Фурье любой п.п. функции не более, чем счетен.*

Определение 10.1.3 *Подмножество Œ $\subset R$ называется* ***гармоническим****, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\cap_{\lambda\in Œ}\{\tau : |e^{i\lambda\tau} - 1| \leq \epsilon\}$ относительно плотно в R.*

Определение 10.1.4 *Семейство функций $F = \{f\}$, отображающих R в E, называется* ***равномерно почти периодическим****, если множество*
$\cap_{f \in F} J(f, \varepsilon)$ *относительно плотно в R для каждого $\varepsilon > 0$.*

Предложение 10.1.9 *[52] Если множество Œ гармоническое, то найдется такое число $\delta > 0$, что расстояние между произвольными точками из Œ больше δ .*

Определение 10.1.5 *Функция $f(\cdot) : R \to E$ называется слабо п.п., если функция $\langle f(\cdot), y^* \rangle$ п.п. при каждом $y^* \in E^*$. Аналогично определяется слабая периодичность.*

10.2 Почти периодические и периодические C_0-полугруппы

Определение 10.2.1 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется* ***почти периодической*** *полугруппой (пишем п.п. C_0-полугруппа), если для каждого $x \in E$ функция $exp(\cdot A)x : R \to E$ является п.п. функцией.*

Определение 10.2.2 *Будем говорить, что C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ асимптотически почти периодична, если $R_{exp(\cdot A)x}$ относительно компактно для каждого $x \in E$.*

Определение 10.2.3 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется* ***равномерно почти периодической****, если семейство функций $\{exp(tA)x : x \in E,\ \|x\| = 1,\ t \geq 0\}$ равномерно почти периодично.*

Слабая п.п. C_0-полугруппа определяется аналогично через п.п функций вида $\langle exp(\cdot A)x, x^* \rangle$ при любых $x \in E,\ x^* \in E^*$.

Предложение 10.2.1 *[6] Для асимптотически п.п. C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ пространство E расщепляется в прямую сумму $E = E_{st} \oplus E_{ap}$ (опр. см. на стр. 73).*

Предложение 10.2.2 *[52] П.п. C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ всегда вкладывается в п.п. C_0-группу $\mathcal{T}(\cdot)$ путем*

$$\mathcal{T}(\cdot) = \begin{cases} exp(tA), & t \geq 0, \\ exp(-tA)^{-1}, & t < 0. \end{cases}$$

За C_0-группой $\mathcal{T}(\cdot)$ сохраним обозначение $exp(\cdot A)$.

Теорема 10.2.1 *[52] C_0-группа операторов $exp(\cdot A)$ является п.п. тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

(i) C_0-группа $exp(\cdot A)$ равномерно ограничена;

(ii) спектр $\sigma(A) \subseteq iR$;

(iii) множество линейных комбинаций собственных векторов производящего оператора A плотно в пространстве E.

Предложение 10.2.3 *[52] Пусть E секвенциально полно (например, E - рефлексивно). В этом случае C_0-группа $exp(\cdot A)$ является п.п. C_0-группой тогда и только тогда, когда она слабо п.п.*

Предложение 10.2.4 *[52] Пусть $exp(\cdot A)$- равномерно ограниченная C_0-группа в рефлексивном пространстве E. Если функции $exp(\cdot A)x$ при всех $x \in R(A)$ почти периодичны, то $exp(\cdot A)$ является п.п. C_0-группой.*

Предложение 10.2.5 *[52] Пусть C_0-группа $exp(\cdot A)$ почти периодична. Пусть $i\eta\,(\eta \in R)$- изолированная точка спектра $\sigma(A)$. Тогда $i\eta$ - простой полюс резольвенты $R(\lambda, A)$, $\quad i\eta \in P\sigma(A)$ и соответствующий проектор Рисса дается формулой*

$$P(i\eta)x = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int\limits_0^t e^{-i\eta s} exp(sA)x\, ds.$$

Предложение 10.2.6 *[6] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, 0)$ и $\sigma(A) \cap iR$ не более, чем счетно, и для каждого собственного значения $i\mu \in \sigma(A)\,(\mu \in R)$, оператора A и каждого функционала $y^* \in N(i\mu I^* - A^*)$, $y^* \neq 0$, найдется такой элемент $x \in N(i\mu I - A)$, что $\langle x, y^*\rangle \neq 0$. Тогда C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является асимптотически п.п.*

Предложение 10.2.7 *[6] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, 0)$ и пространство E рефлексивно. Если $\sigma(A) \cap iR$ не более, чем счетно, то C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ асимптотически п.п.*

Предложение 10.2.8 *[6] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является асимптотически п.п., то*

$$nul\,(i\mu I - A) = nul\,(i\mu I^* - A^*)$$

при всех $\mu \in R$. В частности, $N(i\mu I - A) = \{0\}$ только тогда, когда $N(i\mu I^* - A^*) = \{0\}$.

Предложение 10.2.9 *[52] Если C_0-группа $exp(\cdot A)$ почти периодична и $P\sigma(A)$ ограничен, то производящий оператор $A \in B(E)$.*

Предложение 10.2.10 *[52] Равномерно п.п. C_0-полугруппа (ср. с предложением 10.2.2) вкладывается в равномерно п.п. C_0-группу операторов.*

Предложение 10.2.11 *[52] C_0-группа $exp(\cdot A)$ является равномерно почти периодической только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

(i) C_0-группа $exp(\cdot A)$ равномерно ограничена;

(ii) множество $\frac{\sigma(A)}{i}$ является гармоническим подмножеством R;

(iii) множество линейных комбинаций собственных векторов производящего оператора A плотно в пространстве E.

Предложение 10.2.12 *[52] Если $exp(\cdot A)$ равномерно почти периодична, то $\sigma(A)$ состоит из простых полюсов резольвенты $R(\lambda, A)$ и $\sigma(A) = P\sigma(A)$.*

Предложение 10.2.13 *[52] Пусть $A \in B(E)$. В этом случае C_0-группа $exp(\cdot A)$ является равномерно п.п. группой тогда и только тогда, когда она равномерно ограничена и E представимо в виде прямой суммы конечного числа собственных подпространств оператора A.*

Предложение 10.2.14 *[51] C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является периодической с периодом T тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

(i) множество $\frac{T}{2\pi i}\sigma(A) \subseteq Z$, где Z — множество целых чисел;

(ii) множество линейных комбинаций собственных векторов производящего оператора A плотно в пространстве E.

Предложение 10.2.15 *[51] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ периодична с периодом T. Тогда*

(i) резольвента $R(\lambda, A)$ -мероморфная функция, имеющая лишь полюсы первого порядка ;

(ii) $R(\lambda, A) = (1 - e^{-\lambda T})^{-1} \int_0^T e^{-\lambda s} exp(sA)\, ds$;

(iii) ортогональные спектральные проекторы, соответствующие полюсам λ_k , имеют вид

$$P(\lambda_k) = \frac{1}{T} \int\limits_0^T e^{-\lambda_k s} exp(sA)\, ds;$$

(iv) для любого $x \in E$

$$AP(\lambda_k)x = \lambda_k P(\lambda_k)x \quad \text{и} \quad exp(tA)P(\lambda_k)x = e^{\lambda_k t}P(\lambda_k)x.$$

Предложение 10.2.16 *[51] Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *периодична;*

(ii) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *слабо периодична;*

(iii) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *периодична как оператор-функция.*

Предложение 10.2.17 *[51] Пусть функция* $exp(\cdot A)x : R \to E$ *периодична для каждого* $x \in D(A)$*. Тогда* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *периодична.*

Предложение 10.2.18 *[51] Пусть* $E = H$ *и* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *периодична. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *является сжимающей;*

(ii) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *является унитарной;*

(iii) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *является нормальной.*

Если C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *является еще и самосопряженной, то* $exp(tA) \equiv I$ *при всех* $t \geq 0$*.*

Предложение 10.2.19 *[51] Пусть* $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$*,* P*- проектор. Тогда* $exp(2\pi A) = P$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) спектр $\sigma(A) \subseteq iZ$ *;*

(ii) спектр $\sigma(A)$ *состоит из простых полюсов резольвенты;*

(iii) существует константа $M \geq 0$ *такая, что*

$$\|(I - P)R(\lambda, A)\| \leq M \max\{1, e^{-2\pi Re\lambda}\}, \quad Re\lambda \neq 0;$$

(iv) множество линейных комбинаций собственных векторов производящего оператора A *плотно в пространстве* E*.*

Определение 10.2.4 *Функция* $f(\cdot) : R \to E$ *называется* ***почти автоморфной****, если для любой последовательности* $\{\alpha'_n\}$ *существует подпоследовательность* $\{\alpha_n\} \subseteq \{\alpha'_n\}$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} f(t + \alpha_n) = g(t) \quad \text{при любом} \quad t \in R$$

и

$$\lim_{n\to\infty} g(t - \alpha_n) = f(t) \quad \text{при любом} \quad t \in R.$$

Предложение 10.2.20 *[168] Пусть $B \in B(E)$ и $u(\cdot)$ - почти-автоморфное решение уравнения $u'(t) = Bu(t)$, $t \in R$. Тогда либо $\inf\limits_{t\in R} \|u(t)\| > 0$, либо $u(t) \equiv 0$ при $t \in R$.*

Предложение 10.2.21 *[169] Предложение 10.2.20 остается в силе, если $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$, а $u(\cdot)$ является почти периодическим решением уравнения из предложения 10.2.20.*

Предложение 10.2.22 *[167] Предложение 10.2.21 остается в силе, если условие почти периодичности заменить на условие слабой почти периодичности решения $u(\cdot) : R \to D(A)$ уравнения из предложения 10.2.20.*

10.3 Почти периодические и периодические семейства $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$

Как отмечалось, если полугруппа $exp(\cdot A)$ почти периодическая, то $exp(tA)$ - биекция для каждого $t \geq 0$, и она продолжается в C_0-группу $exp(tA) = exp(-tA)^{-1}$ для $t < 0$. Таким образом, получаем, что $exp(\cdot A)$ является почти периодический C_0-группой. В этом случае можно продолжить C_0-семейство $U(\cdot)$ (соответственно C_0-семейство $V(\cdot)$) с $[0,\infty)$ на всю ось R так, что для $\lambda > \omega$ и $t \in R$

$$U(t) = (\lambda - A)\int_0^t exp(sA)ds\lambda\hat{U}(\lambda) \text{ и } V(t) = \lambda\hat{V}(\lambda)(\lambda - A)\int_0^t exp(sA)ds.$$

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие почти периодичности C_0-семейств мультипликативного и аддитивного возмущения.

Теорема 10.3.1 *Каждое C_0-семейство мультипликативных возмущений $U(\cdot)$ для $exp(\cdot A)$ является почти периодическим, если и только если $exp(\cdot A)$ почти периодическая и $0 \in \rho(A)$. То же самое утверждение справедливо для C_0-семейства аддитивного возмущения $V(\cdot)$.*

Доказательство. Пусть $exp(\cdot A)$ является почти периодической. Тогда из условия $0 \in \rho(A)$ вытекает, что оператор-функция

$\int_0^t exp(sA)ds = \int_0^t exp(sA)AA^{-1}ds = (exp(tA) - I)A^{-1}$, $t \in R$,

является также почти периодической, и из предложения 2.4.1 (iv) следует почти периодичность $U(\cdot)$.

Наоборот, если каждое C_0-семейство мультипликативных возмущений $U(\cdot)$ для $exp(\cdot A)$ почти периодическое, тогда два частных C_0-семейства мультипликативных возмущений $\{exp(tA) - I,\ t \geq 0\}$ и $\{\int_0^t exp(sA)\,ds,\ t \geq 0\}$ являются почти периодическими. Если $x \in N(A)$, тогда $x = exp(sA)x - \int_0^s exp(\zeta A)Axd\zeta = exp(sA)x$ для всех $s \geq 0$ и $x = t^{-1}\int_0^t exp(sA)x\,ds \to 0$ при $t \to \infty$, потому что любая почти периодическая функция ограничена. Следовательно, A - инъективен. Поскольку почти периодическая функция эргодична (см. например [40], с.21), то предел $\frac{1}{t}\int_0^t \int_0^s exp(\tau A)x\ d\tau\ ds$ существует при $t \to \infty$ для каждого $x \in X$. Так как $exp(\cdot A)$ равномерно ограничена, то из предложения 7.2.40 следует, что $R(A) = X$. Поэтому $0 \in \rho(A)$.

Из предыдущей теоремы можно легко вывести следующую теорему.

Теорема 10.3.2 *Каждое C_0-семейство мультипликативных возмущений $U(\cdot)$ для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ является периодическим, если и только если $exp(\cdot A)$ периодическая и $0 \in \rho(A)$. В этом случае $U(\cdot)$ и $exp(\cdot A)$ имеют один и тот же период. То же самое утверждение справедливо для C_0-семейства $V(\cdot)$.*

Глава 11

Компактные полугруппы

Множество компактных операторов, действующих в E, будем обозначать $B_0(E)$ (или $B_0(E, F)$ в случае разных пространств).

Свойство компактности позволяет в бесконечномерном случае опираться на конечномерную интуицию. К счастью, на практике компактные операторы в бесконечномерных пространствах весьма распространены и это понятие оказывается чрезвычайно содержательным.

Свойство компактности полугруппы играет существенную роль, в частности, в теории управления, а также при аппроксимации полулинейных задач. Мы вернемся к этим вопросам в следующих томах.

11.1 Компактность C_0-полугрупп

Определение 11.1.1 *Полугруппа $exp(\cdot A)$ называется* ***компактной, начиная с некоторого*** *t_0 (или* ***становящейся компактной****), если при $t > t_0$ операторы $exp(tA)$ компактны. Если $t_0 = 0$, то C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется* ***компактной****.*

Предложение 11.1.1 *[122] Пусть полугруппа $exp(\cdot A)$ становится компактной. Тогда для любого числа $\alpha > 0$ найдется такое разложение пространства $E = E_f \oplus E_d$, что E_f, E_d инвариантны относительно C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$, подпространство E_f конечномерно, а C_0-полугруппа $exp(\cdot A)|_{E_d}$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t} exp(tA|_{E_d}) = 0. \tag{11.1}$$

Предложение 11.1.2 *[122] Если производящий оператор A C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ имеет компактную резольвенту, а сама C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ непрерывна по норме в точке t_0 , то C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ компактна, начиная с t_0.*

Теорема 11.1.1 *[45] C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ является компактной тогда и только тогда, когда она непрерывна по норме при любом $t > 0$ и производящий оператор A имеет компактную резольвенту.*

Предложение 11.1.3 *[45] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ компактна, то пересечение $\sigma(A) \cap \{z \in C : a < Rez < b\}$ при любых , но фиксированных $a, b \in R$, содержит конечное число собственных значений оператора A.*

Предложение 11.1.4 *[122] Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ компактна, то $\sigma(A) = P\sigma(A)$.*

Определим множество

$$Com(A) := \{t > 0 : exp(tA) - I \text{ компактный оператор}\}.$$

Предложение 11.1.5 *[101] Если $Com(A) \neq \emptyset$, то C_0-полугруппа $exp(tA)$ обратима при любом $t \geq 0$.*

Теорема 11.1.2 *[101] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $Com(A) = \overline{R}_+$;
(ii) производящий оператор A компактен;
(iii) оператор $\lambda R(\lambda, A) - I$ компактен при любом $\lambda > \omega(A)$.

Предложение 11.1.6 *[101] Если $Com(A)$ — плотное подмножество R_+ без внутренних точек, то оператор A не ограничен.*

Предложение 11.1.7 *[101] Если производящий оператор A не ограничен и $Com(A) \neq \emptyset$, то $\overline{\lim}_{\tau \to 0+} \|exp(\tau A) - I\| \geq 2$.*

Определение 11.1.2 *C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ называется квазикомпактной, если*

$$\lim_{t \to \infty} \inf\{\|exp(tA) - K\| : K \in B_0(E)\} = 0. \tag{11.2}$$

Предложение 11.1.8 *[122] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ следующие условия равносильны:*

(i) C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ квазикомпактна;

(ii) $E\omega(A) < 0$;

(iii) существуют такие $t_0 > 0$ и $K \in B_0(E)$, что

$$\|exp(t_0 A) - K\| < 1.$$

Предложение 11.1.9 *[122] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ квазикомпактна. Тогда множество $\{\lambda \in \sigma(A) : Re\lambda \geq 0\}$ конечно (возможно, пусто) и содержит только полюсы конечной алгебраической кратности. Обозначив через $\lambda_1, ..., \lambda_m$ эти полюсы, через $k(1), ..., k(m)$ – их порядки, а соответствующие проекторы — $P(\lambda_k)$, имеем*

$$exp(tA) = \mathrm{T}_1(t) + ... + \mathrm{T}_m(t) + R_m(t), \quad t \geq 0, \tag{11.3}$$

где $T_l(t) = e^{\lambda_l t} \sum_{j=0}^{k(l)-1} t^j (A - \lambda_l I) P(\lambda_l)/j!$, $t \geq 0$, и $\|R_m(t)\| \leq ce^{-\varepsilon t}$ при некоторых константах c и $\varepsilon > 0$.

Предложение 11.1.10 *[122] Пусть полугруппа $exp(\cdot A)$ становится компактной. Тогда спектр $\sigma(A)$ — счетное множество $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ (возможно, конечное или пустое) и содержит полюсы только конечной алгебраической кратности. Более того, множество $\{\mu \in \sigma(A) : Re\mu \geq r\}$ конечно для любого $r \in R$. Если кратности полюсов — $k(l)$, а соответствующие проекторы — $P(\lambda_k)$, то для каждого m имеем разложение (11.3), где $\|R_m(t)\| \leq c \cdot e^{(\varepsilon + Re\lambda_m)t}$, $Re\lambda_{p+1} \leq Re\lambda_p$, при некоторых константах $\varepsilon > 0$ и $c = c(m, \varepsilon)$.*

11.2 Компактность семейств $U(\cdot), V(\cdot)$

Семейство $U(\cdot)$ (соответственно семейство $V(\cdot)$) называется ***компактным,*** если оператор $U(t)$ (соответственно $V(t)$) компактен для каждого $t \geq 0$. В этой секции мы обсуждаем условия компактности $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$.

Предложение 11.2.1 *Если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ компактна и если семейство мультипликативного возмущения $U(\cdot)$ по норме непрерывно в нуле, тогда $U(\cdot)$ компактно.*

Доказательство. Из (2.16) следует, что $U(t+h) - U(t)$ компактен для каждого $t > 0$, $h \geq 0$. Используя условие $U(0) = 0$ и равномерную непрерывность $U(\cdot)$, получаем, что $U(h)$ компактен для каждого $h \geq 0$.

Предложение 11.2.2 *Если $exp(\cdot A)$ - компактная C_0-полугруппа, тогда все C_0-семейства мультипликативного возмущения и C_0-семейства аддитивного возмущения для $exp(\cdot A)$ непрерывны по норме на $(0, \infty)$.*

Доказательство. Поскольку по теореме 11.1.1 $exp(\cdot A)$ непрерывна по норме на $(0, \infty)$ то утверждение немедленно следует из формул (iv) и (v) в предложении 2.4.1.

Предложение 11.2.3 *Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ такова, что каждое C_0-семейство мультипликативного возмущения $U(\cdot)$ (или C_0-семейства аддитивного возмущения $V(\cdot)$) для $exp(\cdot A)$ компактно. Тогда E должно быть конечномерно.*

Доказательство. В соответствии с предположением, по крайней мере два частных C_0-семейства мультипликативного возмущения

$$\Big\{U_1(t) = exp(tA) - I,\ t \geq 0\Big\} \quad \text{и} \quad \Big\{U_2(t) = \int_0^t exp(sA)\, ds,\ \ t \geq 0\Big\}$$

компактны. Тогда, с одной стороны, по теореме 11.1.2, $exp(tA) - I$ компактен для всех $t > 0$, если и только если генератор A компактен. С другой стороны, поскольку $exp(\cdot A)$ непрерывна по норме на $(0, \infty)$, то $exp(\cdot A)$ есть предел по норме компактных операторов $h^{-1}\Big(U_2(t+h) - U_2(t)\Big)$ при $h \to 0$ и, следовательно, резольвента оператора A компактна. Значит, оператор I тоже компактен. Это может случиться тогда и только тогда, когда E конечномерно.

Глава 12

Сопряженные полугруппы

Переход к сопряженным пространствам в теории полугрупп оказывается значительно сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Понятие сопряженной полугруппы, введенное Филлипсом, находит широкое применение в приложениях. В частности, эти понятия широко используются в теории возмущений.

12.1 Сопряженные пространства

Пусть E^* - пространство, сопряженное банахову пространству E.

Определение 12.1.1 *Для каждого элемента $x \in E$ формула $\langle x, y^* \rangle$ определяет на пространстве E^* функционал x^{**} путем $\langle y^*, x^{**} \rangle := \langle x, y^* \rangle$. Отображение $\pi : x \to x^{**}$ называют **естественным отображением** пространства E в E^{**}.*

Предложение 12.1.1 *Естественное отображение π изометрично, т.е. $\|x\| = \|x^{**}\|$ при любом $x \in E$.*

12.2 Сопряженные по Филлипсу полугруппы

Пусть операторы $exp(\cdot A)^* := \{exp(tA)^*,\ t \geq 0\}$ — семейство сопряженных операторов к C_0-полугруппе $exp(\cdot A)$. Семейство $exp(\cdot A)^*$ удовлетворяет условиям (i)-(ii) определения 1.2.1, т.е. обладает полугрупповым свойством и обращается в единичный оператор при $t = 0$, и для него справедлива оценка $\|exp(tA)^*\| \leq Me^{\omega t}$, однако оно, вообще говоря, не обязано удовлетворять условию (iii), т.е. быть сильно непрерывным в нуле при всех $x^* \in E^*$ (непрерывность понимается в смысле сильной топологии в E^*).

Предложение 12.2.1 *В случае рефлексивного пространства E из предположения $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$ следует, что $D(A^*)$ плотно в E^* в сильной топологии. В общем случае это не так.*

Предложение 12.2.2 *[37] Пусть $A \in \mathcal{C}(E)$. Тогда имеет место равенство $R(\lambda, A^*) = R(\lambda, A)^*$.*

Определение 12.2.1 *Обозначим через $E^{\odot}$ подпространство (замкнутое) пространства E^* , на котором семейство $exp(\cdot A)^*$ сильно непрерывно по t в нуле, и определим полугруппу $exp(\cdot A)^{\odot}$ как сужение $exp(\cdot A)^*|_{E^{\odot}}$.*

Предложение 12.2.3 *Множество $E^{\odot}$ является w^*-плотным в E^*.*

Предложение 12.2.4 *[166] Для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ имеем*

(i) отображение $t \to exp(tA)^*x^*$ является w^*-непрерывным по $t \in \overline{R}_+$ при любом $x^* \in E^*$;

(ii) отображение в (i) является w^*-дифференцируемым справа в нуле тогда и только тогда, когда элемент $x^* \in D(A^*)$;

(iii) если $x^* \in D(A^*)$, то при $t > 0$ имеем $exp(tA)^*x^* \in D(A^*)$ и функция в (i) w^*-дифференцируема, причем

$$\frac{d}{dt}\langle x, exp(tA)^*x^*\rangle = \langle x, A^*exp(tA)^*x^*\rangle = \langle x, exp(tA)^*A^*x^*\rangle \qquad (12.1)$$

при всех $x \in E$ и $t \geq 0$;

(iv) область определения $D(A^{\odot})$ w^*-плотна в E^*, где $A^{\odot}$ - производящий оператор полугруппы $exp(\cdot A)^{\odot}$, определенной на $E^{\odot}$. Далее всюду вместо $exp(\cdot A)^*|_{E^{\odot}}$ будем писать $exp(\cdot A^{\odot})$;

(v) действие семейства $exp(\cdot A)^*$ восстанавливается по формуле

$$exp(tA)^* = (\lambda I - A^*)exp(tA)^{\odot}(\lambda I - A^*)^{-1}.$$

Теорема 12.2.1 *[166] Для $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$ имеем*

(i) подпространство $E^{\odot}$ совпадает с $\overline{D(A^*)}$, где замыкание берется в сильной топологии E^* ;

(ii) подпространство $E^{\odot}$ инвариантно относительно семейства $exp(\cdot A)^*$, и определенное выше семейство $exp(\cdot A)^{\odot}$ является C_0-полугруппой операторов на $E^{\odot}$;

(iii) оператор $A^{\odot}$ есть часть оператора A^* в $E^{\odot}$;

(iv) если пространство E рефлексивно, то $E^{\odot} = E^*$ и $A^{\odot} = A^*$.

Предложение 12.2.5 *[114] Пусть E - пространство Гротендика. Тогда семейства $exp(\cdot A)^*$, $exp(\cdot A)^{**}$, непрерывны в сильных топологиях в E^* и E^{**} соответственно, т.е. $E^* = E^{\odot}$ и $E^{**} = E^{\odot\odot}$.*

Предложение 12.2.6 *[59] Пусть $A \in \mathcal{H}(\theta, \omega)$. Тогда оператор-функция $exp(\cdot A)^*$ допускает голоморфное продолжение в сектор $\Sigma(\theta)$, причем*
(i) $exp(\zeta_1 A)^* exp(\zeta_2 A)^* = exp((\zeta_1 + \zeta_2)A)^*$ при любых $\zeta_1, \zeta_2 \in \Sigma(\theta)$,
(ii) $w^*\text{-}\lim_{\zeta \to 0} exp(\zeta A)^* x^* = x^*$ при всех $x^* \in E^*$ и $|arg\zeta| \le \alpha < \theta$.

Рассматривая C_0-полугруппу $exp(\cdot A^{\odot})$ на $E^{\odot}$ с сопряженным пространством $E^{\odot *}$ и повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые привели нас от E к $E^{\odot}$, получим пространства $E^{\odot *}$, и $E^{\odot\odot}$ с C_0-полугруппой $exp(\cdot A^{\odot\odot})$.

Определение 12.2.2 *Банахово пространство E называется $\odot$- рефлексивным говорят (* ***солнышко-рефлексивным****) согласно оператору $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$ (или относительно полугруппы $exp(\cdot A)$), если $E = E^{\odot\odot}$.*

Определение 12.2.3 *Топологию в E, порожденную системой окрестностей нуля*

$$\{x \in E : \ |\langle x, x_i^{\odot} \rangle| < \varepsilon, \ i = 1, 2, ..., n\},$$

где $x_1^{\odot}, ..., x_n^{\odot} \in E^{\odot}$ и $\varepsilon > 0$, назовем $\sigma(E, E^{\odot})$-топологией.

Предложение 12.2.7 *[158] Справедливы следующие утверждения:*

(i) $\sigma(E, E^{\odot})$-топология локально выпукла и слабее w-топологии в E;

(ii) каждое выпуклое замкнутое $\{exp(tA) : t \ge 0\}$-инвариантное множество является $\sigma(E, E^{\odot})$-замкнутым;

(iii) ограниченное множество $\Omega \subset E$ является $\sigma(E, E^{\odot})$- компактным тогда и только тогда, когда множество $R(\lambda, A)\Omega$ является $\sigma(E, E^{\odot})$- компактным;

(iv) если последовательность операторов T_n сходится к оператору T равномерно (по норме) и все операторы T_n являются $\sigma(E, E^{\odot})-$ компактными, то и их предел T также $\sigma(E, E^{\odot})$-компактен.

Предложение 12.2.8 *[66], [37], [79] Следующие условия эквивалентны:*

(i) Пространство E является $\odot$-рефлексивным согласно оператору $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$;

(ii) резольвента $R(\lambda, A)$ является $\sigma(E, E^{\odot})$-слабо компактной при любом $\lambda \in \rho(A)$;

(iii) пространство $E^{\odot}$ является $\odot$-рефлексивным согласно оператору $A^{\odot}$;

(iv) резольвента $R(\lambda, A)$ является w-компактной;

(v) резольвента $R(\lambda, A)$ является $\sigma(E, E^{\odot})$-компактной.

Определение 12.2.4 *Полугруппу на E^*, непрерывную в нуле в w^*-топологии, будем называть C_0^*-полугруппой.*

Предложение 12.2.9 *[2] Для C_0^*-полугруппы $exp(\cdot A)$ существуют такие константы* $\mathrm{M} \geq 1$ *и* $\beta \geq \inf_{t>0}(t^{-1}\ln\|exp(tA)\|)$, *что*

$$\|exp(tA)\| \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0. \tag{12.2}$$

Предложение 12.2.10 *[2] Пусть для C_0^*-полугруппы $exp(\cdot A)$ дано множество $D \subseteq D(A)$, которое w^*- плотно в E и инвариантно относительно $exp(\cdot A)$. Тогда D- сердцевина оператора A , т.е. $w^* - w^*$ замыкание сужения $A|_D$ совпадает с A .*

Определение 12.2.5 *Элемент $\overline{x} \in E$ назовем **голоморфным** для оператора A, если $\overline{x} \in D(A^\infty)$ и функция*

$$z \to \sum_{k=0}^{\infty} z^k \|A^k \overline{x}\|/k!\,, \quad z \in C, \tag{12.3}$$

является аналитической функцией.

Предложение 12.2.11 *[2] Оператор $A \in \mathcal{C}(E^*)$ является производящим оператором C_0^* - группы только тогда, когда он w^* -плотно определен, $w^* - w^*$ замкнут и удовлетворяет следующим условиям:*

(i) существуют такие $M \geq 1, \beta \geq 0$, что

$$\|(I - \alpha A)^k x\| \geq M^{-1}(1 - \alpha\beta)^k \|x\| \quad при \quad всех \quad x \in D(A^k), \tag{12.4}$$

всех α с $|\alpha|\beta < 1$ и $k = 1, 2, ...$;

(ii) либо $R(I - \alpha A)$ при всех α с $0 < \alpha\beta < 1$ совпадает со всем пространством E^*, либо A имеет w^*-плотное множество голоморфных элементов и любой элемент пространства можно аппроксимировать равномерно ограниченной сетью голоморфных элементов.

Предложение 12.2.12 *[2] Для C_0^* - полугруппы $exp(\cdot A)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) элемент $x \in D(A)$;

(ii) $\sup\left\{\frac{\|(exp(tA)-I)x\|}{t} : \quad t \in (0,1]\right\} < \infty$.

Для C_0-полугрупп это утверждение, вообще говоря, неверно.

Предложение 12.2.13 *[2] Для C_0- или C_0^* -группы $exp(\cdot A)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что

$$\|exp(tA) - I\| \leq 1 - \varepsilon \quad \text{при} \quad \text{всех} \quad t \in [0, \delta); \tag{12.5}$$

(ii) $\lim_{t\to 0} \|exp(tA) - I\| = 0.$

Предложение 12.2.14 *[2] Пусть заданы две C_0^*-полугруппы $exp(\cdot A)$, $exp(\cdot G)$. Следующие условия равносильны:*

(i) $\|exp(tA) - exp(tG)\| = O(t)$ при $t \to 0$;

(ii) $D(A) = D(G)$ и оператор $A - G$ - ограниченный оператор из $D(G)$ в E^*.

Предложение 12.2.15 *[136] Пусть полугруппа $exp(\cdot A)$ задана на пространстве Гротендика E и*

a) $\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\|CH(t,1)\|}{t} < \infty$;

b) $s\text{-}\lim_{t\to\infty}(u/t)exp(tA)CH(u,1)x = 0$ *при всех* $x \in E$, $u > 0$.

Тогда

(i) оператор $P := s\text{-}(C,1)\lim_{t\to\infty} exp(tA)$ является проектором в E, причем

$R(P) = \cap_{t>0} N(exp(tA) - I), N(P) = \overline{span(\cup_{t\geq 0} R(exp(tA) - I))}$

и

$D(P) = \{x \in E : \exists t_n \to \infty, w\text{-}\lim_{n\to\infty} t_n^{-1} CH(t_n, 1)x$ *существует* $\}$;

(ii) оператор $Qx^* = w^* - \lim_{t\to\infty} CH(t,1)^* x^*$ является проектором в E^*, причем $R(Q) = \cap_{t>0} N(exp(tA)^* - I)$, $N(Q) = span\{\cup_{t>0} R(exp(tA)^* - I^*)\}$ и $D(Q) = \{x^* \in E^* : \exists t_n \to \infty, w^*\text{-}\lim CH(t_n, 1)x^*$ существует $\}$.

Кроме того, $N(A) = R(P), N(A^*) = R(Q), R(A) = N(P), \overline{R(A^*)} = N(Q)$.

Предложение 12.2.16 *[136] Пусть E - пространство Гротендика. C_0 - полугруппа $exp(\cdot A)$ сильно $(C,1)$ эргодична тогда и только тогда, когда выполняются условия a) и b) из предложения 12.2.15 и дополнительно w^*-$cl(R(A^*)) = \overline{R(A^*)}$.*

Глава 13

Возмущения полугрупп

Теория возмущений, по-видимому, — одно из немногих средств, которые позволяют использовать абстрактные результаты на практике. Нам хорошо известны свойства модельных, простейших операторов, а в приложениях объекты, как правило, отличаются от модельных. Чтобы использовать абстрактные теоремы на практике, надо знать, что отличие от модельного оператора не выводит из класса операторов, к которым применим абстрактный результат.

13.1 Общие мультипликативные теоремы

Одной из первых попыток исследовать мультипликативные возмущения была работа [106]. Мы приводим здесь иной подход (см. [131]) и излагаем общие мультипликативные теоремы о возмущениях и некоторые следствия из них.

Определение 13.1.1 *Говорят, что оператор $C \in B(E)$ принадлежит* ***классу*** *$Mul(A)$* ***мультипликативных возмущений*** *производящего оператора C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$, если оператор $B = C - I$ удовлетворяет условию (M):*
Для любой непрерывной функции $f \in C([0,t];E)$
(M_a) $\quad \int_0^t exp((t-s)A)B\,f(s)\,ds \in D(A)$,
(M_b) $\quad \|A\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)\,ds\| \le \gamma_B(t)\cdot\|f\|_{C([0,t];E)}$,
где $\gamma_B : [0,\infty) \to [0,\infty)$ - некоторая непрерывная неубывающая функция с $\gamma_B(0) = 0$, и $\|f\|_{C([0,t];E)} = \sup_{0\le s\le t}\|f(s)\|$.

Замечание 13.1.1 *Если (M_a) и (M_b) выполняются для всех функций в плотном подмножестве пространства $C([0,t];E)$, тогда из замкнутости A, и* *это можно легко видеть, следует, что условия* (M_a) *и* (M_b) *выполняются для всех* f *в* $C([0,t];E)$. *Следовательно, так как* (M_a) *выполняется для всех* f *из множества* $C^1([0,t];E)$, *которое является плотным в* $C([0,t];E)$, *условие* (M) *можно заменить эквивалентным условием:*

(M') $\|A\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)ds\| \leq \gamma_B(t)\|f\|_{C([0,t];E)}$ *для всех* $f \in C^1([0,t];E)$. *Таким образом, практически, мы должны проверять только условие* (M').

Теорема 13.1.1 *Если оператор* C *принадлежит* $Mul(A)$, *тогда и* AC *и* CA *- производящие операторы* C_0*-полугрупп. Кроме того,*

$$\|exp(tA) - exp(tAC)\| = O(\gamma_B(t)) \text{ при } t \to 0+.$$

Доказательство. Доказательство теоремы 13.1.1 следует доказательству теоремы 5 в [82]. Предположим, что $\|exp(tA)\| \leq M\, e^{\omega t}$ для всех $t \geq 0$. Пусть $B = C - I$. Сначала проверим, что для больших λ операторы $\lambda - A(I+B)$ и $\lambda - (I+B)A$ являются обратимыми. Возьмем τ настолько малым, что $M\gamma_B(\tau) < \frac{1}{4}$. Тогда по условию (M) для всех $x \in E$ имеем

$$\|A(\lambda - A)^{-1}Bx\| = \|A\int_0^\infty e^{-\lambda t} exp(tA)Bx\,dt\| =$$

$$= \|\sum_{j=0}^\infty A\int_{j\tau}^{(j+1)\tau} e^{-\lambda t} exp(tA)Bx\,dt\| =$$

$$= \|\sum_{j=0}^\infty e^{-\lambda j\tau} exp(j\tau A)A\int_0^\tau e^{-\lambda t} exp(tA)Bx\,dt\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^\infty Me^{-(\lambda-\omega)j\tau}\|A\int_0^\tau exp((\tau - s)A)B(e^{\lambda(s-\tau)}x)\,ds\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^\infty Me^{-(\lambda-\omega)j\tau}\gamma_B(\tau)\|x\| = M[1 - e^{-(\lambda-\omega)\tau}]^{-1}\gamma_B(\tau)\|x\|.$$

Возьмем λ достаточно большим так, что $e^{-(\lambda-\omega)\tau} < \frac{1}{2}$. Тогда $\|A(\lambda - A)^{-1}B\| < \frac{1}{2}$. Пусть

$$J(\lambda) := \sum_{j=0}^\infty (A(\lambda - A)^{-1}B)^j(\lambda - A)^{-1}$$

и

$$K(\lambda) := (\lambda - A)^{-1} + (\lambda - A)^{-1}B\sum_{j=0}^\infty (A(\lambda - A)^{-1}B)^j A(\lambda - A)^{-1}.$$

Тогда те же самые выкладки, как и на странице 132 [81], показывают, что

$$J(\lambda) = (\lambda - A(I+B))^{-1} \text{ и } K(\lambda) = (\lambda - (I+B)A)^{-1}.$$

Чтобы показать, что $A(I+B)$ – производящий оператор, рассмотрим интегральное уравнение:

$$v(t) = exp(tA)x + A\int_0^t exp((t-s)A)Bv(s)\,ds, \;\; 0 \le t \le \tau. \tag{13.1}$$

Сначала проверим, что при выполнении условия (M) функция

$g(t) := A\int_0^t exp\Big((t-s)A\Big)Bf(s)\,ds$ является непрерывной для любой $f \in C([0,\tau];E)$. Определим для всех $0 \le h \le t \le \tau$ функцию

$$f_h(s) = \begin{cases} f(s-h) & \text{для} \;\; h \le s \le t+h, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда для всех $t \in [0, \tau - h]$

$$\|g(t+h) - g(t)\| = \|A\int_0^{t+h} exp((t+h-s)A)B\Big(f(s) - f_h(s)\Big)\,ds\| \le$$

$$\le \|A\int_h^{t+h} exp((t+h-s)A)B(f(s) - f_h(s))\,ds\| +$$

$$+\|A\int_0^{h} exp((t+h-s)A)B(f(s) - f_h(s))\,ds\| \le$$

$$\le \|A\int_0^{t} exp((t-s)A)B(f(s+h) - f(s))\,ds\| +$$

$$+\|exp(tA)A\int_0^{h} exp((h-s)A)Bf(s)\,ds\| \le$$

$$\le \gamma_B(t)\cdot\|f(s+h) - f(s)\|_{C([0,t];E)} + Me^{\omega t}\gamma_B(h)\cdot\|f\|_{C([0,h];E)}$$

сходится к 0 при $h \to 0$. Следовательно, линейный оператор

$$F: f \to A\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)\,ds$$

отображает $C([0,\tau];E)$ в себя . Кроме того,

$$\|(Ff)(t)\| = \|A\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)\,ds\| \le \gamma_B(t)\cdot\|f\|_{C([0,t];E)} < \frac{1}{2}\|f\|_{C([0,\tau];E)}.$$

Следовательно, оператор $I - F$ - обратим. Это означает, что (13.1) имеет единственное решение $v_x \in C([0,\tau];E)$ для каждого $x \in E$.

Для $0 \le t \le \tau$, положим $S(t)x = v_x(t)$. Тогда в силу (13.1) при $t \in [0,\tau]$

$$S(t)x = exp(tA)x + A\int_0^t exp((t-s)A)BS(s)x\,ds. \tag{13.2}$$

Для $\tau \le t \le 2\tau$ положим $S(t)x := v_{S(\tau)x}(t-\tau)$, и далее, $S(t)x := v_{S(n\tau)x}(t-n\tau)$ для $n\tau \le t \le (n+1)\tau$. Таким образом, мы определили функцию $S(\cdot)$ на $[0,\infty)$.

Чтобы показать, что (13.2) выполняется для всех $t \ge 0$, применим индукцию. Пусть (13.2) выполняется для $0 \le t \le n\tau$. Тогда для $n\tau \le t \le (n+1)\tau$ имеем

$$S(t)x = v_{S(n\tau)x}(t-n\tau) =$$

$$= exp((t-n\tau)A)S(n\tau)x + A\int_0^{t-n\tau} exp((t-n\tau-s)A)Bv_{S(n\tau)x}(s\,)\,ds =$$

$$= exp((t-n\tau)A)\left[exp((n\tau)A)x + A\int_0^{n\tau} exp((n\tau-s)A)BS(s)x\,ds\right] +$$

$$+A\int_{n\tau}^t exp((t-s)A)Bv_{S(n\tau)x}(s-n\tau)\,ds =$$

$$= exp(tA)x + A\int_0^{n\tau} exp((t-s)A)BS(s)x\,ds + A\int_{n\tau}^t exp((t-s)A)BS(s)x\,ds =$$

$$= exp(tA)x + A\int_0^t exp((t-s)A)BS(s)x\,ds.$$

Ясно, что функция $S(\cdot)$, определенная выше, сильно непрерывна и $S(0)x = exp(0A)x = x$ для всех $x \in E$. Так как по определению $S(\cdot)$ удовлетворяет $S(t)x = v_{S(n\tau)x}(t-n\tau)x = S(t-n\tau)S(n\tau)x = S(t-n\tau)(S(\tau))^n x$ для $x \in E$ и $n\tau \le t \le (n+1)\tau$, то легко видеть, что $\|S(t)\| \le M_1 e^{\omega_1 t}, t \ge 0$, с $M_1 = \sup\{\|S(s)\|;\ 0 \le s \le \tau\}$ и $\omega_1 = \tau^{-1}\ln M_1$.

Теперь можно взять преобразование Лапласа в (13.2) и для всех больших λ получаем

$$\hat{S}(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} + (\lambda - A)^{-1}B\hat{S}(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} + [\lambda(\lambda - A)^{-1} - I]B\hat{S}(\lambda),$$

$$(I+B)\hat{S}(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} + \lambda(\lambda - A)^{-1}B\hat{S}(\lambda),$$

т.е. $R((I+B)\hat{S}(\lambda)) \subseteq D(A)$ и $(\lambda - A)(I+B)\hat{S}(\lambda) = I + \lambda B\hat{S}(\lambda)$. Следовательно, $[\lambda - A(I+B)]\hat{S}(\lambda) = I$. Поскольку, как мы показали, оператор $\lambda - A(I+B)$ - обратим для всех больших λ, то $\hat{S}(\lambda) = [\lambda - A(I+B)]^{-1}$. В силу теоремы 2.1.2, $S(\cdot)$ есть C_0-полугруппа с производящим оператором $A(I+B) = AC$.

Наконец, по теореме Desch и Schappacher ([82], теорема 1 (b)) получаем, что если ограниченный линейный оператор C на E таков, что AC порождает C_0-полугруппу и оператор $\lambda I - CA$ обратим для некоторого λ, тогда CA также порождает C_0-полугруппу. Оценка $\|S(t) - exp(tA)\| \leq \gamma_B(t) M_1 e^{\omega_1 t}$ следует из (13.2) и условия (M_b). Доказательство завершено.

Определение 13.1.2 *Говорят, что банахово пространство $(\mathcal{E}, |\cdot|)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{E})$ относительно A, если*
$(\mathcal{E}_a)$ *$\mathcal{E}$ непрерывно вложено в E,*
$(\mathcal{E}_b)$ *для любой непрерывной функции $\phi \in C([0,t];\mathcal{E})$*

$$\int_0^t exp((t-s)A)\phi(s)\,ds \in D(A),$$

$(\mathcal{E}_c)$ $\|A \int_0^t exp((t-s)A)\phi(s)\,ds\| \leq \gamma(t) \sup_{0 \leq s \leq t} |\phi(s)|_{\mathcal{E}}$,
где $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ - непрерывная неубывающая функция с $\gamma(0) = 0$.

Пространство $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию $(\mathcal{E})$, если, например, $\mathcal{E}$ есть $\mathcal{D}(A) = (D(A), \|\cdot\|_A)$ или класс Фавара $(F_{exp(\cdot A)}, |\cdot|_{F_{exp(\cdot A)}})$ (см. [84] в связи с этими и другими примерами).

Здесь $F_{exp(\cdot A)} = \{x \in E : \sup t^{-1} \|(exp(tA) - I)x\| < \infty\}$.

Легко проверить (см. также [84]), что класс $Mul(A)$ содержит класс $I + B(E, \mathcal{E})$. Таким образом, из теоремы 13.1.1 вытекает следующая теорема из [82], теорема 5.

Следствие 13.1.1 *Если $\mathcal{E}$ - банахово пространство, которое удовлетворяет условию $(\mathcal{E})$ относительно A, тогда $I + B(E, \mathcal{E}) \subseteq Mul(A)$, так что для каждого $B \in B(E, \mathcal{E})$ оба оператора $(I+B)A$ и $A(I+B)$ - производящие операторы C_0-полугрупп.*

Чтобы охарактеризовать класс $Mul(A)$, мы дадим следующее определение.

Определение 13.1.3 *Операторно-значная функция $U(\cdot)$ является функцией* ***с локально ограниченной полувариацией*** *, если для некоторого $t > 0$*

$$SV(U(\cdot), t) := \sup \left\{ \| \sum_{j=1}^{n} [U(t_j) - U(t_{j-1})] x_j \| \ : \ x_j \in E, \|x_j\| \leq 1 \right\} < \infty,$$

где supremum берется по всем разбиениям отрезка $[0,t]$. Операторнозначная функция $U(\cdot)$ является функцией ***с локально ограниченной сильной вариацией****, если для некоторого $t > 0$ и всех $x \in E$*

$$Var(U(\cdot)x, t) :=$$

$$= \sup \{ \sum_{j=1}^{n} \|(U(t_j) - U(t_{j-1}))x\| \ : \ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t, n \geq 1\} < \infty.$$

Наконец, операторнозначная функция $U(\cdot)$ является функцией ***с локально ограниченной равномерной вариацией****, если для некоторого $t > 0$*

$$Var(U(\cdot), t) :=$$

$$= \sup \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \|(U(t_j) - U(t_{j-1}))\| \ : \ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t, n \geq 1\Big\} < \infty.$$

Для любых фиксированного λ и оператора $B \in B(E)$ определим функцию $U_{B,\lambda}(\cdot)$ формулой

$$U_{B,\lambda}(t)x := (A - \lambda) \int_0^t exp(sA)Bx\, ds. \qquad (13.3)$$

Следующая теорема характеризует $Mul(A)$ в терминах локально ограниченной полувариации функции $U_{B,\lambda}(\cdot)$.

Теорема 13.1.2 *Оператор $C \in B(E)$ принадлежит $Mul(A)$, то есть $B = C-I$ удовлетворяет условию (M) тогда и только тогда, когда $SV(U_{B,\lambda}(\cdot), t) = o(1)\, (t \to 0+)$ для некоторого (и, значит, всех) $\lambda > \omega$.*

Кроме того, $SV(U_{B,\lambda}(\cdot), t)$ и функция $\gamma_B(t)$ в условии (M_b) имеют один и тот же порядок сходимости в нуле.

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что $SV(U_{B,\lambda}(\cdot), t) = o(1)\, (t \to 0+)$ для некоторого $\lambda > \omega$. Если $x^* \in D(A^*)$, тогда из (13.3) для всех $t > 0$ получаем

$$U^*_{B,\lambda}(t)x^* = -\ w^*\text{-}\int_0^t B^* exp(sA)^*(\lambda - A^*)x^* ds$$

и

$$w^*\text{-}\frac{d}{dt}U^*_{B,\lambda}(t)x^* = -B^* exp(tA)^*(\lambda - A^*)x^*.$$

Следовательно, (см. [57], Приложение)

$$Var(U^*_{B,\lambda}(\cdot)x^*, t) = \int_0^t \|B^* exp(sA)^*(\lambda - A^*)x^*\| ds.$$

Так как $Var(U^*_{B,\lambda}(\cdot)x^*, t) \leq SV(U_{B,\lambda}(\cdot), t)\, \|x^*\|$ ([85], лемма 2.3), мы получаем оценку:

$$\int_0^t \|B^* exp((t-s)A)^*(\lambda - A^*)x^*\| ds \leq SV(U_{B,\lambda}(\cdot), t)\|x^*\|,\ x^* \in D(A^*).$$

Для $f \in C^1([0,t],E)$, элемент $\int_0^t exp\Big((t-s)A\Big)Bf(s)ds$ принадлежит $D(A)$, и найдется $x_0^* \in E^*$ такой, что $\|x_0^*\| = 1$ и
$\langle(\lambda - A)\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)\,ds, x_0^*\rangle = \|(\lambda - A)\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)\,ds\|$.

Пусть $x_n^* = n\int_0^{\frac{1}{n}} exp(sA)^* x_0^* ds$. Тогда $x_n^* \in D(A^*)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n^*\| \le M$, и w^*-$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* = x_0^*$. Поэтому мы получаем

$$\|(\lambda - A)\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)ds\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\langle(\lambda - A)\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)ds, x_n^*\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^t\langle f(s), B^* exp((t-s)A)^*(\lambda - A^*)x_n^*\rangle ds \le$$

$$\le \overline{\lim_{n\to\infty}}\|f\|_{C([0,t];E)}\int_0^t\|B^* exp((t-s)A)^*(\lambda - A^*)x_n^*\|ds \le$$

$$\le \|f\|_{C([0,t];E)}\, SV(U_{B,\lambda}(\cdot),t)M.$$

Итак,

$$\|A\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)ds\| \le$$

$$\le M\left[\lambda\omega^{-1}\, e^{\omega t}\, t\|B\| + SV(U_{B,\lambda}(\cdot),t)\right]\cdot\|f\|_{C([0,t];E)}.$$

Это означает, что B удовлетворяет условию (M'), которое, как было отмечено после определения 13.1.1, эквивалентно условию (M).

Необходимость. Предположим, что B удовлетворяет условию (M). Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ и пусть ε – положительное число меньшее, чем $\min\{t_j - t_{j-1}\}$. Как в [148] , для каждого фиксированного, но произвольного набора $x_j \in E$, $\|x_j\| \le 1$, $j = 1,2,\cdots,n+1$, определим непрерывную функцию $f_\varepsilon : [0,t] \to E$

$$f_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} x_j, & \text{если } t_{j-1} \le \tau \le t_j - \varepsilon, \\ x_{j+1} + (x_{j+1} - x_j)(\tau - t_j)/\varepsilon, & \text{если } t_j - \varepsilon \le \tau \le t_j. \end{cases}$$

Используя при $0 \le a,b \le t$ равенство

$$A\int_a^b s\, exp((t-s)A)x\,ds = \int_a^b exp((t-s)A)x\,ds - b\,exp((t-b)A)x + b(t-a)x,$$

получаем

$$A\int_0^t exp\Big((t-s)A\Big)Bf_\varepsilon(s)\,ds =$$

$$= A\left[\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j-\varepsilon} exp\Big((t-s)A\Big)Bf_\varepsilon(s)\,ds + \int_{t_j-\varepsilon}^{t_j} exp\Big((t-s)A\Big)Bf_\varepsilon(s)\,ds\right] =$$

$$= A\Bigg[\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j-\varepsilon} exp((t-s)A)Bx_j\,ds +$$

$$+\int_{t_j-\varepsilon}^{t_j} exp\Big((t-s)A\Big)B\Big(x_{j+1}+(x_{j+1}-x_j)(s-t_j)/\varepsilon\Big)\,ds\Bigg] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[exp\Big((t-t_{j-1})A\Big) - exp\Big((t-t_j+\varepsilon)A\Big)\right]Bx_j +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[exp\Big((t-t_j+\varepsilon)A\Big) - exp\Big((t-t_j)A\Big)\right]Bx_{j+1} \quad +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_j-\varepsilon}^{t_j} exp\Big((t-s)A\Big)B(x_{j+1}-x_j)\,ds - \sum_{j=1}^{n} exp\Big((t-t_j+\varepsilon)A\Big)B(x_{j+1}-x_j) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}[exp\Big((t-t_j)A\Big) - exp\Big((t-t_{j-1})A\Big)]Bx_j +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_j-\varepsilon}^{t_j} exp\Big((t-s)A\Big)B(x_{j+1}-x_j)\,ds - \sum_{j=1}^{n} exp\Big((t-t_j)A\Big)B(x_{j+1}-x_j).$$

Отсюда и из (13.3) имеем

$$\|\sum_{j=1}^{n}[U_{B,\lambda}(t-t_j) - U_{B,\lambda}(t-t_{j-1})]x_j\| =$$

$$= \|\sum_{j=1}^{n}\lambda\int_{t-t_{j-1}}^{t-t_j} exp(sA)Bx_j\,ds - \sum_{j=1}^{n}[exp\Big((t-t_j)A\Big) - exp\Big((t-t_{j-1})A\Big)]Bx_j\| \le$$

$$\le \lambda\|B\|Me^{\omega t}t + \|A\int_0^t exp\Big((t-s)A\Big)Bf_\varepsilon(s)\,ds\| +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\|\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_j-\varepsilon}^{t_j} exp\Big((t-s)A\Big)B(x_{j+1}-x_j)\,ds - exp\Big((t-t_j)A\Big)B(x_{j+1}-x_j)\|.$$

Наконец, используя (M_b) и беря предел при $\varepsilon \to 0$, мы находим, что

$$\|\sum_{j=1}^{n}[U_{B,\lambda}(t-t_j) - U_{B,\lambda}(t-t_{j-1})]x_j\| \le \lambda\|B\|Me^{\omega t}t + \gamma_B(t).$$

Это означает, что $SV(U_{B,\lambda}(\cdot),t) \le \lambda\|B\|Me^{\omega t}t + \gamma_B(t) = o(1) \quad (t \to 0)$.

Из приведенного доказательства следует также, что функции $\gamma_B(t)$ и $SV(U_{B,\lambda}(\cdot),t)$ имеют одинаковый порядок сходимости к 0 при $t \to 0$.

Вообще говоря, $Mul(A)$ – собственное подмножество $I+B(E)$. Как указал W. Desch, условие $Mul(A) = I + B(E)$ эквивалентно тому, что A ограничен. Действительно, если для каждого $B \in B(E)$ оператор $(I+B)A$ порождает C_0-полугруппу, тогда для $B = -2I$ мы имеем, что $-A$ также порождает C_0-полугруппу, и следовательно, $exp(\cdot A)$ есть C_0-группа. С другой стороны, в силу теоремы 2 из [83], мы имеем, что $exp(\cdot A)$ - аналитическая полугруппа. Инфинитезимальный оператор A аналитической C_0-группы $exp(\cdot A)$ должен быть ограничен (см., например, предложение 9.1.3). Следующее предложение дает еще несколько эквивалентных условий ограниченности производящего оператора.

Известно ([148], лемма 3.3), что если C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ имеет локально ограниченную полувариацию, тогда полугруппа $exp(\cdot A)$ аналитична. Если, кроме того, $SV(exp(\cdot A),t)$ достаточно мала при малых $t,$ то $exp(\cdot A)$ даже равномерно непрерывна, то есть производящий оператор A ограничен.

Предложение 13.1.1 *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *оператор A ограничен, или, что эквивалентно,*
$$\|exp(tA) - I\| = o(1) \quad (t \to 0+);$$
(ii) $\|exp(tA) - I\| = O(t) \quad (t \to 0+);$
(iii) $Var(exp(\cdot A),t) = O(t) \quad (t \to 0+);$
(iv) $Var(exp(\cdot A),t) = o(1) \quad (t \to 0+);$
(v) $SV(exp(\cdot A),t) = O(t) \quad (t \to 0+);$
(vi) $SV(exp(\cdot A),t) = o(1) \quad (t \to 0+);$
(vii) $\overline{\lim}_{t\to 0+} SV(exp(\cdot A),t) < 1/(Me)$.

Доказательство. Если A ограничен, то

$$\|exp(tA) - I\| \le \|A\int_0^t exp(sA)\,ds\| \le \|A\|\int_0^t \|exp(sA)\|\,ds = O(t)\,(t \to 0+).$$

Следовательно, (i) $\Rightarrow$ (ii). Покажем " (ii) $\Rightarrow$ (iii) ". Предположим, что $\|exp(sA)-I\| \le Ks$ при $0 \le s \le \tau$. Для любого деления $\{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ отрезка $[0,t] \subset [0,1]$ с $t_i - t_{i-1} \le \tau$, имеем

$$\sum_{i=1}^n \|exp(t_iA) - exp(t_{i-1}A)\| \le \sum_{i=1}^n \|exp(t_{i-1}A)\|\,\|exp\Big((t_i - t_{i-1})A\Big) - I\| \le$$

$$\le Me^{\omega}K\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = Me^{\omega}Kt.$$

Следовательно, $Var(exp(\cdot A), t) \leq Me^{\omega}Kt$ для $0 < t \leq 1$.

Импликации " (iii) $\Rightarrow$ (iv) + (v) "," (iv) $\Rightarrow$ (vi) "," (v) $\Rightarrow$ (vi) ", и " (vi) $\Rightarrow$ (vii) " очевидны. Докажем " (vii) $\Rightarrow$ (i) ". По лемме 3.1 из [148], для всех $f \in C([0,\infty), E)$ имеем $\int_0^t exp((t-s)A)f(s)ds \in D(A)$ и

$$A\int_0^t exp((t-s)A)f(s)\,ds = \int_0^t d_s\Big[exp\Big((t-s)A\Big)\Big]f(s).$$

Так как $\| \int_0^t d_s\Big[exp\Big((t-s)A\Big)\Big]f(s)\| \leq SV(exp(\cdot A), t)\|f\|_{C([0,t];E)}$ (см. [108], с.24), то, положив $f(\cdot) = exp(\cdot A)x$, получаем оценку

$\|tAexp(tA)x\| \leq SV(exp(\cdot A), t)Me^{\omega t}\|x\|$ для всех $x \in E$.

Отсюда

$$\overline{\lim}_{t\to 0+}\|tAexp(tA)\| \leq \overline{\lim}_{t\to 0+}\{SV(exp(\cdot A), t)Me^{\omega t}\} < 1/e,$$

и, значит, A в силу предложения 9.2.4 является ограниченным оператором.

13.2 Приложения к аддитивным возмущениям

Из теоремы 13.1.2 мы можем также получить следующий результат.

Теорема 13.2.1 *Пусть A – генератор C_0-полугруппы (соответственно аналитической полугруппы) на E. Если $P \in B(\mathcal{D}(A), E)$ такой, что*

$$\int_0^t exp((t-s)A)Pg(s)ds \in D(A), \tag{13.4}$$

$$\|A\int_0^t exp((t-s)A)Pg(s)ds\| \leq \gamma_P(t)\sup_{0\leq s\leq t}\|g(s)\|_A \tag{13.5}$$

для всех $g \in C([0,t];\mathcal{D}(A))$ и для некоторой функции $\gamma_P(\cdot)$ с $\gamma_P(t) = o(1)$ $(t \to 0+)$, тогда операторы $A + P$ и $A + (A-\lambda)P(A-\lambda)^{-1}$ $(\lambda > \omega)$ являются генераторами C_0-полугрупп (соответственно, аналитических полугрупп).

Доказательство. Без потери общности можем предположить, что A является обратимым, так что $A + P = (I + PA^{-1})A$. Ввиду теоремы 13.1.2, нам достаточно проверить условие (M) для оператора $B = PA^{-1}$. Действительно, если $f \in C([0,t];E)$, тогда $A^{-1}f \in C([0,t];\mathcal{D}(A))$, поэтому, полагая $g = A^{-1}f$ в (13.4) и (13.5), получаем

$$\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)ds = \int_0^t exp((t-s)A)P(A^{-1}f)(s)ds \in D(A),$$

$$\|A\int_0^t exp((t-s)A)Bf(s)\,ds\| \le \gamma_P(t)\sup_{0\le s\le t}\|A^{-1}f(s)\|_A \le C\gamma_P(t)\|f\|_{[0,t]}.$$

В следующем следствии показано, что любой оператор P из $B(\mathcal{D}(A),\mathcal{E})$ удовлетворяет предположениям теоремы 13.2.1 и потому $A+P$ является генератором C_0-полугруппы. Этот результат был доказан также в [84].

Следствие 13.2.1 *Пусть A является генератором C_0-полугруппы (аналитической полугруппы) на E. Если P является непрерывным оператором из $\mathcal{D}(A)$ в $\mathcal{E}$ (здесь $\mathcal{E}$ – банахово пространство, удовлетворяющее условию $(\mathcal{E})$), тогда $A+P$ и $A+(A-\lambda)P(A-\lambda)^{-1}$ $(\lambda>\omega)$ являются генераторами C_0-полугрупп (соответственно, аналитических полугрупп).*

Доказательство. Предположим, что $P\in B(\mathcal{D}(A),\mathcal{E})$, и пусть $g\in C([0,t];\mathcal{D}(A))$. Тогда $Pg\in C([0,t];\mathcal{E})$ и, по условию $(\mathcal{E})$, $\int_0^t exp((t-s)A)Pg(s)\,ds\in D(A)$ и

$$\|A\int_0^t exp((t-s)A)Pg(s)ds\| \le \gamma_P(t)\sup_{0\le s\le t}\|Pg(s)\|_{\mathcal{E}} \le$$

$$\le \gamma_P(t)\|P\|_{B(\mathcal{D}(A),\mathcal{E})}\sup_{0\le s\le t}\|g(s)\|_A.$$

Утверждение следует из теоремы 13.2.1.

Теорема 13.2.2 *Пусть A порождает C_0-полугруппу (либо аналитическую полугруппу) на E. Пусть оператор $B\in B(E)$ таков, что*

$$\sup\left\{\int_0^t \|Bexp(sA)Ax\|\,ds:\quad x\in D(A),\,\|x\|=1\right\}<1$$

для некоторого $t>0$. Тогда оба оператора $(I+B)A$ и $A(I+B)$ порождают C_0-полугруппы (соответственно, аналитические полугруппы).

Теорема 13.2.2 фактически доказана в [80].

Из теоремы 13.2.2 теперь легко получить также следующую теорему.

Теорема 13.2.3 *Пусть A порождает C_0-полугруппу на E. Если P является таким оператором, что*

$$D(A)\subseteq D(P)\ \text{ и }\ P(\lambda-A)^{-1}\in B(E)\ \text{ для некоторого }\lambda>\omega; \tag{13.6}$$

$$\theta_P(t):=\sup\{\int_0^t \|PT(s)x\|ds:\ x\in D(A),\|x\|\le 1\}<1 \tag{13.7}$$

для некоторого $t > 0$, тогда операторы $A + P$ и $A + (A - \lambda)P(A - \lambda)^{-1}$ являются генераторами C_0-полугрупп. Более того, C_0-полугруппа $exp(\cdot(A+P))$ удовлетворяет оценке

$$\| \exp\Big(t(A+P)\Big) - exp(tA)\| = O(\theta_P(t)) \quad \text{при } t \to 0+ .$$

Доказательство. Можно предположить, что A является обратимым, и, значит, $A+P = (I+PA^{-1})A$. Положим $B = PA^{-1}$. Тогда $\int_0^t \|Bexp(sA)Ax\|\, ds \leq \int_0^t \|Pexp(tA)x\|\, ds$ для всех $x \in D(A)$. Следовательно, из (13.7) следует, что $\delta_B(t) \leq \theta_P(t) < 1$ для некоторого $t > 0$, и потому утверждение следствия вытекает из теоремы 13.2.2.

Следствие 13.2.2 *Пусть A является генератором аналитической C_0- полугруппы на E с $\omega(A) < 0$. Если $P \in B(\mathcal{D}(A^\alpha), E)$ для некоторого $0 \leq \alpha < 1$ (здесь A^α – дробная степень оператора A - подробно об этом см. следующую книгу), тогда $A + P$ и $A + (A - \lambda)P(A - \lambda)^{-1}$ $(\lambda > \omega)$ являются генераторами C_0-полугрупп. Более того, C_0-полугруппа $exp(\cdot(A + P))$ удовлетворяет оценке*

$$\|exp(t(A+P)) - exp(tA)\| = O(t^{1-\alpha}) \quad (t \to 0+).$$

Доказательство. Легко видеть, что из $P \in B(\mathcal{D}(A^\alpha), E)$ следует (13.6). Для доказательства (13.7) выберем $x \in D(A)$. Тогда

$$\theta_P(t) = \sup\{\int_0^t \|Pexp(sA)x\|\, ds : \quad x \in D(A),\ \|x\| \leq 1\} \leq$$

$$\leq \sup\{\int_0^t \|PA^{-\alpha}\| \cdot \|A^\alpha exp(sA)x\| ds : \quad x \in D(A), \|x\| \leq 1\} = O(t^{1-\alpha})$$

при $t \to 0+$, и, таким образом, утверждение следствия вытекает из теоремы 13.2.3.

Заметим, что следствие 13.2.2 может быть получено из теоремы Хилле о возмущениях (см. [16] или [8], теорема 6.6), используя оценки работы [22]. Из теоремы 2.3 следует также теорема Миядеры [119] о возмущениях, обобщающая теорему Филлипса [129].

Следствие 13.2.3 *Пусть A является генератором C_0-полугруппы на E. Пусть P – оператор удовлетворяющий условию (13.6) и*

$$L(\lambda) := \sup\{\int_0^a e^{-\lambda s}\|Pexp(sA)x\| ds : \quad x \in D(A),\ \|x\| \leq 1\} < \infty$$

для некоторого $a \in (0, \infty]$ и $\lambda > \omega$. Пусть $L(\infty) := \lim_{\lambda\to\infty} L(\lambda)$. Тогда для каждого ε с $|\varepsilon| < L(\infty)^{-1}$, операторы $A+\varepsilon P$ и $A+\varepsilon(A-\lambda)P(A-\lambda)^{-1}$ $(\lambda > \omega)$ являются генераторами C_0-полугрупп.

Доказательство. Выберем числа $0 < \mu < \mu_1 < \mu_2 < 1$ так, чтобы $|\varepsilon| = \mu L(\infty)^{-1}$. Возьмем λ столь большим, что $L(\lambda)/L(\infty) < \frac{\mu_1}{\mu}$, и выберем a столь малым, что $e^{\lambda t} < \frac{\mu_2}{\mu_1}$ при $t \in (0, a)$. Тогда при всех $x \in D(A)$ с $\|x\| \leq 1$ имеем

$$\int_0^t \|\varepsilon Pexp(sA)x\|\, ds \leq |\varepsilon| e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} \|Pexp(sA)x\|\, ds \leq$$
$$\leq |\varepsilon| e^{\lambda t} L(\lambda) = e^{\lambda t} \mu L(\lambda)/L(\infty) \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \mu \frac{\mu_1}{\mu} = \mu_2 < 1.$$

Отсюда $\theta_{\varepsilon P}(t) < 1$ при $t \in (0, a)$. Утверждение следствия вытекает теперь из теоремы 13.2.3.

13.3 Возмущения, порождаемые семейством $U(\cdot)$

Пусть $U(\cdot)$ является C_0-семейством мультипликативного возмущения полугруппы $exp(\cdot A)$. В этом параграфе мы изучаем условия, при которых инфинитезимальный оператор A_U пары $(exp(\cdot A), U(\cdot))$ порождает C_0-полугруппу $exp(\cdot A_U)$, а также рассмотрим инфинитезимальную разность между $exp(\cdot A_U)$ и $exp(\cdot A)$. Ввиду (iv) и (v) предложения 2.4.1 и теорем 13.1.1 и 13.1.2, мы знаем что инфинитезимальный оператор A_U пары $(exp(\cdot A), U(\cdot))$ порождает C_0-полугруппу, если $SV(U(\cdot), t) = o(1)$ при $t \to 0+$.

Относительно определения интеграла Стилтьеса, используемого в следующей теореме для случая абстрактных оператор-функций, см. [108].

Теорема 13.3.1 *Пусть $U(\cdot)$ является C_0-семейством мультипликативного возмущения. Справедливы следующие утверждения :*

(i) *$SV(U(\cdot), t) = o(1)\,(t \to 0+)$, если и только если для некоторого (и, значит, всех) $\lambda > \omega$ оператор $I - \lambda \hat{U}(\lambda)$ принадлежит $Mul(A)$. Кроме того, $SV(U(\cdot), t)$ и функция $\gamma_B(t)$ в (M_b) имеют один и тот же порядок сходимости в нуле.*

(ii) *Если $SV(U(\cdot), t) = o(1)\,(t \to 0+)$, тогда инфинитезимальный оператор $A_U = A(I - \lambda \hat{U}(\lambda)) + \lambda^2 \hat{U}(\lambda)$ пары $(U(\cdot), exp(\cdot A))$ порождает C_0-полугруппу. Кроме того, если $SV(U(\cdot), t) = O(\gamma(t))\,(t \to 0+)$, тогда*

$$\|exp(tA_U) - exp(tA)\| = O(\gamma(t)) \quad (t \to 0+).$$

(iii) *C_0-полугруппа $exp(\cdot A_U)$ удовлетворяет уравнению:*

$$exp(tA_U) = exp(tA) + (dU * exp(\cdot A_U))(t) \equiv \tag{13.8}$$

$$\equiv exp(tA) + \int_0^t d\Big[U(\tau)\Big] exp\Big((t-\tau)A_U\Big), \quad t \geq 0.$$

Доказательство. Для C_0-семейства мультипликативного возмущения $U(\cdot)$ C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$ пусть $B = -\lambda\hat{U}(\lambda)$. Тогда, в силу (13.3) и (iv) предложения 2.4.1, мы имеем $U_{B,\lambda}(\cdot) = U(\cdot)$. Таким образом, (i) и (ii) следуют немедленно из теорем 13.1.1 и 13.1.2.

Докажем (iii). Пусть $\Re(\cdot)$ обозначают функцию в правой части (13.8). Тогда, беря преобразование Лапласа, имеем

$\hat{\Re}(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} + \lambda\hat{U}(\lambda)(\lambda - A_U)^{-1}$, так что для $x \in D(A_U)$

$$\hat{\Re}(\lambda)(\lambda - A_U)x = (\lambda - A)^{-1}(\lambda - A_U)x + \lambda\hat{U}(\lambda)x =$$

$$= (\lambda - A)^{-1}\Big[\lambda - A(I - \lambda\hat{U}(\lambda)) - \lambda^2\hat{U}(\lambda)\Big]x + \lambda\hat{U}(\lambda)x =$$

$$= (\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)(I - \lambda\hat{U}(\lambda))x + \lambda\hat{U}(\lambda)x = x.$$

Следовательно, $\hat{\Re}(\lambda) = (\lambda - A_U)^{-1}$, и из теоремы 2.1.2 получаем, что $\Re(\cdot)$ является C_0-полугруппой с производящий оператором A_U. Таким образом, $\Re(\cdot) = exp(\cdot A_U)$, то есть (13.8) выполняется.

В частности, $SV(U(\cdot), t) = O(t^\alpha)$ $(t \to 0+)$ означает $\|exp(tA_U) - exp(tA)\| = O(t^\alpha)$ $(t \to 0+)$. Ясно, что обратное этому утверждению справедливо для $\alpha > 1$, потому что из $\|exp(tA_U) - exp(tA)\| = o(t)$ $(t \to 0+)$ следует $exp(\cdot A_U) \equiv exp(\cdot A)$, т.е. $\lambda - A = \lambda - A_U = (\lambda - A)(I - \lambda\hat{U}(\lambda))$, и, следовательно, $U(\cdot) \equiv 0$. Покажем, что обратное утверждение также имеет место и для случая $\alpha = 1$.

Теорема 13.3.2 *Пусть A_U является инфинитезимальным оператором пары $(U(\cdot), exp(\cdot A))$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$U(\cdot)$ имеет локально ограниченную равномерную вариацию и*
$$Var(U(\cdot), t) = O(t), \quad (t \to 0+);$$

(ii) *$U(\cdot)$ имеет локально ограниченную сильную вариацию и*
$$\sup\{Var(U(\cdot)x, t) : \ x \in E, \|x\| \leq 1\} = O(t), \quad (t \to 0+);$$

(iii) *$U(\cdot)$ имеет локально ограниченную полувариацию и*
$$SV(U(\cdot), t) = O(t), \quad (t \to 0+);$$

(iv) $\|U(t)x\| = O(t) \quad (t \to 0+)$ *для всех $x \in E$;*

(v) $\|U(t)\| = O(t) \quad (t \to 0+)$;

(vi) $R(\hat{U}(\lambda)) \subseteq F_{exp(\cdot A)}$;

(vii) *A_U порождает C_0-полугруппу $exp(\cdot A_U)$ такую, что*
$$\|exp(tA_U) - exp(tA)\| = O(t) \quad (t \to 0+);$$

(viii) *A_U порождает C_0-полугруппу $exp(\cdot A_U)$ и существует оператор $C \in B(E, E^{\odot *})$ такой, что A_U является частью оператора $A^{\odot *} + C$ в E.*

Доказательство. Импликации "(i)$\Rightarrow$ (ii) + (iii), " "(ii)$\Rightarrow$ (iv), " и "(iii) $\Rightarrow$ (iv) " - прямые следствия определений $Var(U(\cdot),t)$, $Var(U(\cdot)x,t)$ и $SV(U(\cdot),t)$. " (iv) $\Leftrightarrow$ (v) " следует из принципа равномерной ограниченности.

Докажем " (v) $\Rightarrow$ (i). " Предположим, что $\|U(s)\| \leq Ks$ при $0 \leq s \leq \tau$. Для любого разбиения $\{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ отрезка $[0,t] \subset [0,1]$ с $t_i - t_{i-1} \leq \tau$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \|U(t_i) - U(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|exp((t_{i-1})A)\| \, \|U(t_i - t_{i-1})\| \leq$$

$$\leq Me^{\omega} K \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = Me^{\omega} Kt.$$

Следовательно, $Var(U(\cdot),t) \leq Me^{\omega}Kt$ для $0 < t \leq 1$.

(iv) $\Leftrightarrow$ (vi). Используя (i) Предложения 2.4.1, для любого $x \in E$ имеем

$$h^{-1}(exp(hA) - I)\hat{U}(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} h^{-1}(exp(hA) - I)U(t)x \, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}(exp(tA) - I)h^{-1}U(h)xdt = (\lambda - A)^{-1}h^{-1}U(h)x - \lambda^{-1}h^{-1}U(h)x.$$

Как показано в предложении 2.4.1 (iii), $(\lambda - A)^{-1}h^{-1}U(h)x$ сходится к $\lambda\hat{U}(\lambda)x$. Следовательно, $\|U(h)x\| = O(h)$ $(h \to 0+)$, если и только если $\|(exp(hA) - I)\hat{U}(\lambda)x\| = O(h)$ $(h \to 0+)$, то есть $\hat{U}(\lambda)x \in F_{exp(\cdot A)}$.

" (iii)$\Rightarrow$ (vii) " следует из теоремы 13.1.2.

" (vii) $\Leftrightarrow$ (viii) " доказано в [81], теорема 5.3.

Чтобы показать "(vii) $\Rightarrow$ (vi)", используем п. (vii) предложения 2.4.1 и импликацию "(i) $\Rightarrow$ (ii)" теоремы 13.3.3. Получаем

$$A_U = A(I - \lambda\hat{U}(\lambda)) + \lambda^2\hat{U}(\lambda) = A(I + B) - \lambda B$$

для некоторого оператора $B \in B(E, F_{exp(\cdot A)})$ и некоторого $\lambda > \omega$. Отсюда $(\lambda - A)(B + \lambda\hat{U}(\lambda))x = 0$ для всех x из плотного множества $D(A_U)$. Таким образом, $\hat{U}(\lambda) = -\lambda^{-1}B \in B(E, F_{exp(\cdot A)})$.

Теорема 13.3.2, в частности, показывает, что если оператор A_1 является инфинитезимальным оператором A_U пары $(exp(\cdot A), U(\cdot))$ для некоторого локально липшицево непрерывного C_0-семейства мультипликативных возмущений $U(\cdot)$ C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$, тогда A_1 порождает C_0-полугруппу, которая удовлетворяет оценке $\|exp(tA_1) - exp(tA)\| = O(t)$ $(t \to 0+)$. Следующая теорема показывает, что утверждение теоремы 13.3.2 обратимо.

Теорема 13.3.3 *Для линейного оператора A_1, следующие утверждения эквивалентны :*

(i) *оператор A_1 порождает C_0-полугруппу, которая удовлетворяет оценке*

$$\|exp(tA_1) - exp(tA)\| = O(t) \quad (t \to 0+);$$

(ii) *существует $B \in B(E, F_{exp(\cdot A)})$ такой, что $A_1 = A(I+B) - \lambda B$ для некоторого $\lambda > \omega$;*

(iii) *существует локально липшицево непрерывное C_0-семейство мультипликативного возмущения $U(\cdot)$ для $exp(\cdot A)$ такое, что*

$$A_1 = A_U = A(I - \lambda \hat{U}(\lambda)) + \lambda^2 \hat{U}(\lambda);$$

(iv) *оператор A_1 порождает C_0-полугруппу с $D(A_1^*) = D(A^*)$, и оператор $A_1^* - A^*$ является ограниченным оператором из $D(A^*)$ в E^*;*

(v) *оператор A_1 порождает C_0-полугруппу и*

$$\|(\lambda - A_1)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}\| = O(\lambda^{-2}) \quad (\lambda \to \infty).$$

Доказательство. Эквивалентность (i), (iv), и (v) доказана в [132].

"(i) $\Rightarrow$ (ii)" доказано в [82].

" (iii) $\Rightarrow$ (i) " следует из теоремы 2.4.1 и "(v) $\Rightarrow$ (vii)" теоремы 13.3.2.

Для доказательства "(ii) $\Rightarrow$ (iii)" рассмотрим функцию $U(\cdot) = U_{B,\lambda}(\cdot)$, определенную в (13.3). Поскольку $U(\cdot)$ — C_0-семейство мультипликативного возмущения для $exp(\cdot A)$, с $-\lambda \hat{U}(\lambda) = B$, то из (ii) и теоремы 2.4.1 следует, что $A_1 = A(I+B) - \lambda B = A(I - \lambda \hat{U}(\lambda)) + \lambda^2 \hat{U}(\lambda) = A_U$. Затем, используя (13.3), для всех $x \in E$ имеем

$$\|U(t)x\| = \| \lim_{h \to 0} \int_0^t exp(sA) \frac{exp(hA) - I}{h} Bx\, ds - \lambda \int_0^t exp(sA) Bx\, ds\| \leq$$

$$\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \|exp(sA)\| t \Big[\|Bx\|_{F_{exp(\cdot A)}} + \lambda \|Bx\| \Big] \leq$$

$$\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \|exp(sA)\| t (1+\lambda) \|B\|_{E, F_{exp(\cdot A)}} \|x\|.$$

Это означает, что $\|U(t)\| = O(t)\; (t \to 0+)$. Следовательно, утверждение (iii) выполняется.

Следствие 13.3.1 *Если C_0-семейство мультипликативного возмущения $U(\cdot)$ липшицево непрерывно, то для всех $x^* \in D(A^*)$, параметрическое семейство $\lambda^2 \hat{U}^*(\lambda) x^*$ w^*-сходится к $A_U^* x^* - A^* x^*$ при $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. Это следует из (iii) и (iv) теоремы 13.3.3, а также того факта, что $\lambda \hat{U}(\lambda) \to 0$ сильно при $\lambda \to \infty$ (см. предложение 2.4.3, (ii)).

13.4 Возмущения, порождаемые семейством $V(\cdot)$

В этом параграфе мы даем условия на вариацию C_0-семейства аддитивного возмущения $V(\cdot)$ для $exp(\cdot A)$, которые гарантируют, что инфинитезимальный оператор A_V пары $(V(\cdot), exp(\cdot A))$ порождает некоторую C_0-полугруппу. Обозначим

$$\beta(V(\cdot),t) := \sup\{Var(V(\cdot)x,t) : \quad x \in E, \|x\| \le 1\},$$

$$\gamma_\lambda(t) := \sup\{Var(B_\lambda exp(\cdot A)x,t) : \quad x \in E, \|x\| \le 1\},$$

где $B_\lambda = -\lambda \hat{V}(\lambda)$.

Теорема 13.4.1 *Пусть $V(\cdot)$ является C_0-семейством аддитивного возмущения для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$. Имеют место следующие утверждения:*

(i) *$\beta(V(\cdot),t) = o(1)\,(t \to 0+)$, если и только если $\gamma_\lambda(t) = o(1)\,(t \to 0+)$, и $\beta(V(\cdot),t) = O(t^\alpha)\,(t \to 0+)$, если и только если $\gamma_\lambda(t) = O(t^\alpha)\,(t \to 0+)$, где $(0 \le \alpha \le 1)$;*

(ii) *Если $\beta(V(\cdot),t) = o(1)\ (t \to 0+)$, тогда $A_V = (I - \lambda\hat{V}(\lambda)) + \lambda^2\hat{V}(\lambda)$ (для всех больших λ) порождает C_0-полугруппу $exp(\cdot A_V)$. Кроме того, мы имеем*

$$\|exp(tA_V) - exp(tA)\| = O(\beta(V(\cdot),t)) \quad (t \to 0+);$$

(iii) *C_0-полугруппа $exp(\cdot A_V)$ удовлетворяет уравнению:*

$$exp(tA_V)x = exp(tA)x + \int_0^t exp\Big((t-\tau)A_V\Big)\lambda\hat{V}(\lambda)exp(\tau A)(\lambda - A)x\,d\tau \quad (13.9)$$

при $x \in D(A), \quad t \ge 0.$

Доказательство. Докажем (i). Учитывая утверждение (v) предложения 2.4.1, получаем

$$B_\lambda exp(tA)x = V(t)x - \lambda B_\lambda \int_0^t exp(sA)x\,ds\, +\, B_\lambda x.$$

Так как $\lambda\|B_\lambda\| \int_0^t \|exp(sA)x\|ds \le \lambda\|B_\lambda\|\,Me^{\omega t}t\,\|x\|$ имеет порядок $O(t)$ при $t \to 0$, то $\beta(V(\cdot),t)$ и $\gamma_\lambda(t)$ имеют один и тот же порядок сходимости к 0.

Установим (ii). Поскольку $\|V(t)x\| \le Var(V(\cdot)x,t) \le \beta(V(\cdot),t)$ для всех x с $\|x\| \le 1$, то $\|V(t)\| \le \beta(V(\cdot),t) \to 0$ при $t \to 0$. Из теоремы 2.4.2 следует, что $A_V = (I + B_\lambda)A - \lambda B_\lambda$. В силу (i), мы имеем $Var(B_\lambda exp(\cdot A)x,t) \le \gamma_\lambda(t)\|x\|$, с $\gamma_\lambda(t) \to 0$. Применяя теорему 13.2.2, находим, что $(I + B_\lambda)A$

- производящий оператор C_0-полугруппы $\Im(\cdot)$, и, значит, его ограниченное возмущение – оператор A_V порождает C_0-полугруппу.

Так как $\Im(\cdot)$ и $exp(\cdot A)$ связаны уравнением (см. [80], с.188)

$$\Im(t)x = exp(tA)x + \int_0^t \Im(t-s)B_\lambda exp(sA)Ax\,ds,\ x \in D(A),$$

то

$$\|\Im(t)x - exp(tA)x\| \le M'e^{\omega' t}\int_0^t \|B_\lambda exp(sA)Ax\|\,ds \le$$

$$\le M'e^{\omega' t}\, Var(B_\lambda exp(\cdot A)x, t) \le M_1 e^{\omega' t}\,\beta(V(\cdot),t)\|x\|$$

для всех $x \in D(A)$ и, следовательно, для всех $x \in E$. Таким образом, мы имеем $\|\Im(t) - exp(tA)\| \le M'e^{\omega' t}\beta(V(\cdot),t)$. Поскольку $exp(\cdot A_V)$ есть ограниченное возмущение полугруппы $\Im(\cdot)$, то $\|exp(tA_V) - exp(tA)\| = O(\beta(V(\cdot),t))$ $(t \to 0+)$.

Докажем (iii). Пусть $S(\cdot)$ обозначают функцию в правой части (13.9). Тогда, беря преобразование Лапласа, мы имеем $\hat{S}(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} + (\lambda - A_V)^{-1}\lambda\hat{V}(\lambda)$, так что

$$(\lambda - A_V)\hat{S}(\lambda) = (\lambda - A_V)(\lambda - A)^{-1} + \lambda\hat{V}(\lambda) =$$

$$= [\lambda - (I - \lambda\hat{V}(\lambda))A - \lambda^2\hat{V}(\lambda)](\lambda - A)^{-1} + \lambda\hat{V}(\lambda) =$$

$$= (I - \lambda\hat{V}(\lambda))(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} + \lambda\hat{V}(\lambda) = I.$$

Следовательно, $\hat{S}(\lambda) = (\lambda - A_V)^{-1}$, и, как следует из теоремы 2.1.2, эта функция $S(\cdot)$ есть C_0-полугруппа с производящим оператором A_V. Таким образом, $S(\cdot) = exp(\cdot A_V)$, то есть выполняется (13.9).

Замечание 13.4.1 *В утверждении (i) случай $\alpha > 1$ не интересен, потому что тогда $V(\cdot) \equiv 0$.*

Теорема 13.4.2 *Пусть $V(\cdot)$ является C_0-семейством аддитивных возмущений для C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *существует C_0-семейство аддитивных возмущений $V(\cdot)$ такое, что*
$$Var(V(\cdot),t) = O(t) \quad (t \to 0+);$$

(ii) *существует C_0-семейство аддитивных возмущений $V(\cdot)$ такое, что*
$$\sup\{Var(V(\cdot)x,t);\ x \in E,\ \|x\| \le 1\} = O(t) \quad (t \to 0+);$$

(iii) *существует C_0-семейство аддитивных возмущений $V(\cdot)$ такое, что*
$$SV(V(\cdot),t) = O(t) \quad (t \to 0+);$$

(iv) $\|V(t)x\| = O(t) \quad (t \to 0+)$ *для всех $x \in E$;*

(v) $\|V(t)\| = O(t) \quad (t \to 0+)$;

(vi) $R(\hat{V}^*(\lambda)) \subseteq F_{exp(\cdot A)^*}$;

(vii) *инфинитезимальный оператор* A_V *пары* $(V(\cdot), exp(\cdot A))$ *порождает такую* C_0*-полугруппу, что*
$$\|exp(tA_V) - exp(tA)\| = O(t) \quad (t \to 0+).$$

Доказательство. Доказательство эквивалентности условий (i) - (v) - точно такое же, как и доказательство теоремы 13.3.2.

(iv) $\Leftrightarrow$ (vi). При использовании второго равенства в (i) предложения 2.4.1 имеем для любого $x \in E$

$$h^{-1}\hat{V}(\lambda)(exp(hA) - I)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} h^{-1} V(t)(exp(hA) - I)x\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} h^{-1} V(h)(exp(tA) - I)x\,dt = h^{-1}V(h)(\lambda - A)^{-1}x - \lambda^{-1}h^{-1}V(h)x.$$

Следовательно,
$h^{-1}(exp(hA)^* - I)(\hat{V})^*(\lambda)x^* = [h^{-1}V(h)(\lambda - A)^{-1}]^* x^* - \lambda^{-1}h^{-1}V^*(h)x^*$
для всех $x^* \in E^*$. Как показано в предложении 2.4.1 (iii), функция $h^{-1}V(h)(\lambda - A)^{-1}$ сходится сильно к $\lambda\hat{V}(\lambda)$ при $h \to 0+$. Следовательно, она равномерно ограничена при малых h, так что $\|V^*(h)x^*\| = O(h)$ при $h \to 0$, если и только если $\|(exp(hA)^* - I)\hat{V}^*(\lambda)x^*\| = O(h)$ при $h \to 0$, то есть $\hat{V}^*(\lambda)x^* \in F_{exp(\cdot A)^*}$. Поскольку это выполняется для всех $x^* \in E^*$, мы получаем эквивалентность (iv) и (vi).

Импликация "(ii) $\Rightarrow$ (vii)" следует из (ii) теоремы 13.4.1.

Чтобы закончить доказательство, мы установим, что "(vii) $\Rightarrow$ (iv)". Из теоремы 2.4.2 вытекает, что $D(A) \subseteq D(A_V)$ и $A_V x = Ax + \lambda\hat{V}(\lambda)(\lambda - A)x$ для $x \in D(A)$. Отсюда, учитывая предложение 2.4.1 (v), получаем, что $V(t)x = (A_V - A)\int_0^t exp(sA)x\,ds$ для всех $x \in E$. Из условия (vii) следует, что

$$\|(A_V - A)x\| \le \overline{\lim}_{h\to 0+}\|(exp(hA_V) - exp(hA))x\| \le K\|x\| \text{ для } x \in D(A),$$

так что $\|V(t)x\| \le \|(A_V - A)\int_0^t exp(sA)x\,ds\| \le K\,\|\int_0^t exp(sA)x\,ds\| = O(t)$ при $t \to 0$ для всех $x \in E$.

Следовательно, если оператор A_1 является инфинитезимальным оператором A_V пары $(V(\cdot), exp(\cdot A))$ для некоторого липшицево непрерывного C_0-семейства аддитивного возмущения $V(\cdot)$, то $D(A_1)$ содержит $D(A)$, и A_1 порождает C_0-полугруппу, которая удовлетворяет условию $\|exp(tA_1) - exp(tA)\| = O(t)\ (t \to 0+)$.

В следующей теореме показано, что эти два утверждения фактически эквивалентны, и эти возмущенные полугруппы есть в точности полугруппы, полученные путем аддитивного возмущения инфинитезимального оператора A ограниченными операторами.

Теорема 13.4.3 *Пусть $exp(\cdot A)$ есть C_0-полугруппа. Для оператора $A_1 \in L(E)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $A_1 = A + Q$ *для некоторого* $Q \in B(E)$*;*

(ii) $D(A) \subseteq D(A_1)$, *и* A_1 *порождает такую* C_0*-полугруппу, что*

$$\|exp(tA_1) - exp(tA)\| = O(t) \quad (t \to 0+);$$

(iii) *существует оператор* $B \in B(E)$ *такой что* $R(B^*) \subseteq F_{exp(\cdot A)^*}$ *и* $A_1 = (I + B)A - \lambda B$ *для некоторого* $\lambda > \omega$*;*

(iv) *существует* C_0*-семейство аддитивных возмущений* $V(\cdot)$ *для* $exp(\cdot A)$ *такое, что* $A_1 = A_V = (I - \lambda\hat{V}(\lambda))A + \lambda^2\hat{V}(\lambda)$.

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i)+(iv). Так как $D(A) \subseteq D(A_1)$, то можно определить ограниченный оператор $B := (\lambda - A_1)(\lambda - A)^{-1} - I = (A - A_1)(\lambda - A)^{-1}$ для $\lambda > \omega$. Тогда мы имеем $A_1 x = (I + B)Ax - \lambda Bx$ для $x \in D(A)$. Выберем произвольное $\lambda > \omega$ и рассмотрим функцию

$$V(t) = V_{B,\lambda}(t) := (A - \lambda I)\int_0^t exp(sA)x\,ds, \quad x \in E,\, t \geq 0. \tag{13.10}$$

Тогда $B = -\lambda\hat{V}(\lambda)$ и

$$V(t)x = (A_1 - A)\int_0^t exp(sA)x\,ds, \quad x \in E,\, t \geq 0. \tag{13.11}$$

Так как в теореме 13.4.2 мы имеем $\|(A_1 - A)x\| \leq K\|x\|$ для всех $x \in D(A)$, то оператор $A_1 - A$ имеет ограниченное замыкание $Q \in B(E)$. Из (13.11) следует, что $\|V(t)\| \leq t\|Q\|Me^{\omega}$ для $0 \leq t \leq 1$. Следовательно, по теоремам 13.4.1 или 13.4.2, инфинитезимальный оператор A_V пары $(V(\cdot), exp(\cdot A))$ является производящим оператором, и $A_V = (I - \lambda\hat{V}(\lambda)) + \lambda^2\hat{V}(\lambda) = (I + B)A - \lambda B \subseteq A_1$.

Так как и A_V и A_1 - производящие операторы одной и той же полугруппы, то они должны совпадать. Это доказывает утверждение (iv). Также, мы имеем $D(A_1) = D(A_V) = D(A)$ (см. теорему 2.4.2), и $A_1 = A + Q$, что устанавливает (i).

"(i) $\Rightarrow$ (ii) " очевидно.

"(iv) $\Rightarrow$ (iii)" получается, если взять $B = -\lambda\hat{V}(\lambda)$ и использовать импликацию "(v) $\Rightarrow$ (vi)" из теоремы 13.4.2.

Для того чтобы доказать "(iii) $\Rightarrow$ (ii)", положим $V(t) = V_{B,\lambda}(t)$ для некоторого $\lambda > \omega$ (см. (13.10)). Тогда $V(\cdot)$ есть C_0-семейство аддитивного возмущения и $B = -\lambda\hat{V}(\lambda)$. Поэтому мы имеем

$$A_1 = (I - \lambda\hat{V}(\lambda)) + \lambda^2\hat{V}(\lambda) = A_V.$$

Утверждение (ii) теперь следует из предположения $R(B^*) \subseteq F_{exp(\cdot A)^*}$ и импликаций (vi) $\Rightarrow$ (v)$\Rightarrow$ (vii) теоремы 13.4.2.

13.5 Сохранение свойств при аддитивных возмущениях

Большая часть результатов этого раздела, касающихся возмущений производящего оператора, являются довольно простыми следствиями утверждений, приведенных в разделах 13.2 - 13.4. Тем не менее, мы приводим их, т.к. они даются в иной форме, часто используемой в литературе.

Пусть оператор $A \in \mathcal{C}(E)$. Под его возмущением в данном разделе мы будем понимать линейный оператор G, для которого $D(A) \subseteq D(G)$. Оператор $A + G$ называют возмущенным. Если $B \in B(E)$, то очевидно, что $A + B \in \mathcal{C}(E)$.

Предложение 13.5.1 *[16] Пусть оператор $A \in \mathcal{C}(E)$. Если возмущение G является замыкаемым оператором и $D(A) \subseteq D(G)$, то существуют такие константы a и b, что*

$$\|Gx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\| \quad \text{при} \quad \text{любом} \quad x \in D(A). \tag{13.12}$$

Определение 13.5.1 *Если для возмущения G выполнено неравенство (13.12), то говорят, что* ***оператор G ограничен относительно*** *A (или просто A-**ограничен**, или **подчинен** A).*

*Нижняя точная грань b_0 всевозможных констант в неравенстве (13.12) называется A-**границей** оператора G (или **нормой** G **относительно** A).*

Предложение 13.5.2 *[144] Условие A-ограниченности оператора G эквивалентно условиям*

(i) $D(A) \subseteq D(G)$

и

(ii) $GR(\lambda, A) \in B(E)$ при некотором $\lambda \in \rho(A)$.

Предложение 13.5.3 *[16] Пусть $A, G \in L(E)$, причем оператор G является A-ограниченным с A-границей меньшей, чем 1. Оператор $A+G$ замыкаем тогда и только тогда, когда оператор A замыкаем. В этом случае замыкания операторов A и $A+G$ имеют одну и ту же область определения. В частности, оператор A замкнут тогда и только тогда, когда $A+G$ замкнут.*

Определение 13.5.2 *Оператор $G \in \mathcal{C}(E)$ называется* ***подчиненным*** *оператору $A \in \mathcal{C}(E)$ с порядком α ($\alpha \in [0,1]$), если $D(A) \subseteq D(G)$ и $\|Gx\| \leq M_\alpha(G)\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^\alpha$.*

Определение 13.5.3 *[22] Оператор $G \in \mathcal{C}(E)$ называется* ***вполне подчиненным*** *оператору $A \in \mathcal{C}(E)$, если он ему подчинен с порядком 1 и при любом достаточно малом $\eta > 0$ имеет место оценка*

$$\|Gx\| \leq \Phi_\eta(x) + \eta\|Ax\| \quad \text{для} \quad \text{любого} \quad x \in D(A),$$

где Φ_η — непрерывный выпуклый функционал на E .

Теорема 13.5.1 *[16] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$ и $B \in B(E)$. Тогда $A+B \in \mathcal{G}(M, \omega + M\|B\|)$. Причем C_0-полугруппа $exp(t(A+B))$ при фиксированном $t \geq 0$ является голоморфной функцией от B. В частности, $exp(t(A+zB))$ – целая функция комплексной переменной z.*

Предложение 13.5.4 *[93] Теорема 13.5.1 имеет место и для групп операторов.*

Предложение 13.5.5 *[73] Возмущенная C_0-полугруппа в теореме 13.5.1 удовлетворяет уравнению (см. также (13.2))*

$$exp\Big(t(A+B)\Big) = exp(tA) + \int_0^t exp\Big((t-s)A\Big)Bexp\Big(s(A+B)\Big)\,ds, \quad t \geq 0$$

и представима рядом, сходящимся абсолютно и равномерно по $t \in [0,T]$,

$$exp(t(A+B)) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t),$$

где $S_0(t) = exp(tA)$, $S_n(t) = \int_0^t exp((t-s)A)BS_{n-1}(s)\,ds$, $n \in N$, или в другой записи

$$exp(t(A+B)) = exp(tA) +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}...\int_0^{t_k} exp(t_{k+1}A)Bexp\Big((t_k - t_{k+1})A\Big)B...exp\Big((t-t_1)A\Big)\,dt_{k+1}...dt_1.$$

Предложение 13.5.6 *[127] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$ и $B \in B(E)$. Тогда при всех $t \geq 0$ имеет место оценка*

$$\|exp\Big(t(A+B)\Big) - exp(tA)\| \leq Me^{\omega t}\Big(e^{M\|B\|t} - 1\Big).$$

Предложение 13.5.7 *[127], Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ либо аналитична, либо непрерывна по норме, либо компактна и $B \in B(E)$. Тогда C_0- полугруппа $exp(\cdot(A+B))$ также соответственно либо аналитична, либо непрерывна по норме, либо компактна.*

Предложение 13.5.8 *[122] Утверждение 13.5.7 остается в силе, если $B \in B(D(A))$. Если при этом дополнительно $B \in B_0(D(A))$ и C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ становится непрерывной по норме, то и C_0-полугруппа $exp(\cdot(A+B))$ также становится непрерывной по норме.*

Предложение 13.5.9 *[16] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$, а оператор G ограничен относительно A. Тогда оператор $A+G$, вообще говоря, не обязан порождать C_0-полугруппу.*

Предложение 13.5.10 *[16] Пусть $A, G \in \mathcal{G}(1,0)$ и оператор G является A-ограниченным с A-границей $b_0 \leq 1$. Тогда $A+G \in \mathcal{G}(1,0)$.*

Предложение 13.5.11 *[8] Пусть $A \in \mathcal{G}(1,0)$, а G диссипативен и вполне подчинен оператору A. Тогда $A+G \in \mathcal{G}(1,0)$.*

Предложение 13.5.12 *[8] Пусть оператор A является m-диссипативным и плотно определенным, а оператор G m-диссипативен и A-ограничен с A-границей $b_0 = 1$, причем G^* плотно определен. Тогда оператор $\overline{A+G}$ является m-диссипативным.*

Предложение 13.5.13 *[8] В предложении 13.5.12 условие плотности $D(G^*)$ в E^* можно заменить на условие рефлексивности пространства E.*

Предложение 13.5.14 *[16] Пусть $A, G \in \mathcal{G}(1,0)$, множество $D(A) \cap D(G)$ плотно в E и оператор $A+G+\lambda I$ имеет плотную область значений при достаточно большом λ. Если оператор $A+G$ замыкаем, то $\overline{A+G} \in \mathcal{G}(1,0)$.*

Предложение 13.5.15 *[14] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$, $G \in \mathcal{C}(E), D(A) \subseteq D(G)$ и*

$$\int_0^1 \|Gexp(sA)\|'_A\,ds < \infty, \quad \text{где} \quad \|G\|'_A := \sup\left\{\frac{\|Gx\|}{\|x\|} : \|x\| \leq 1, x \in D(A)\right\}.$$

Тогда оператор $A+G$ замкнут и порождает C_0-полугруппу, которая представима, как в предложении (13.5.5).

Предложение 13.5.16 *[119] Если $exp(\cdot A)$ – группа операторов, а A-ограниченный оператор G таков, что $D(G) = D(A)$ и $\int_0^1 \|Gexp(tA)\|'_A\, dt < \infty$, то $\|G\|'_A$ конечна.*

Предложение 13.5.17 *[73] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$, $\tilde{E}_0 \subseteq D(G)$ и $\int_0^1 \|Gexp(tA)\|\, dt < \infty$. Тогда $D(A) \subseteq D(G)$ и оператор $A+G$ порождает C_0-полугруппу.*

Предложение 13.5.18 *[2] Пусть заданы две либо w-непрерывные полугруппы, либо C_0^*-полугруппы такие, что*

$$\|exp(tA) - exp(tG)\| = o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0+ .$$

Тогда $exp(tA) = exp(tG)$ при всех $t \geq 0$.

Предложение 13.5.19 *[2] Пусть заданы две либо w-непрерывные группы, либо C_0^*-группы операторов $exp(\cdot A)$ и $exp(\cdot G)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) существуют такие $\varepsilon_1 > 0$ и $\delta_1 > 0$, что

$$\|exp(tA)exp(-tG) - I\| \leq 1 - \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \delta_1.$$

(ii) существуют ε_2, δ_2 и $P, W \in B(E)$ такие, что $W^{-1} \in B(E)$, $A = W(G+P)W^{-1}$ и $\|exp(tA)W^{-1}exp(-tA)W - I\| \leq 1 - \varepsilon_2$ при всех $t \in [0, \delta_2]$.

Если эти условия выполнены, то $W = \frac{1}{\delta_1}\int_0^{\delta_1} exp(tA)exp(-tG)\, dt$ и, следовательно, $\|I - W\| \leq 1 - \varepsilon_1$. Кроме того,

$$\|exp(tA)W^{-1}exp(-tA)W - I\| = \|exp(tA)exp(-tG) - I\| + O(t)$$

и

$$\|exp(tA)Wexp(-tG) - W\| = O(t) \quad \text{при} \quad t \to 0+ .$$

Предложение 13.5.20 *[164] Если операторы $A, G \in \mathcal{G}(M,\omega)$ и элемент $\tilde{x} \in D(A)$ таковы, что $exp(sA)\tilde{x} \in D(G)$ при $0 < s < t$ и $\int_0^1 \|Gexp(sA)\tilde{x}\|\, ds < \infty$, то*

$$exp(tG)\tilde{x} - exp(tA)\tilde{x} = \int_0^t exp((t-s)G)(G-A)exp(sA)\tilde{x}\, ds.$$

Предложение 13.5.21 *[122] Имеется пример C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$, становящейся дифференцируемой и компактной, такой, что при некотором $B \in B(E)$ C_0-полугруппа $exp(\cdot(A+B))$ не становится непрерывной по норме.*

Предложение 13.5.22 *[122] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ непрерывна по норме, начиная с некоторого t_0, и оператор $B \in B_0(E)$, т.е. компактен. Тогда C_0-полугруппа $exp(\cdot(A+B))$ непрерывна по норме, начиная с t_0.*

Предложение 13.5.23 *[122] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ квазикомпактна и $B \in B_0(E)$. Тогда и C_0-полугруппа $exp(\cdot(A+B))$ квазикомпактна.*

Предложение 13.5.24 *[122] Пусть $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$ и $B \in B(\mathcal{D}(A))$. Тогда оператор $A+B$ порождает C_0-полугруппу, и, более того, существует $B_1 \in B(E)$ такой, что $A+B$ подобен $A+B_1$. Точнее, при некотором $\lambda_0 \in \rho(A)$*

$$A+B = U(A+B_1)U^{-1}, \quad \text{где} \quad U = (I - BR(\lambda_0, A)).$$

Теорема 13.5.2 *[16] Для любого $A \in \mathcal{H}(\theta,\omega)$ и любого $\varepsilon \in (0,\theta)$ существуют положительные константы γ и δ такие, что, если оператор G ограничен относительно A с $a, b < \delta$, то $A+G \in \mathcal{H}(\theta-\varepsilon,\gamma)$. В частности, если $\omega = 0$ и $a = 0$, то $G \in \mathcal{H}(\theta-\varepsilon, 0)$.*

Предложение 13.5.25 *[22] Если $A \in \mathcal{H}(\theta,\omega)$, а оператор G вполне подчинен A, то оператор $A+G$ также порождает аналитическую C_0-полугруппу.*

Предложение 13.5.26 *[127] В условиях теоремы 13.5.2 имеем*

$$\|exp(t(A+G))\| \le Me^{(\omega+\nu(b))t}, \quad t \ge 0,$$

где $\lim_{b\to\infty} \nu(b) = 0$.

Определение 13.5.4 *Пусть $A \in \mathcal{C}(E)$. Оператор K с $D(K) \supseteq D(A)$ называется* ***компактным относительно оператора*** *A , если найдется такое $\lambda_0 \in \rho(A)$, что оператор $KR(\lambda_0, A)$ компактен в E.*

Предложение 13.5.27 *[3] Пусть $A \in \mathcal{H}(\theta,\omega)$ и оператор B компактен относительно A. Если одно из множеств $D(A^*)$ или $D(B^*)$ плотно в E^*, то $A+B$ порождает аналитическую C_0-полугруппу.*

Предложение 13.5.28 *[3] Пусть $A \in \mathcal{H}(\theta,\omega)$, а оператор B таков, что $D(B) \supseteq D(A)$ и $R(\lambda_0, A)B \in B_0(E)$ при некотором λ_0. Тогда оператор $A+B$ порождает аналитическую C_0-полугруппу.*

Предложение 13.5.29 *[37] Пусть $A \in \mathcal{H}(\theta,\omega)$, оператор G является A-ограниченным и $\int_0^1 \|Gexp(tA)\|'_A \, dt < \infty$. Тогда $A+G$ порождает аналитическую C_0-полугруппу.*

Предложение 13.5.30 *[98] Пусть* $A, G \in \mathcal{G}(M,\omega)$ *и* $\underline{\lim}_{t\to 0+}\|exp(tA) - exp(tG)\| = 0$. *Если* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *полуфредгольмова, то*

(i) C_0*-полугруппа* $exp(\cdot G)$ *полуфредгольмова;*

(ii) $nul(exp(tA)) = nul(exp(tG)) = 0$, *если* $nul(exp(t_0 A)) = 0$ *при некотором* t_0,

$nul(exp(tA)) = nul(exp(tG)) = \infty$, *если* $nul(exp(t_0 A)) = \infty$ *при некотором* t_0,

(iii) $def(exp(tA)) = def(exp(tG)) = 0$, *если* $def(exp(t_0 A)) < \infty$ *при некотором* t_0,

$def(exp(tA)) = def(exp(tG)) = \infty$, *если* $def(exp(t_0 A)) = \infty$ *при некотором* t_0.

Предложение 13.5.31 *[22] Пусть* $A \in \mathcal{G}(E)$ *и резольвента* $R(\lambda, A)$ *удовлетворяет оценке* $\|R(\lambda,A)\| \le M(1+|\lambda|^{-\beta})$ *при некотором* $0<\beta<1$ *и всех* $\lambda \in \rho(A)$. *Если оператор* G *подчинен оператору* A *с порядком* $\alpha \in (0,\beta)$, *то* $\|R(\lambda, A+G)\| \le \frac{M}{1-\delta}\cdot(1+|\lambda|)^{-\beta}$, *причем* $\|GR(\lambda, A+G)\| \le \delta$ *при* $Re\lambda \ge \omega$.

Предложение 13.5.32 *[98] Пусть* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *полуфредгольмова, а оператор* $\mathcal{L}$ *является* A*-подчиненным и* $\int_0^1 \|\mathcal{L}exp(tA)\|'_A\,dt < \infty$. *Тогда* $A+\mathcal{L}$ *порождает полуфредгольмову* C_0*-полугруппу и выполняются утверждения предложения 13.5.30 с* $G = A+\mathcal{L}$.

Предложение 13.5.33 *[98] Пусть* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot A)$ *полуфредгольмова, а оператор* P *удовлетворяет условию* (13.7) *и является* A*-ограниченным. Тогда существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ *оператор* $A+\varepsilon P$ *порождает полуфредгольмовую* C_0*-полугруппу, причем*

$$nul\Big(exp(tA)\Big) = nul\Big(exp(t(A+\varepsilon P))\Big)$$

и

$$def(exp(tA)) = def\Big(exp(t(A+\varepsilon P))\Big) \quad \text{при всех} \quad t \ge 0.$$

Предложение 13.5.34 *[98] Пусть пространство* $E = H$ *– гильбертово,* $A \in \mathcal{G}(0,1)$, *оператор* G *диссипативен и* A*-ограничен с* A*-границей* $b<1$, *а* $\inf_{\|x\|\le 1}\{Re((A+G)x,x)\} > -\infty$. *Тогда* C_0*-полугруппы* $exp(\cdot A)$ *и* $exp(\cdot(A+B))$ *имеют ограниченные обратные и* $def\Big(exp(tA)\Big) = def\Big(exp(t(A+G))\Big)$ *при* $t \ge 0$.

Предложение 13.5.35 *[98] Имеется пример фредгольмовой* C_0*-полугруппы* $exp(\cdot A)$ *и* A*-ограниченного оператора с* A*-границей меньшей 1 таких, что* C_0*-полугруппа* $exp(\cdot(A+G))$ *не является фредгольмовой.*

Предложение 13.5.36 *[37] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна в банаховой структуре E, оператор G является A-ограниченным и $\int_0^1 \|Gexp(tA)\|'_A\,dt \; < \infty$. Если при некотором $\xi \in R$ оператор $G + \xi I$ положителен, то C_0-полугруппа $exp(\cdot(A + G))$ позитивна.*

Предложение 13.5.37 *[27] Пусть C_0-полугруппа $exp(\cdot A)$ позитивна и $B \in B(E)$ – положительный оператор. C_0-полугруппа $exp(\cdot(A+B))$ неприводима тогда и только тогда, когда только лишь $\mathfrak{J} = \{0\}$ и $\mathfrak{J} = E$ являются замкнутыми идеалами со свойствами*

(i) $exp(tA)\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}, \quad t \geq 0$;

(ii) $B\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}$.

Предложение 13.5.38 *[27] Пусть $A \in \mathcal{G}(M, \omega)$ и пространство E $\odot$-рефлексивно согласно A. Пусть $B \in B(E, E^{\odot *})$. Тогда существует C_0-полугруппа $\mathcal{T}(\cdot)$ такая, что при всех $t \geq 0$ и каждом $x \in E$ выполняется равенство*

$$\mathcal{T}(t) = exp(tA)x + \int_0^t exp((t-s)A)^{\odot *} B\mathcal{T}(s)x\,ds.$$

Более того, $\|\mathcal{T}(t)\| \leq Me^{\tilde{\omega}t}$, где $\tilde{\omega} := \omega + M\|B\|$.

Предложение 13.5.39 *[27] Пусть в условиях и обозначениях 13.5.38 $\mathcal{T}(t) = exp(tA^\times)$, $t \geq 0$. Тогда E является $\odot$-рефлексивным согласно $A^\times$ и*

(i) $D(A^\times) = \{x \in D(A^{\odot *}) : A^{\odot *}x + Bx \in E\}$,
$A^\times x = A^{\odot *}x + Bx$, $x \in D(A^\times)$;

(ii) $D(A^{\times *}) = D(A^*)$, $\qquad A^{\times *}x^\odot = A^* x^\odot + B^* x^\odot$, $x \in D(A^{\times *})$;

(iii) $D(A^{\times \odot}) = \{x \in D(A^{\times *}) : A^* x^\odot + B^* x^\odot \in E^\odot\}$,
$A^{\times\odot}x^\odot = A^* x^\odot + B^* x^\odot$, $x^\odot \in D(A^{\times\odot})$;

(iv) $D((A^\times)^{\odot *}) = D(A^{\odot *})$, $\qquad (A^\times)^{\odot *}x = A^{\odot *}x + Bx$, $x \in D((A^\times)^{\odot *})$.

Обозначим
$\tilde{\mathcal{T}}(t) := \int_0^t exp\Big((t-s)A\Big)^{\odot *} Bexp\Big(s(A+B)\Big)\,ds$, $K(\lambda) := R(\lambda, A^{\odot *})B$.

Предложение 13.5.40 *[27] Пусть в обозначениях предложений 13.5.38, 13.5.39 оператор-функция $\tilde{\mathcal{T}}(\cdot)$ непрерывна по норме на $[t_0, \infty)$ и $K(\lambda)$ – компактная оператор-функция при достаточно больших λ. Тогда оператор $\tilde{\mathcal{T}}(t)$ компактен при всех $t \geq t_0$.*

Предложение 13.5.41 *[27] Если в обозначениях 13.5.40 оператор-функция $\tilde{\mathcal{T}}(\cdot)$ становится компактной, то $E\omega(A + B) \leq \omega(A)$.*

Предложение 13.5.42 *[27] Пусть E $\odot$-рефлексивно, $B \in B(E, E^{\odot *})$ и при любом λ с $Re\lambda > S(A)$ оператор $R(\lambda, A^{\odot *})B$ компактен. Тогда множество $\{\lambda \in \sigma(A+B) : Re\lambda > S(A)\}$ содержит не более счетного числа точек $\{\lambda_k\}$, каждая из которых лежит вне $E\sigma(A+B)$ или, что эквивалентно, $E\sigma(A+B) \subseteq \{\lambda \in C : \ Re\lambda \leq S(A)\}$.*

Глава 14

Неоднородное уравнение

Изложенная ранее теория C_0-полурупп операторов фактически есть изучение свойств решения однородной равномерно корректной задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве E:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad u(0) = u^0, \quad t \geq 0. \tag{14.1}$$

В случае, когда A является генератором C_0-полугруппы, решение (14.1), как известно, задается формулой $u(t) = exp(tA)u^0$, $t \geq 0$.

Цель настоящей главы — рассмотреть задачу Коши для неоднородного уравнения первого порядка в банаховом пространстве E:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad t \geq 0, \tag{14.2}$$

где $f(\cdot)$ — некоторая функция, действующая из $\overline{R}_+$ в E.

Задача (14.2) здесь будет рассматриваться при $t \geq 0$, либо при $0 \leq t \leq T$, где T – некоторое положительное число. В данной главе появление числа $T \in [0, \infty)$ не связано с существованием решения именно на ограниченном интервале. Как мы увидим далее, иногда оказывается удобно рассмотреть, скажем, пространства $C([0,T]; E)$ или $C_0^\alpha([0,T]; E)$, когда число T конечно.

Определение 14.0.1 ***Классическим решением*** *задачи (14.2) на полуоси $[0, \infty)$ называют функцию $u(\cdot) : [0, \infty) \to E$, обладающую следующими свойствами:*

(i) $u(\cdot)$ непрерывна при любом $t \in [0, \infty)$;

(ii) $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема по t при всех $t \in [0, \infty)$;

(iii) $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, \infty)$ и при $t \in [0, \infty)$ выполняются равенство и начальное условие (14.2).

Аналогично определяется классическое решение задачи (14.2) на отрезке $[0,T]$, т.е. вместо полуоси $[0,\infty)$ в определении фигурирует отрезок $[0,T]$.

Определение 14.0.2 ***Сильным решением*** *задачи (14.2) на отрезке* $[0,T]$ *назовем такую функцию* $u(\cdot)$, *что*

(i) $u(\cdot)$ *дифференцируема почти всюду на* $[0,T]$ *и* $u'(\cdot)\in L^1([0,T];E)$;

(ii) выполняется начальное условие (14.2);

(iii) уравнение (14.2) выполняется почти всюду.

Определение 14.0.3 ***Слабым решением*** *задачи (14.2) на отрезке* $[0,T]$ *называется такая функция* $u(\cdot)$, *что*

(i) $u(\cdot)$ *непрерывна на* $[0,T]$;

(ii) выполняется начальное условие (14.2);

(iii) для любого функционала $v^*\in D(A^*)$ *функция* $\langle u(\cdot),v^*\rangle$ *абсолютно непрерывна и равенство*

$$\frac{d}{dt}\langle u(t),v^*\rangle=\langle u(t),A^*v^*\rangle+\langle f(t),v^*\rangle \tag{14.3}$$

выполняется почти всюду на $[0,T]$.

В литературе можно встретить и другие определения решений, например,

a) ***ослабленное*** — функция $u(\cdot)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[0,T]$, непрерывно дифференцируема всюду, кроме нуля и уравнение выполняется всюду, кроме нуля;

b) ***мягкое (mild)*** — функция $u(\cdot)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[0,T]$ и представима в виде

$$u(t)=exp(tA)u^0+\int_0^t exp\Big((t-s)A\Big)f(s)\,ds \tag{14.4}$$

при $t\in[0,T]$.

Предложение 14.0.1 *Функция* $u(\cdot)$ *есть решение (классическое, мягкое) задачи (14.2) тогда и только тогда, когда* $v(t):=e^{\alpha t}u(t)$ *есть решение (в том же смысле) задачи*

$$\frac{dv}{dt}=(A+\alpha I)v+e^{\alpha t}f(t),\quad v(0)=u^0, \tag{14.5}$$

Предложение 14.0.1 позволяет рассматривать задачу (14.2) только для случая, когда резольвента $R(\lambda, A)$ существует при всех λ с $Re\lambda \geq 0$, а полугруппа равномерно ограничена. Это зачастую упрощает выкладки.

Вопрос о единственности классического решения задачи (14.2) решается положительно при весьма слабых ограничениях на A (даже не обязательно, чтобы A порождал C_0-полугруппу).

Предложение 14.0.2 *[127] Пусть A плотно определенный линейный оператор. Если резольвента $R(\lambda, A)$ существует при всех $\lambda \geq \lambda_0$ и*

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \frac{\ln \|R(\lambda, A)\|}{\lambda} = 0,$$

то задача (14.2) не может иметь более одного классического решения.

Предложение 14.0.3 *Пусть задача (14.2) имеет классическое решение. Тогда оно представимо в виде (14.4).*

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.к. функция $u(\cdot)$ в (14.4) не обязана быть дифференцируемой.

Предложение 14.0.4 *[127] Пусть оператор A в задаче Коши (14.2) является генератором C_0-полугруппы. Тогда формула (14.4) дает решение задачи (14.2) при $u_0 \in D(A)$ и выполнении одного из двух условий:*

(i) При всех $t \in [0, T]$ значения $f(t) \in D(A)$ и функция $Af(\cdot)$ непрерывна;

(ii) Функция $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируема.

14.1 Неравенство коэрцитивности в C_0^α

При исследовании нелинейных задач, приближенных методов решения задач вида (14.2), а также некоторых других типов задач часто бывает полезно (см. напр. [69]) свойство коэрцитивности, заключающееся в том, что решение (в каком-либо смысле) задачи Коши (14.2) таково, что функции $u'(\cdot)$ и $Au(\cdot)$, в (14.2), обладают той же гладкостью по переменной t, что и заданная функция $f(\cdot)$.

Определение 14.1.1 *Задачу Коши (14.2) назовем* ***коэрцитивно разрешимой*** *в паре пространств $\tilde{\tilde{E}} \times \tilde{\mathfrak{F}}$ (здесь $\tilde{\tilde{E}}$ — "пространство начальных значений", а $\tilde{\mathfrak{F}}$ — "пространство правых частей"), если для любых $u^0 \in \tilde{\tilde{E}}$*

и $f(\cdot) \in \tilde{\mathfrak{F}}$ задача (14.2) имеет единственное решение $u(\cdot)$, допускающее оценку

$$\|\frac{du}{dt}\|_{\tilde{\mathfrak{F}}} + \|Au\|_{\tilde{\mathfrak{F}}} \le \tilde{M} \cdot \left(\|u^0\|_{\tilde{\tilde{E}}} + \|f\|_{\tilde{\mathfrak{F}}} \right) \tag{14.6}$$

с константой $\tilde{M}$, не зависящей от u^0 и $f(\cdot)$, взятых из соответствующих пространств.

В связи с тем, что условие коэрцитивной разрешимости фактически означает, что в уравнении (14.2) функции $u'(\cdot)$ и $Au(\cdot)$ обладают такой же гладкостью, как и их сумма (правая часть уравнения — $f(\cdot)$), это свойство в зарубежной литературе обычно называют "максимальной регулярностью" (maximal regularity) решения задачи (14.2).

Наиболее естественно, изучая максимальную регулярность (MR) решения задачи (14.2), начать с рассмотрения пространства $\tilde{\mathfrak{F}} = C([0,T];E)$. Однако класс задач, решения которых обладают свойством (MR) в $C([0,T];E)$, оказывается довольно узок. В частности, справедливо следующее

Предложение 14.1.1 *[48] Пусть A – генератор C_0-полугруппы, для которого задача (14.2) обладает свойством (MR) в случае, когда пространство $\tilde{\mathfrak{F}} = C([0,T];E)$. Тогда либо A ограничен, либо E содержит замкнутое подпространство, изоморфное пространству c_0.*

Более содержательным оказывается случай, когда в качестве пространства $\tilde{\mathfrak{F}}$ рассматриваются гельдеровские пространства.

С другой стороны, построены достаточно широкие классы пространств, типа гельдеровских, в которых имеет место коэрцитивная разрешимость задачи (14.2). Приведем простейшее из утверждений такого сорта.

Теорема 14.1.1 *[33] Пусть $A \in \mathcal{H}(\theta, \omega)$. Задача Коши (14.2) коэрцитивно разрешима для случая $\tilde{\tilde{E}} = \mathcal{D}(A)$, $\tilde{\mathfrak{F}} = C_0^\alpha([0,T];E)$, где $C_0^\alpha([0,T];E)$ - замыкание гладких функций в норме*

$$\|f(\cdot)\|_{C_0^\alpha} := \sup_{t \ge 0} \|f(t)\| + \sup \frac{\|f(t+\tau) - f(t)\|}{\tau^\alpha} \cdot t^\alpha,$$

причем второй супремум берется по всем значениям параметров, не выводящим аргументы из области определения функции $f(\cdot)$.

Более общие классы гельдеровских коэрцитивных пространств изучены в [88] и [4].

Замечание 14.1.1 *[32] В случае, когда $E = l^p$, оператор*

$$A(x_k)_{k=1}^{\infty} = (ik\,x_k)_{k=1}^{\infty}, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

порождает сильно непрерывную C_0-полугруппу (однако не аналитическую!). Однако при правой части $f(t) = \left(k^{-(1-1/p)}e^{ikt}\right)_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию Гельдера с любым показателем $\varepsilon \in (0,1)$, но функция

$$\phi(t) = \int_0^t exp\Big((t-s)A\Big)f(s)\,ds$$

ни при каком t не принадлежит $D(A)$.

Этот пример также показывает, что в случае, когда оператор A порождает лишь C_0-полугруппу, гельдеровости правой части недостаточно для существования классического решения (естественно, ни о какой коэрцитивности в этом случае не может быть и речи).

14.2 Неравенство коэрцитивности в L^p

Достаточно интересным оказывается вопрос о коэрцитивной разрешимости задачи (14.2) в пространствах типа L^p. До настоящего времени этот вопрос остается открытым. Наиболее интересные результаты, полученные в этом направлении, таковы. Из коэрцитивной разрешимости задачи (14.2) при условии компактности резольвенты вытекает, как и в случае C_0^{α}, аналитичность C_0-полугруппы $exp(\cdot A)$. Однако на этом сходство и заканчивается.

Предложение 14.2.1 *Пусть задача (14.2) коэрцитивно разрешима для случая, когда $\tilde{\mathfrak{F}} = L^p([0,T];E)$ при некотором $p = p_0$. Тогда коэрцитивная разрешимость имеет место и для случая $\tilde{\mathfrak{F}} = L^p([0,T];E)$ при любом $p \in (1,\infty)$.*

Предложение 14.2.2 *[86] Пусть A является генератором аналитической полугруппы и справедлива оценка $\|A^{i\alpha}\| \leq M$ при некотором M и всех вещественных α. Тогда задача (14.2) коэрцитивно разрешима для случая, когда $\tilde{\mathfrak{F}} = L^p([0,T];E)$ (при соответствующем выборе пространства начальных условий).*

Предложение 14.2.3 *Коэрцитивная разрешимость задачи (14.2) имеет место для случая $\tilde{\mathfrak{F}} = L^p([0,T];E_\alpha)$, где E_α - некоторые интерполяционные пространства, построенные по оператору A.*

В заключение отметим, что систематическое изучение задачи (14.2), а также аналогичной задачи с переменным оператором $A(t)$ — предмет отдельного обстоятельного разговора, который авторы планируют в будущем.

Литература

[1] Баскаков А.Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций // Мат. сб. 1984. Т.124(166), N 1(5). С. 68-95.

[2] Брателли У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.

[3] Вайникко Г.М., Шлапикиене М. К одной теореме С.Г.Крейна о возмущении операторов, порождающих аналитические полугруппы // Уч. зап. Тарт. ун-та. 1971. Т.281. С. 186-189.

[4] Васильев В.В. О коэрцитивной разрешимости абстрактных параболических уравнений с постоянным оператором // Дифф.уравнения. 1978. Т.14, N 8. С. 1507-1510.

[5] Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения. Итоги науки и техники СССР (сер.математический анализ) // М.: ВИНИТИ. 1990. Т.28. С. 87-202.

[6] Ву Куок Фонг, Любич Ю.И. Спектральный критерий почти периодичности для однопараметрических полугрупп // Теория функц., функ. анал. и их приложения. Харьков. 1987. N 47. С. 36-41.

[7] Гельфанд И.М. Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве // ДАН СССР. 1939. Т.25, N 9. С. 713-718.

[8] Гольдштейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Пер. под ред. Далецкого. Киев.: Выща школа. 1989.

[9] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев.: Наукова Думка. 1984.

[10] Горбачук В.И., Князюк А.В. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. - 1989. Т.44, N 3(267). - С. 55-91.

[11] Горбачук В.М. Об асимптотическом поведении решений дифференциально-операторных уравнений в банаховом пространстве // Успехи мат. наук. 1987. 42, вып. 4. С. 162.

[12] Горбачук М.Л., Мацишин И.Т. О решениях эволюционных уравнений с вырождением в банаховом пространстве // Спектр. теория дифференц. - оператор. уравнений. Киев. 1986. С. 5-10.

[13] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве . М.: Наука. 1970.

[14] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Из-во ин. лит. 1962.

[15] Иосида К. Функциональный анализ . М.: Мир. 1967.

[16] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972.

[17] Кислов Н.В. Краевые задачи для дифференциально-операторного уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19, N 8. С. 1427-1436.

[18] Кислов Н.В. Неоднородно-краевая задача для дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. 1984. Т.280, N 5.- С. 1055-1058.

[19] Кислов Н.В. Неоднородно краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа и их приложения // Мат. сб. 1984. Т.125, N 1. С.19-37.

[20] Кононенко В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения N-го порядка в линейном топологическом пространстве // Дифференц. уравнения. 1974. Т.10, N 9. С. 1727-1729.

[21] Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций . М.: Наука. 1966.

[22] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве . М.: Наука. 1967.

[23] Крейн С.Г., Хазан М.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве . Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. ВИНИТИ. 1983. Т.21. С. 130-264.

[24] Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения . М.: Изд-во МГУ. 1978.

[25] Люстерник Л.А., Соболев С.Л. Элементы функционального анализа . М.: Наука. 1965.

[26] Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Ахмеров Р.Р. и др. Новосибирск: Наука, 1986.

[27] Однопараметрические полугруппы / Клемент Ф. и др.. М.:Мир. 1992.

[28] Радыно Я.В. Пространство векторов экспоненциального типа . Докл. АН БССР. 1983. Т.27, N 9. С. 791-793.

[29] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ . М.: Мир. 1977.

[30] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу . М: ИЛ. 1954.

[31] Саймон Б. Модель P(x) эвклидовой квантовой теории поля. М.: Мир. 1976.

[32] Смагина Т.И. Об одной теореме Филлипса // Опер. ур-я в функ. пр-вах. Воронеж. 1986. С. 91-93.

[33] Соболевский П.Е. Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений // ДАН СССР. 1964. Т.157, N 1.

[34] Соболевский П.Е. Теория полугрупп и устойчивость разностных схем. В кн. Теория операторов в функциональных пространствах. Новосибирск. 1977. С. 304-337.

[35] Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир. 1980.

[36] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы . М.: ИЛ. 1951.

[37] Хилле Э., Филлипс П. Функциональный анализ и полугруппы . М.: ИЛ 1962.

[38] Эдвардс Р. Функциональный анализ . М.: Мир. 1969.

[39] Amann H. Linear and quasilinear parabolic problems. Volume 1, Abstract linear theory . Monographs in Mathematics, Vol. 87, Birkhauser Verlag, 1995.

[40] Amerio M., Prouse G. Almost-periodic functions and functional equations. N.Y., 1971.

[41] Arendt W. Kato's equality and spectral decomposition for positive C_0-semigroups // Manuscr. Math. 1982. V.40. P. 277-298.

[42] Arendt W. Kato's inequality: a characterisation of generators of positive semigroups // Proc. Roy. Irish. Acad. 1984. A84., N 2. P. 155-174.

[43] Arendt W. Resolvent positive operators // Proc. London. Math. Soc. 1987. V 54, N 3. P. 321-349.

[44] Arendt W. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems // Isr. J. Math. 1987. V.59, N 3. P. 327-352.

[45] Arendt W., Batty C. J. K Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V.306, N 2. P. 837-852.

[46] Arendt W., Chernoff P., Kato T. A generalisation of dissipativity and positive semigroups // J. Oper. Theory. 1982. V.8, P. 167-180.

[47] Ashyralyev A., Sobolevskii P.E. Well-posedness of parabolic difference equations. Birkhäuser Verlag. 1994. 349 p.

[48] Baillon J.B. Ceracter borne de certains generatours de semigroupes lineares dans les espaces de Banach // C.R.Acad. Sc. Paris. 1980. V.290. P. 757-760.

[49] Baker J.A., Davidson K.R. Cosine, exponential and quadratic functions // Glass. Mat. 1981. V.16, N 5. P. 269-274.

[50] Barbu V., Pavel N. On the invertibility of $I + exp(-tA)$ with A maximal monotone // Proc. of WCNA, Tampa, Florida, August, 1992, De Gruyter Inc., Vol. **III**, P. 2231-2237.

[51] Bart H. Periodic strongly continuous semigroups // Ann. Mat. Pura Appl. 1977. V.115. P. 311-318.

[52] Bart H., Goldberg Characterization of almost periodic strongly continuous groups and semigroups // Math. Ann. 1978. V.236, N 2. P. 105-116.

[53] Batty C.J.K., Robinson D.W. Positive one parameter semigroups in order Banach spaces // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1984. V.2, N 3-4. P. 221-296.

[54] Becker I., Greiner G. On the modulus of one-parameter semigroups II // Semigroup forum. 1986. V.34, N 2. P. 185-201.

[55] Belleni-Morante A. Applied Semigroups . Academic Press. London. 1980.

[56] Boyadzhiev K.N. An asymptotic Fuglede theorem for generators of C_0-groups // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 1987. V.49, N 1-2. P. 145-150.

[57] Brezis H. Operateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les espaces de Hilbert . North-Holland. 1973.

[58] Burnap C., Lambert A. Proximity and semilarity of operators // Proc. R. Ir. Acad. 1987. V.87A. N 1. P. 95-102.

[59] Butzer P.L., Berens H. Semigroups of operators and approximation . New York. 1967.

[60] Calvert B.D. When T-accretive implies accretive // Houston J. Math. 1988. V.14, N 2. P. 147-155.

[61] Cannarsa P., Vespri V. On maximal L^p-regularity for the abstract Cauchy problem // Boll. Unione Mat. Ital. 1986. V.B5, N 1. P. 165-175.

[62] Chander R., Buche A.B. The generation theorem for the modified sine operator // J. Pure Appl. Math. 1981. V.12. P. 691-714.

[63] Cioranescu I. On the abstract Cauchy problem for the operator $\frac{d^2u}{dt^2} - Au$ // Integral Equat. Oper. Theory. 1984. V.7, N 1. P. 21-35.

[64] Cioranescu I. Characterizations of almost periodic strongly continuous cosine operator functions // J. Math. Anal. 1986. V.57, N 1. P. 222-229.

[65] Cioranescu I., Ubilla P. A characterization of uniformly bounded cosine functions generators // Integral Equat. Oper. Theory. 1989. V.12, N 1. P. 1-11.

[66] Clement Ph. et al. Pertubation theory for dual semigroups. I. The sun reflexiv case // Math. Ann. 1987. V 277, N 4. P. 709-725.

[67] Clement Ph. et al. Pertubation theory for dual semigroups. IV // Rept. Cent. Math. Comp. Sci. 1988. N AM-R8802. P. 1-16.

[68] Cuthbert J.R. On semigroups such that $T(t) - I$ is compact for some $t > 0$ // Z. Wars. 1971. V.18, N 1-2. P. 9-16.

[69] Da Prato G. Abstract differential equations, maximal regularity, and linearisation // Proc. Simp. Pure Math. 1986. V.45, N 1. P. 359-370.

[70] Da Prato G., Grisvard P. Equations d'evolution abstraites non linéaires de type parabolique // Ann. Mat. Pura Appl. 1979. IV. V.120. P. 329-396.

[71] Davidson K.R Quadratic forms and sums of squares // Glas. Mat. 1981. V.16, N 2. P. 119-204.

[72] Davies E.B., Pang M.M.H. The Cauchy problem and a generalization of the Hille-Yosida theorem // Proc. London Math. Soc. 1987. V.55, N 1. P. 181-208.

[73] Davies E.B. One parameter semigroups . London: Academic press. 1980.

[74] de Laubenfels R. Existence families, functional calculi and evolution equations. Springer-Verlag. 1994. Lecture Notes Math. V.1570.

[75] de Laubenfels R. Inverses of generators // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V.104, N 2. P. 433-448.

[76] de Laubenfels R. Polinomials of generators of integrated semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V.107, N 1. P. 197-204.

[77] de Laubenfels R. Powers of generators of holomorphic semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V.99, N 1. P. 105-108.

[78] de Laubenfels R. Totally accretiv operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V.103, N 2. P. 551-556.

[79] de Pagter B. A characterisation of sun-reflexivity // Math. Ann. 1989. V.283. P. 511-518.

[80] Desch W., Lasiecka I., Schappacher W. Feedback boundary control for linear semigroups // Israel Math. J. 1985. V.51. P. 177-207.

[81] Desch W., Schappacher W. Some generation results for perturbed semigroups . Trends in semigroups theory and appl. Ph.Clement et al. (Eds) . Marcel Dekker. New-York. 1989. P. 125-152.

[82] Desch W., Schappacher W. A note on the comparision of C_0-semigroups // Semigroup Forum. 1987. V.35, N 2. P. 237-243.

[83] Desch W., Schappacher W. Some perturbation results for analitic semigroups // Math. Ann. 1988. V.284. P. 157-162.

[84] Desch W., Schappacher W. On relatively bounded perturbations of linear C_0-semigroups // Ann. Sci. Norm. Super. 1984. V.7, N 2. P. 327-341.

[85] Diekmann O., Gyllenberg M., Thieme H. Pertubing semigroups by solving Stieltjes renewal equations // Differential and integral equations. 1993. V.6. P. 155-181.

[86] Dore G., Venni A. Some results about complex powers of closed operators // Math. Z. 1987. V.196, N 2. P. 189-201.

[87] Dorroh J.R. Semigroups of operators and second order Cauchy problems // Semigroup Forum. 1985. V.31. P. 297-304.

[88] Emel'janova E.V. , Vasil'ev V.V. The coercive solvability of abstract parabolic equations in Banach spases // Lect. Notes Pure Appl. Marcel Dekker Inc. 1994. V.155. P. 167-173.

[89] Evans D.E., Hanche-Olsen H. The generatores of positive semigroups // J. Func. Anal. 1979. V.32, N 2. P. 207-212.

[90] Fattorini H.O. Ordinary differential equations in linear topological spaces,I // J. Different. Equat. 1969. V.5, N 1. P. 72-105.

[91] Fattorini H.O. Ordinary differential equations in linear topological spaces, II // J. Different. Equat. 1969. V.6. P. 50-70.

[92] Fattorini H.O. Second order linear differential equations in Banach spaces. Amsterdam. North Holland. 1985.

[93] Fattorini H.O. The Cauchy problem . Enciclopedia of Mathematics and its Application, Reading mass. e. a.: Addison Wesley. 1983. XXIV.

[94] Fattorini H.O. The underdetermined Cauchy problem in Banach spaces. Math. Ann. 1973. V.200. P. 103-112.

[95] Fattorini H.O., Radnitz A. The Cauchy problem with incomplete initial data in Banach spaces // Michigan Math. J. 1971. V.18. P. 291-320.

[96] Favini A., Yagi A. Abstract second order differential equations with applications // Funkcialaj Ekvacioy. 1995. V.38. P. 81-99.

[97] Favini A., Yagi A. Multivalued linear operators and degenerate evolution problems // Annali Math. Pura Appl. 1993. V.163, N 4. P. 353-384.

[98] Goldberg S., Smith C. Strongly continuous semigroups of semi-fredholm operators // J. Math. Anal. Appl. 1987. V.64. P. 407-420.

[99] Goldstein J.A. Some developments in semigroups of operators since Hille-Phillips // Integr. Equat. Oper. Theory. 1981. V.4. N 3. P. 350-365.

[100] Goldstein J.A. Some remarks on infinitesimal generetors of analitic semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V.22. P. 91-93.

[101] Goldstein J.A., Sandefur J.T. An abstract d'Alembert formula // SIAM J. Math. Anal. 1987. V.18, N 3. P. 842-856.

[102] Gradinaru N. On some N-parameter semigroups of linear operators // Bul. Inst. Politechn. Iare. 1985. Cupl., /sec. I/. P. 85-88.

[103] Greiner G. Perturbing the boundary conditions of a generator // Houston J. Math. 1987. V.13, N 2. P. 213-229.

[104] Greiner G. Zur Perron-Frobenius theorie stark stetiger Halbgruppen // Math. Z. 1981. N 177. P. 401-423.

[105] Greiner G., Voigt J., Wolff M.P.H. On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators // J. Oper. Theory. 1981. N 5. P. 245-256.

[106] Gustavson K., Lumer G. Multiplicative pertubations of semigroup generators // Pacif. J. Math. 1972. V.41, N 3. P. 731-742.

[107] Heijmans H.J.A.M. Lectures on strongly continuous semigroups . Center for Mathematics and Computer Science. 1986.

[108] Honig C.S. Volterra Stiltjes-Integral Equations. North-Holland, Amsterdam. 1975.

[109] Kisynski J. On cosine operator functions and one parameter groups of operators // Studia Math. 1972. V.44. P. 93-105.

[110] Kisynski J. On operator-value solutions of d'Alambert's Functional equation,I // Colloq Match. 1971. V.23. P. 107-114.

[111] Kisynski J. On operator-value solutiones of d'Alambert's Functional equations,II // Stud Mat. 1971. V.24. P. 43-66.

[112] Krengel U.,Lin M. On the range of the generator of Markovian semigroup // Match. Z. 1984. V.185. P. 553-565.

[113] Ladas G.E., Lakshmikantham V. Differential equations in abstract spaces. Acad. Press, New York. 1972.

[114] Lotz H.R. Tauberian theorems for operators on L^p and similar spaces // Funct. Anal.: Survays and Recent results III. 1984. P. 117-133.

[115] Lumer G., Phillips R.S. Dissipative operators in a Banach space // Pacif. J. Math. 1961. V.11, N 3. P. 679-698.

[116] Lutz D. Strongly continuous operator cosine functions . Functional Analysis // Lect. Notes Math., 1982. V.948. P. 73-97.

[117] Lyubich Yu. I., Vu Quoc Phong. Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces // Stud. Math. 1988. V.88, N 1. P. 37-42.

[118] McBride A.C. Semigroups of linear operators: An introduction . Longman Sci. & Tech., N 156, 1987.

[119] Miyadera I. A generalization of the Hille-Yosida theorem // Proc. Jap. Acad. 1988. V.64, Ser. A., N 7. P. 223-226.

[120] Miyadera I. A perturbations theory for semigroups of operators // Tohoku Math. J. 1966. V.18, N 1. P. 299-310.

[121] Miyadera I., Tanaka N. Exponentially bounded C-semigroups and generation of semigroups // J. Math. Appl. 1989. V.143, N 2. P. 358-378.

[122] Nagel R. et all. One parameter semigroups of positive operators // Lect. Notes Math. 1986. N 1184.

[123] Nagel R., Senzhong Huang. Spectral mapping Theorems for C_0-groups satisfying non-quasianalitic growth conditions // Math. Nachr. 1994. V.169. P. 207-218.

[124] Nagy B. Cosine operator functions and the abstract Cauchy problem // Period. Math. Hung. 1976. V.7, N 3-4. P. 213-217.

[125] Neubrander F. Laplace transform and asymptotic behavior of strongly continuous semigroups // Houston J. Math. 1986. V.12, N 4. P. 549-561.

[126] Neubrander F. On the relation between the semigroup and its infinitesimal generator // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V.100. N 1. P. 104-108.

[127] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations . Springer-Verlag, New York. 1983. 280 P.

[128] Pei Kee Lin. A remark on contraction semigroups on Banach spaces // Bull. London Math.Soc. 1995. V.27. P. 169-172.

[129] Phillips R.S. Perturbation theory for semigroups of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V.74 . P. 199-221.

[130] Piskarev S., Shaw S.-Y. On some properties of step responses and cumulative outputs // Chinese J. Math. 1994. V.22, N. 4. P. 321-336.

[131] Piskarev S., Shaw S.-Y. Multiplicative perturbations of C_0-semigroups and some applications to step responses and cumulative outputs // J. Func. Anal. 1995. V.128. N. 2. P. 315-340.

[132] Robinson D. W. The approximation of flows // J. Func. Anal. 1977. V.24. P. 280-290.

[133] Sato R. On a mean ergodic theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V.83, N 3. P. 563-564.

[134] Schep A.R. Weak Kato-inequalities and positive semigroups // Math. Z. 1985. V.190. P. 305-314.

[135] Senzhong Huang. An equivalent description of non-quasianalyticity through spectral theory of C_0-groups // J. Operator Th. 1994. V.32. P. 299-309.

[136] Shaw S.-Y. Ergodic theorems for semigroups of operators on a Grotendick space // Proc. Jap. Acad. 1983. Ser. A. V.59, N 4. P. 132-135.

[137] Shaw S.-Y. Mean ergodic theorems and functional equations // J. Funct. Anal. 1989. V.87. P. 428-441 .

[138] Shaw S.-Y., Piskarev S. Asymptotic behaviour of semigroup-related functions // Saitama Math. J. 1994. V.12. P. 7-12.

[139] Singh H., Buche A.B. On the generation theorem for the modified exponential-cosine operator // Indian J. Pure Appl. Math. 1980. V.11. P. 368-383.

[140] Slemrod M. Asymptotic behavior of C-semigroups as determined by the spectrum of the generator // Indiana Univ. Math. J. 1976. V.25, N 8. P. 783-792.

[141] Sohrab N.N. Essential spectra of a class of elliptic operators // J. London Math. Soc. 1988. V.38, N 2. P. 286-292.

[142] Sova M. Concerning the characterization of generators of distribution semigroups // Cas. Pestov. Mat. 1980. V.105, N 4. P. 329-340.

[143] Sova M. Cosine operator functions // Rozpr. Mat. 1966. V.49. P. 1-47.

[144] Takenaka T., Okazawa N. A Phillips-Miyadera type perturbation theorem for cosine functions of operators // Tohoku Math. J. 1978. V.30. P. 107-115.

[145] Tanabe H. Equations of evolutions (English translation) . Pitman, London. 1979. 360 P.

[146] Tanaka N. On exponentially bounded C-semigroups // Tokyo J. Math. 1987. V.10, N 1. P. 107-117.

[147] Tanaka N., Miyadera I. Some remarks on C-semigroups and integrated semigroups // Proc. Jap. Acad. 1987. A63., N 5. P. 139-142.

[148] Travis C.C. Differentiability of weak solutions to an abstract inhomogenious differential equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V.82. P. 425-430.

[149] Travis C.C., Webb G.F. Second order differential equations in Banach space // Nonlin. Equat. in abstract space. 1978. P. 331-361.

[150] Travis C.C., Webb G.F. Compactness, regularity and uniform continuity properties of strongly continuous cosine families // Houston J. Math. 1977. V.3, N 4. P. 555-567.

[151] Triggiani R. On the stabilizability problem in Banach space // J. Math. Anal. Appl. 1975. V.52. P. 383-403.

[152] Trotter H. Approximation of semigroups of operatiors // Pacific J. Math. 1958. P.887-919.

[153] Tymovski S. On the analogue of the formula $cos\, t = (e^t + e^{-t})/2$ for operator cosine function // Rocz. Ptm. 1983. Ser. 1. V.23, N 1. P. 173-182.

[154] Ushijima T. Approximation theory for semigroups of linear operators and its applications to approximation of wave equations // Japan J. Math. 1975. V.1, N 1. P. 185-224.

[155] Ushijima T. On the generation and smoothness of semigroups of linear operators // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1972. V.19, N 1. P. 65-127.

[156] van Casteren J.A. Generators of strongly continuous semigroups. Boston: Pitman. 1985. 203 P.

[157] van Neerven J. (Ed.) The asymptotic behaiviour of semigroups of linear operators. Operator Theory, Advances and Applications Vol. 88, Birkhauser, 1986.

[158] van Neerven J.M.A.M. On the topology induced by the adjoint of a semigroup of operators // Centre for Mathematics and computing science. Amsterdam, Netherland. Report AM-R9010. 1980. 14 P.

[159] Varopoulos E. Th. Hardy-Littlewood theory for semigroups // J. Funct. Anal. 1985. V.63, N 2. P. 240-260.

[160] Webb G.F. An operator-theoretic formulation of asynchronic exponential grouth // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V.303. P. 751-763.

[161] Weiss G. Weak L^p-stability of linear semigroup on Hilbert space implies exponential stability // J. Different. Equat. 1988. V.76, N 2. P. 269-285.

[162] Weissler F.B. Semilinear evolution equation in Banach spaces // J. Funct. Anal. 1979. V.32, N 3. P. 277-296.

[163] Wenzel von L. Evolutiongleichungen in localkonvexen Raumen // Math. Nachr. 1985. V.123. P. 145-155.

[164] Yan Jia An. A perturbation theorem for semigroups of linear operators // Lect. Notes Math. 1988. V.1321. P. 89-91.

[165] Yosida K. On the differentiability and the representation of one parameter semigroups of linear operator // J. Math. Anal. 1948. V.1. P. 15-21.

[166] Zabczyk J. A note on C_0-semigroups // Bull Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math., Astron. et Phys. 1975. XXIII. N 8. P. 895-898.

[167] Zaidman S. Abstract differential equations with almost periodic solutions // J. Math. Anal. Appl. 1985. V.107. P. 291-299.

[168] Zaidman S. Almost automorphic solutions of some abstract evolution equations, II // Inst. Lombardo. 1977. III(A). P. 260-272.

[169] Zaidman S. Notes on abstract almost periodicity // Riv. Mat. Univ. Parma. 1979. 5. P. 837-845.