На правах рукописи

Лукьяненко Дмитрий Витальевич

Регуляризирующие алгоритмы и комплекс программ решения обратной задачи восстановления параметров намагниченности

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Ягола Анатолий Григорьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Леонов Александр Сергеевич, Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”
	доктор физико-математических наук, доцент Перов Николай Сергеевич, МГУ имени М. В. Ломоносова, физический факультет
Ведущая организация	Российский университет дружбы народов (РУДН)

Защита состоится 8 апреля 2011 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 501.002.09 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 4, НИВЦ МГУ, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИВЦ МГУ.

Автореферат разослан « » марта 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Суворов В. В.

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию проблем решения задачи восстановления параметров намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля. Для решения этой задачи в зависимости от известной априорной информации об изучаемом объекте предлагаются различные численные алгоритмы решения, запрограммированные для использования как на обычных компьютерах, так и на многопроцессорных системах. Техника распараллеливания позволяет производить обработку больших объёмов данных, что даёт достаточно подробное описание исследуемого объекта. Разработанные алгоритмы также могут быть успешно применены для решения очень широкого класса прикладных физических задач, сводящихся как к трёхмерным интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной функции, так и к задачам меньшей размерности (в том числе для случая, когда необходимо восстановить скалярную функцию).

Актуальность темы

Многие задачи современной физики являются обратными задачами. К сожалению, во всех реальных задачах входные данные задаются с погрешностями, например, получаются в результате эксперимента. Более ста лет назад считалось, что только задачи с решениями, устойчивыми по отношению к возмущениям входных данных, имеют физический смысл. Ж. Адамар ввел понятие корректной (корректно поставленной) задачи. Корректной (корректно поставленной) задачей он называл любую задачу, у которой решение 1) существует, 2) единственно и 3) непрерывно зависит от входных данных. Все остальные задачи Ж. Адамар называл некорректными (некорректно поставленными). Т.е. некорректной считалась задача, у которой нарушается хотя бы одно из трёх свойств корректной задачи.

Оказывается, что абсолютное большинство обратных задач, к которым сводятся прикладные задачи, являются некорректно поставленными. В связи с этим в середине XX века начала развиваться теория некорректных задач, и начали разрабатываться методы их решения.

Академиком А. Н. Тихоновым в 60-х годах прошлого века была заложена теория решения некорректных задач, основанная на понятии регуляризирующего алгоритма как способа приближенного решения некорректной задачи. После основополагающих работ А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева и В. К. Иванова теория некорректных задач была развита многими учеными в применении к разным областям науки и техники.

При решении многих современных прикладных обратных задач часто необходимо восстанавливать характеристики исследуемых объектов в пространстве, при этом эти характеристики могут являться векторными функциями. Это зачастую приводит к необходимости решать трёхмерные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода для векторной функции, что невозможно сделать с использованием обычных персональных компьютеров. В таких случаях обычно используются различные упрощения и допущения, которые понижают размерность решаемой задачи, но при этом дают ограниченную информацию об исследуемом объекте либо приводят к существенным ошибкам в восстанавливаемых значениях исследуемых характеристик. В связи с этим наибольший интерес представляют эффективные методы решения прикладных трёхмерных обратных задач.

Данные проблемы рассматриваются на примере решения важной прикладной задачи восстановления параметров намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля вне его корпуса.

Цель работы

Целью данной работы являлось построение как иерархии моделей, позволяющих понизить размерность решаемой трёхмерной задачи восстановления параметров намагниченности корабля, так и разработка эффективных методов решения трёхмерных обратных задач в постановке, в которой необходимо решить трёхмерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции (постановка, к которой сводится много прикладных физических задач).

Положения, выносимые на защиту

1) Иерархия моделей и эффективные численные методы решения обратной задачи восстановления параметров намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля.

2) Программный комплекс решения обратной задачи восстановления параметров намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля на обычных и многопроцессорных системах.

3) Алгоритм решения прикладных трёхмерных обратных задач, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной функции, с использованием многопроцессорных систем и его программная реализация.

Научная новизна

Автором была разработана иерархия моделей решения обратной задачи восстановления параметров намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля. Было показано, что для решения трёхмерных обратных задач, сводящимся к трёхмерным интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной функции, использование многопроцессорных систем очень эффективно, что позволяет решать данные задачи в самой общей постановке без использования различных упрощений, которые обычно сильно ограничивают полученную при решении информацию об исследуемом объекте.

Практическая ценность

Результаты, полученные в диссертации, могут быть применены как для решения задачи восстановления параметров намагниченности, так и для решения многих других прикладных трёхмерных обратных задач. Среди физических задач отметим обратные задачи механики, задачи томографии, обратные задачи астрофизики, обратные задачи геофизики, задачи спектроскопии, обратные задачи линейной оптики, обратные задачи линейной акустики, обратные задачи радиофизики, задачи исследования материалов и дефектов в них, задачи по обработке изображений. Описанные в работе методы решения применимы к линейным обратным задачам, встречающимся в перечисленных областях. Все результаты данной работы могут быть использованы как для решения трёхмерных обратных задач физики, в которых неизвестные величины являются векторными функциями, так и легко упрощены на случаи задач меньшей размерности либо задач, при решении которых необходимо восстанавливать скалярные функции.

Личный вклад автора

Основные результаты, полученные в данной диссертационной работе, были впервые получены автором. Постановка математической задачи и анализ научных результатов проводились под руководством А. Г. Яголы. Постановка задачи восстановления параметров намагниченности проводилась совместно с Х. Я. Пейем из Национального Университета Сингапура. Основное содержание диссертационной работы и её результатов полностью отражено в девяти научных публикациях автора. В материалах совместных публикаций личный вклад автора является определяющим.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы были представлены: на Всероссийской научно-практическая конференции "Обратные задачи в приложениях" (Бирск, Бирская государственная социально-педагогическая академия), 22–23 мая 2006 года; на Всероссийской научной конференции "Математика. Механика. Информатика." (Челябинск, Челябинский государственный университет), 19–22 сентября 2006 года; на Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященной 75-летию академика М. М. Лаврентьева (Новосибирск, Дом Учёных СО РАН), 20–25 августа 2007 года; на Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященной 100-летию со дня рождения В. К. Иванова (Екатеринбург, Уральский университет), 1–6 сентября 2008 года; на конференции "65 лет Южно-Уральскому государственному университету. Секция естественно-научных и гуманитарных наук." (Челябинск, Южно-Уральский Государственный Университет), 2008 года; на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам "Ломоносов–2010" (Москва, Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова), 1 апреля 2010 года; на Международной конференции "The Second International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications" (Китай, Пекин, Институт геологии и геофизики Китайской Академии Наук), 12–15 июля 2010 года; на научном семинаре кафедры математики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 24 февраля 2010 года; на научном семинаре "Обратные задачи математической физики" под руководством А. Б. Бакушинского, А. В. Тихонравова и А. Г. Яголы, проводящемся в НИВЦ МГУ, 1 декабря 2010 года; на научно-методологическом семинаре НИВЦ МГУ под руководством А. В. Тихонравова, 3 февраля 2011 года.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 9 работ, из которых 2 статьи в рецензируемых печатных научных журналах [1, 2], 1 статья в сборниках трудов конференций [3] и 6 тезисов конференций [4–9]. В журналах из списка ВАК РФ опубликовано 2 статьи [1, 2].

Структура работы

Диссертация написана на 104 страницах, состоит из титульного листа, оглавления, введения, трёх глав, заключения и списка литературы (92 наименования).

Краткое содержание работы

В **ПЕРВОЙ ГЛАВЕ** подробно описана постановка задачи восстановления параметров намагниченности, которая заключается в восстановлении вектора намагниченности, распределённого по объёму корабля. Рассматривается иерархия моделей, позволяющая как понизить размерность решаемой задачи с целью её более простого численного решения, так и позволяющая решить поставленную задачу в общем виде с целью получения более подробной информации об исследуемом объекте.

Одна из возможных схем измерения магнитного поля представлена на рисунке 1. Корабль проплывает над расположенным на определённой глубине массивом сенсоров, которые измеряют магнитное поле через короткие промежутки времени. Такая схема измерений эквивалентна измерению магнитного поля в горизонтальной плоскости S либо, возможно, системе горизонтальных плоскостей (рисунок 2). Надо помнить, что в описанном эксперименте измеряется не поле от корабля, а его сумма с полем Земли. Поле Земли можно измерить в эксперименте, в котором корабль отсутствует. Таким образом, можно косвенно измерить магнитное поле, источники которого находятся в области V, в которой находится корабль.

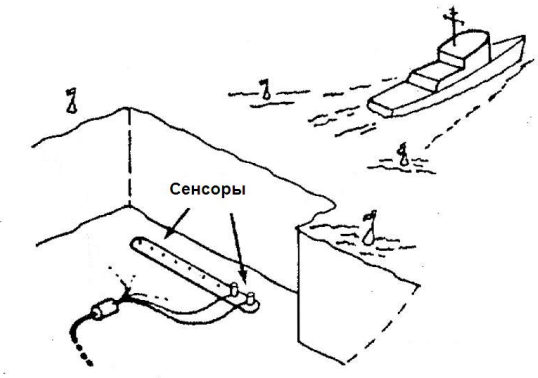

Рис. 1. Схема измерения магнитного поля корабля.

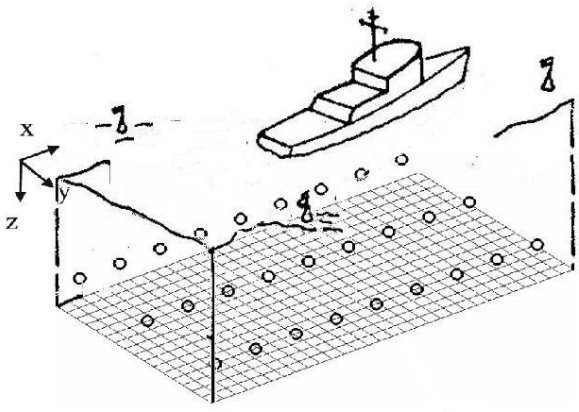

Рис. 2. Эквивалентная схема измерения магнитного поля корабля.

Магнитный диполь с магнитным моментом $\boldsymbol{M}$, расположенный в точке пространства с радиус-вектором q, создаёт в точке с радиус-вектором r магнитное поле с индукцией

$$\boldsymbol{B}_q(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(r-q)\cdot \boldsymbol{M}(q)}{|r-q|^5}(r-q) - \frac{\boldsymbol{M}(q)}{|r-q|^3}\right). \qquad (1)$$

Здесь μ_0 – магнитная постоянная. В системе СИ она равна $4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Общее поле от корабля выражается следующим объёмным интегралом:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \left(\frac{3(r-q)\cdot \boldsymbol{M}(q)}{|r-q|^5}(r-q) - \frac{\boldsymbol{M}(q)}{|r-q|^3}\right) dV_q = \boldsymbol{B}(r). \qquad (2)$$

Но в данной общей постановке решение задачи представляет собой достаточно сложную вычислительную задачу.

Далее в этой главе предлагаются различные математические постановки рассматриваемой задачи, целью которых является упрощение решения поставленной задачи. Эта цель может быть достигнута как понижением размерности решаемой задачи (с помощью использования различных упрощений и допущений), так и с помощью использования более совершенных численных методов.

Одномерная постановка задачи. Одним из самых простых способов разрешения описанной проблемы является понижение пространственной размерности решаемой задачи [5, 9].

Считаем, что поле векторов намагниченности зависит только от первой координаты, т.е. $\boldsymbol{M} = \vec{0}$ вне корабля, а внутри корабля $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(q^1)$. Получаем, что намагниченность представляется функцией $\boldsymbol{M} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^3$, где $\mathcal{T} := [\ \inf\limits_{q\in V} q^1\ ;\ \sup\limits_{q\in V} q^1\ ]$. Введём обозначения для концов отрезка $\mathcal{T}$: $a := \inf\limits_{q\in V} q^1$, $b := \sup\limits_{q\in V} q^1$. Таким образом, мы рассматриваем одномерную модель корабля. При этом изменится соотношение (2). Теперь в нём будет браться криволинейный интеграл. Интегрирование проводится по отрезку $\mathcal{T}\times\{0\}\times\{0\}$:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{\mathcal{T}\times\{0\}\times\{0\}} \left(\frac{3(r-q)\cdot \boldsymbol{M}(q)}{|r-q|^5}(r-q) - \frac{\boldsymbol{M}(q)}{|r-q|^3}\right) dl_q = \boldsymbol{B}(r). \qquad (3)$$

В задаче необходимо восстановить функцию $\boldsymbol{M} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^3$, что эквивалентно восстановлению трёх скалярных функций, действующих из $\mathcal{T}$ в $\mathbb{R}$. Но эти три функции можно представить как одну скалярную функцию m, действующую из $\{1;2;3\}\times\mathcal{T}$ в $\mathbb{R}$.

Данный подход на практике используется следующим образом. Корабль разбивается на относительно небольшое число элементов объёма (характеристики этого разбиения считаются известными), вектор намагниченности в каждом из которох считается неизменным и постоянным. На рисунке 4 приведен пример разбиения исходной модели корабля (рисунок 3) на 10 элементов.

Данный подход допускает относительно простую численную реализацию [5, 8], но имеет и некоторые недостатки. Один из них связан с тем, что результатом решения задачи в данной постановке является

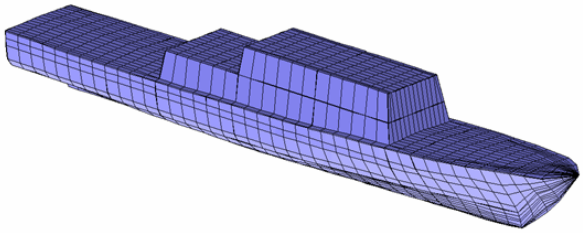

Рис. 3. Исходная модель корабля.

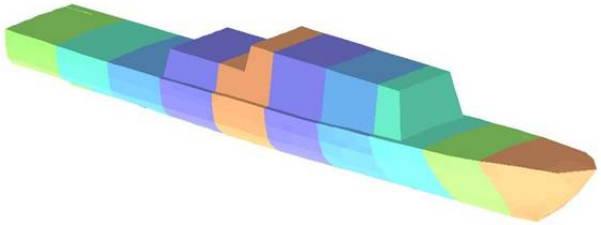

Рис. 4. Разбиение объёма корабля.

только общее представление о распределении вектора намагниченности по объёму корабля.

Двумерная постановка задачи. Вполне закономерным продолжением развития идеи понижения пространственной размерности решаемой задачи является некоторое усложнение модели и сведение исходной задачи восстановления параметров намагниченности к двумерной постановке. Можно выполнить сведение объёмного интеграла (2) к двумерному случаю из соображений, аналогичным (3) для одномерного случая, но можно воспользоваться и более простой аналитической интерпретацией физической постановки задачи.

Уравнение, описывающее магнитное поле $\boldsymbol{B}_i$, индуцируемое магнитными диполями $\boldsymbol{M}_j$, имеет вид, соответствующий уравнению (1):

$$\boldsymbol{B}_i(x_s, y_s, z_s) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\boldsymbol{M}_j \cdot \boldsymbol{r}_{ij})\boldsymbol{r}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^5} - \frac{\boldsymbol{M}_j}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^3} \right]. \qquad (4)$$

Здесь, как и далее в работе, x_s, y_s, z_s – координаты точек (соответствуют расположению сенсоров на сенсорной плоскости либо системе сенсорных плоскостей S), в которых определена векторная функция $\boldsymbol{B}$; x, y, z – координаты точек (соотвтетствуют элементам корпуса корабля), в которых определена векторная функция $\boldsymbol{M}$. N – число магнитных диполей, $\boldsymbol{r}_{ij}$ – вектор, соединяющий точку (x_s, y_s, z_s), соответствующую сенсору i, с точкой (x, y, z), в которой расположен магнитный диполь с номером j.

Аппроксимация корпуса корабля плоскостью. Данная постановка задачи использует допущение, что основной намагниченной частью корабля является корпус и намагниченностью внутренних частей корабля можно пренебречь. Причем, исходя из того, что многие очень большие корабли (типа нефтеналивных танкеров) имеют большое относительно плоское днище, используется аппроксимация корпуса (днища) корабля плоскостью (рисунки 5 и 6).

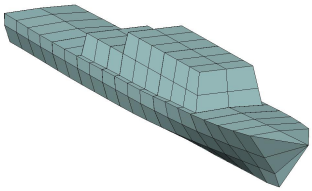

Рис. 5. Исходная модель корабля.

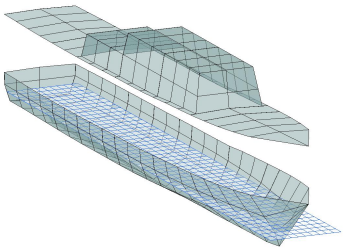

Рис. 6. Аппроксимация корпуса плоскостью.

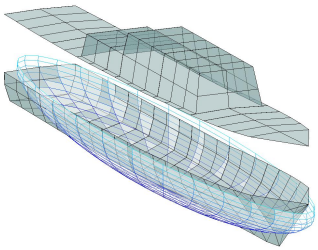

Рис. 7. Аппроксимация корпуса эллипсоидом.

В этом случае задача (4) сводится к решению двумерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода типа свёртки для векторной функции [1, 3]:

$$\boldsymbol{B}(x_s, y_s) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \mathbf{K}(x_s - x, y_s - y)\boldsymbol{M}(x, y)dxdy,$$

где пределы интегрирования соответствуют прямоугольной области пространственной локализации корабля. Здесь, как и далее в работе, ядро $\mathbf{K}$ интегрального уравнения соответствует уравнению (4) и может быть выражено как

$$\mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \begin{bmatrix} 3(x-x_s)^2-r^2 & 3(x-x_s)(y-y_s) & 3(x-x_s)(z-z_s) \\ 3(y-y_s)(x-x_s) & 3(y-y_s)^2-r^2 & 3(y-y_s)(z-z_s) \\ 3(z-z_s)(x-x_s) & 3(z-z_s)(y-y_s) & 3(z-z_s)^2-r^2 \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

где $r = \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2}$. В данной постановке задачи z_s и z — фиксированные величины, соответствующие пространственным координатам по оси Oz сенсорной плоскости и плоскости, аппроксимирующей днище корабля, в результате чего $\mathbf{K}(x_s - x, y_s - y) = \mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, x, y, z)$.

Для решения задачи в данной постановке можно использовать метод решения двумерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода типа свёртки для векторной функции [1, 3], который за счёт использования быстрого преобразования Фурье допускает относительно простую и быстродействующую численную реализацию.

Аппроксимация корпуса корабля эллипсоидом вращения. Данная постановка задачи заключается в том, чтобы подобно предыдущему подходу считать, что основной намагничиваемой частью корабля является корпус, который в силу геометрических особенностей корпусов многих типов кораблей можно в частных случаях приближённо аппроксимировать эллипсоидом (рисунки 5 и 7). Данная постановка задачи тоже допускает использование для решения методов, которые

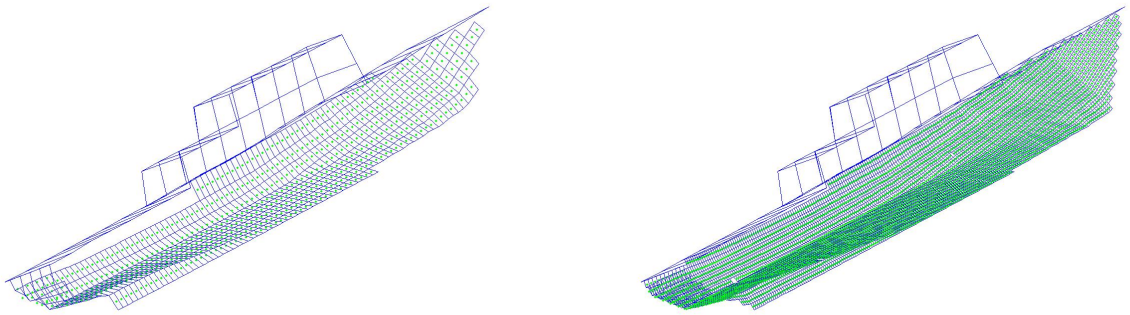

Рис. 8. Примеры разбиения корпуса на 584 и 1780 элементов.

допускают относительно быстродействующую численную реализацию за счет того, что аппроксимация корпуса корабля эллипсоидом вращения позволяет применить известные аналитические преобразования, что позволяет значительно понизить численную размерность решаемой задачи.

Двумерная постановка задачи в общем виде. В данной постановке задачи мы предполагаем подобно двум предыдущим случаям, что основной намагниченной частью корабля является корпус, но не делаем больше никаких дополнительных допущений о форме корпуса корабля, считая что геометрические характеристики корпуса исследуемого корабля нам известны. В этом случае корпус корабля разбивается на четырёхугольные элементы поверхности, которые являются проекцией равномерной двумерной прямоугольной сетки Oxy на корпус корабля (на рисунке 8 приведены примеры разбиения поверхности корабля на 584 и 1780 элементов, что соответствует 1752 и 5340 восстанавливаемым параметрам намагниченности).

В этом случае задача (4) сводится к решению двумерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода в общем виде

$$\boldsymbol{B}(x_s, y_s) = \int_a^b \int_c^d \mathbf{K}(x_s, y_s, x, y, z(x,y)) \hat{\boldsymbol{M}}(x, y, z(x,y)) dxdy, \qquad (6)$$

где неизвестная функция $\hat{\boldsymbol{M}}$ связанной с $\boldsymbol{M}$ соотношением $\hat{\boldsymbol{M}}(x,y,z(x,y)) = \frac{\boldsymbol{M}(x,y,z(x,y))}{\cos\gamma(x,y,z(x,y))}$ (γ – угол между нормалью соответствующего элемента разбиения и осью Oz). Здесь координаты x, y, z связаны уравнением поверхности $z = z(x,y)$, описывающем геометрическую структуру корпуса корабля. Ядро $\mathbf{K}$ интегрального уравнения (6) соответствует (5). Пределы интегрирования соответствуют прямоугольной области пространственной локализации корабля.

Для решения этой задачи разработаны эффективные методы численного решения. Необходимо обратить внимание на то, что в данной постановке задачи для решения необходимо знать точные геометрические параметры исследуемого корабля.

Трёхмерная постановка задачи в общем виде. Последняя постановка задачи является самой общей и соответствует исходному уравнению (2). Необходимо найти непрерывное распределение вектора намагниченности по объёму корабля при отсутствии какой-либо информации о структуре корабля (размерах, предполагаемом распределении намагниченности и т.д.) и его положении в пространстве относительно сенсоров. В этой постановке задачи мы считаем, что никакими сведениями о корабле (или другом исследуемом объекте) мы не обладаем, а, значит, не можем делать никаких существенных предположений и упрощений.

В этом случае уравнение (4) может быть заменено эквивалентным ему интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода для векторной функции:

$$\boldsymbol{B}(x_s, y_s, z_s) = \int\limits_V \mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, x, y, z)\boldsymbol{M}(x, y, z)dv. \tag{7}$$

В этом случае функция $\boldsymbol{B}$ является векторной функцией, определенной на системе измерительных сенсорных плоскостей и неизвестная функция $\boldsymbol{M}$ также векторная функция, определенная по объему корабля V. Здесь x, y, z – координаты точек, расположенные внутри объема корабля V. Ядро $\mathbf{K}$ интегрального уравнения (7) соответствует уравнению (5). Если мы предположим, что $V \subset P = \{(x, y, z) : \ L_x \leqslant x \leqslant R_x,\ L_y \leqslant y \leqslant R_y,\ L_z \leqslant z \leqslant R_z\}$ (на рисунке 9 представлен соответствующий пример) и система сенсорных плоскостей ограничена прямоугольным параллелепипедом $Q = \{(x_s, y_s, z_s) \equiv (s, t, r) : \ L_s \leqslant s \leqslant R_s,\ L_t \leqslant t \leqslant R_t,\ L_r \leqslant r \leqslant R_r\}$, мы получим трёхмерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

$$\boldsymbol{B}(s, t, r) = \int\limits_{L_x}^{R_x}\int\limits_{L_y}^{R_y}\int\limits_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}(s, t, r, x, y, z)\boldsymbol{M}(x, y, z)dxdydz, \tag{8}$$

методы решения которого разработаны [2] и представлены в главе 2.

Данная постановка задачи является самой универсальной, т.к. может быть использована для любого корабля и не требует никаких дополнительных сведений о геометрии корабля, что очень важно с практической точки зрения. Также эта постановка позволяет решать задачи магнитолокации. Недостатком данной постановки является её

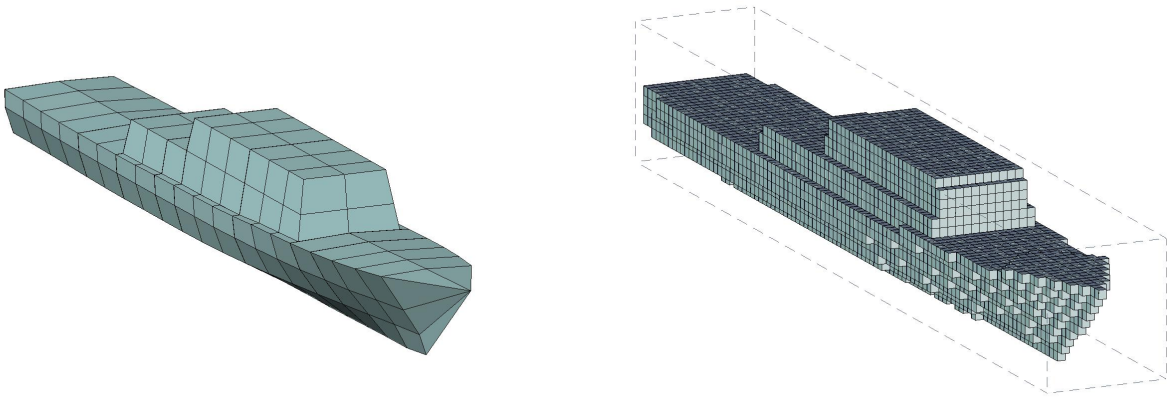

Рис. 9. Разбиение области, в которой находится корабль, на $100 \times 15 \times 15 = 22500$ элементов, что соответствует 67500 восстанавливаемым параметрам намагниченности.

чрезвычайная ресурсоёмкость в связи с чем были разработаны эффективные методы решения этой задачи с помощью многопроцессорных систем [2].

Во **ВТОРОЙ ГЛАВЕ** рассмотрены методы регуляризации поставленной некорректной задачи. Методы основаны на минимизации функционала Тихонова с последующим выбором параметра регуляризации по обобщённому принципу невязки. Минимизация функционала Тихонова осуществляется с помощью метода условного градиента с ограничениями, метода сопряжённых градиентов с проекцией на множество ограничений, метода сингулярного обращения матрицы для одномерной задачи [5]; с использованием метода решения двумерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с ядром типа свертки [1, 3, 4, 6, 7] и метода сопряжённых градиентов для двумерной задачи [8]; с помощью метода сопряжённых градиентов для трёхмерной задачи [2, 7, 9]. Обсуждаются преимущества и недостатки каждой из предложенных моделей. Демонстрируются результаты модельных расчётов и обработки экспериментальных данных.

Подробнее остановимся на алгоритме решения трёхмерной обратной задачи в общем виде [2, 7, 9]. Рассмотрим трёхмерное интегральное уравнение Фредгольма I рода для векторной функции (8)

$$\mathbf{A}\boldsymbol{M} = \int\limits_{L_x}^{R_x}\int\limits_{L_y}^{R_y}\int\limits_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}(s,t,r,x,y,z)\boldsymbol{M}(x,y,z)dxdydz = \boldsymbol{B}(s,t,r), \qquad (9)$$

где $\boldsymbol{B}(s,t,r)$ и $\boldsymbol{M}(x,y,z)$ – векторные функции, а ядро $\mathbf{K}(s,t,r,x,y,z)$

является матричной функцией:

$$\boldsymbol{B}(s,t,r) = \begin{pmatrix} B^1(s,t,r) \\ B^2(s,t,r) \\ B^3(s,t,r) \end{pmatrix}, \boldsymbol{M}(x,y,z) = \begin{pmatrix} M^1(x,y,z) \\ M^2(x,y,z) \\ M^3(x,y,z) \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $P = \{(x,y,z):\ L_x \leqslant x \leqslant R_x,\ L_y \leqslant y \leqslant R_y,\ L_z \leqslant z \leqslant R_z\}$, $Q = \{(s,t,r):\ L_s \leqslant s \leqslant R_s,\ L_t \leqslant t \leqslant R_t,\ L_r \leqslant r \leqslant R_r\}$, где P – область определения векторной функции $\boldsymbol{M}(x,y,z)$, а Q – область определения векторной функции $\boldsymbol{B}(s,t,r)$. Будем предполагать, что $\boldsymbol{M} \in W_2^2(P)$, $\boldsymbol{B} \in L_2(Q)$, а оператор $\mathbf{A}$ с ядром $\mathbf{K}$ непрерывен и взаимооднозначен. Нормы правой части уравнения (9) и решения вводятся как $\|\boldsymbol{B}\|_{L_2} = \sqrt{\|B^1\|_{L_2}^2 + \|B^2\|_{L_2}^2 + \|B^3\|_{L_2}^2}$ и $\|\boldsymbol{M}\|_{W_2^2} = \sqrt{\|M^1\|_{W_2^2}^2 + \|M^2\|_{W_2^2}^2 + \|M^3\|_{W_2^2}^2}$. Пусть вместо точно известных $\bar{\boldsymbol{B}}$ и оператора $\mathbf{A}$ известны их приближенные значения $\boldsymbol{B}_\delta$ и $\mathbf{A}_h$, такие, что $\|\boldsymbol{B}_\delta - \bar{\boldsymbol{B}}\|_{L_2} \leqslant \delta$, $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_h\|_{W_2^2 \to L_2} \leqslant h$. При выписанных условиях задача является некорректной, для ее решения необходимо построить регуляризирующий алгоритм. Воспользуемся алгоритмом, основанным на минимизации функционала Тихонова

$$F^\alpha[\boldsymbol{M}] = \|\mathbf{A}_h\boldsymbol{M} - \boldsymbol{B}_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\|\boldsymbol{M}\|_{W_2^2}^2,$$

который в нашем случае примет вид:

$$F^\alpha[\boldsymbol{M}] = \int_{L_s}^{R_s}\int_{L_t}^{R_t}\int_{L_r}^{R_r} dsdtdr \left\{ \int_{L_x}^{R_x}\int_{L_y}^{R_y}\int_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}(s,t,r,x,y,z)\boldsymbol{M}(x,y,z)dxdydz - \right.$$
$$\left. - \boldsymbol{B}(s,t,r) \right\}^2 + \alpha\Omega[\boldsymbol{M}], \quad (10)$$

где $\Omega[\boldsymbol{M}] \equiv \|\boldsymbol{M}\|_{W_2^2}^2$– сглаживающий функционал:

$$\Omega[\boldsymbol{M}] = \int_{L_x}^{R_x}\int_{L_y}^{R_y}\int_{L_z}^{R_z} \left\{ \boldsymbol{M}^2 + \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial z^2}\right)^2 \right\} dxdydz.$$

Для любого $\alpha > 0$ существует единственная экстремаль функционала Тихонова $\boldsymbol{M}_\eta^\alpha$, $\eta = \{\delta, h\}$, реализующая минимум $F^\alpha[\boldsymbol{M}]$. Для выбора параметра регуляризации можно использовать алгоритм обобщённого принципа невязки. При выборе параметра $\alpha = \alpha(\eta)$ по обобщенному принципу невязки

$$\rho(\alpha) = \|\mathbf{A}_h\boldsymbol{M}_\eta^\alpha - \boldsymbol{B}_\delta\|_{L_2}^2 - \left(\delta + h\|\boldsymbol{M}_\eta^\alpha\|_{W_2^2}\right)^2 = 0$$

$\boldsymbol{M}_\eta^\alpha$ стремиться при $\eta \to 0$ к точному решению задачи в норме W_2^2, а, следовательно, и равномерно на P.

В качестве метода минимизации функционала Тихонова применяется метод сопряжённых градиентов.

При решении задачи минимизации методом сопряженных градиентов необходимо вычислять значение функционала Тихонова $F^\alpha[M]$ и его градиента $\operatorname{grad} F^\alpha[M]$. Для численного решения задачи переходим к конечномерным пространствам. Введем сетки по x, y, z, s, t, r с шагами h_x, h_y, h_z, h_s, h_t, h_r и числом узлов N_x, N_y, N_z, N_s, N_t, N_r. Примем, что $M^m_{i_1 i_2 i_3} = M^m(x_{i_1}, y_{i_2}, z_{i_3})$, $B^n_{j_1 j_2 j_3} = B^n(s_{j_1}, t_{j_2}, r_{j_3})$, $K^{nm}_{j_1 j_2 j_3 i_1 i_2 i_3} = K^{nm}(s_{j_1}, t_{j_2}, r_{j_3}, x_{i_1}, y_{i_2}, z_{i_3})$, $n = \overline{1,3}$, $m = \overline{1,3}$. Все интегралы в формуле (10) аппроксимируются по формуле прямоугольников. Таким образом, получаем следующую конечно-разностную аппроксимацию функционала Тихонова (10):

$$F^\alpha[M] = \Phi[M] + \alpha\Omega[M], \tag{11}$$

где

$$\Phi[M] = \sum_{j_1=1}^{N_s}\sum_{j_2=1}^{N_t}\sum_{j_3=1}^{N_r}\sum_{n=1}^{3} h_s h_t h_r \times \\ \times \left[\sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{i_3=1}^{N_z}\sum_{m=1}^{3} h_x h_y h_z K^{nm}_{j_1 j_2 j_3 i_1 i_2 i_3} M^m_{i_1 i_2 i_3} - B^n_{j_1 j_2 j_3}\right]^2, \tag{12}$$

$$\Omega[M] = h_x h_y h_z \sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{i_3=1}^{N_z}\sum_{m=1}^{3} \left(M^m_{i_1 i_2 i_3}\right)^2 + \dots \\ + \frac{h_y h_z}{h_x^3}\sum_{i_1=2}^{N_x-1}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{i_3=1}^{N_z}\sum_{m=1}^{3} \left(M^m_{i_1+1 i_2 i_3} - 2M^m_{i_1 i_2 i_3} + M^m_{i_1-1 i_2 i_3}\right)^2 + \dots \\ + \frac{h_x h_z}{h_y^3}\sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=2}^{N_y-1}\sum_{i_3=1}^{N_z}\sum_{m=1}^{3} \left(M^m_{i_1 i_2+1 i_3} - 2M^m_{i_1 i_2 i_3} + M^m_{i_1 i_2-1 i_3}\right)^2 + \dots \\ + \frac{h_x h_y}{h_z^3}\sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{i_3=2}^{N_z-1}\sum_{m=1}^{3} \left(M^m_{i_1 i_2 i_3+1} - 2M^m_{i_1 i_2 i_3} + M^m_{i_1 i_2 i_3-1}\right)^2. \tag{13}$$

Таким образом, исходная задача сводится к задаче минимизации в N-мерном пространстве, где $N \equiv 3 \times N_x \times N_y \times N_z$ с последующим выбором параметра регуляризации по обобщённому принципу невязки.

Градиент $\operatorname{grad} F^\alpha[M]$ легко получить из формул (12), (13):

$$\left(\operatorname{grad} F^\alpha[M]\right)^m_{i_1 i_2 i_3} = 2h_x h_y h_z \sum_{j_1=1}^{N_s}\sum_{j_2=1}^{N_t}\sum_{j_3=1}^{N_r}\sum_{n=1}^{3} h_s h_t h_r K^{nm}_{j_1 j_2 j_3 i_1 i_2 i_3} \times \\ \times \left[\sum_{l_1=1}^{N_x}\sum_{l_2=1}^{N_y}\sum_{l_3=1}^{N_z}\sum_{p=1}^{3} h_x h_y h_z K^{np}_{j_1 j_2 j_3 l_1 l_2 l_3} M^p_{l_1 l_2 l_3} - B^n_{j_1 j_2 j_3}\right] + \alpha\frac{\partial\Omega[M^m_{i_1 i_2 i_3}]}{\partial M^m_{i_1 i_2 i_3}}. \tag{14}$$

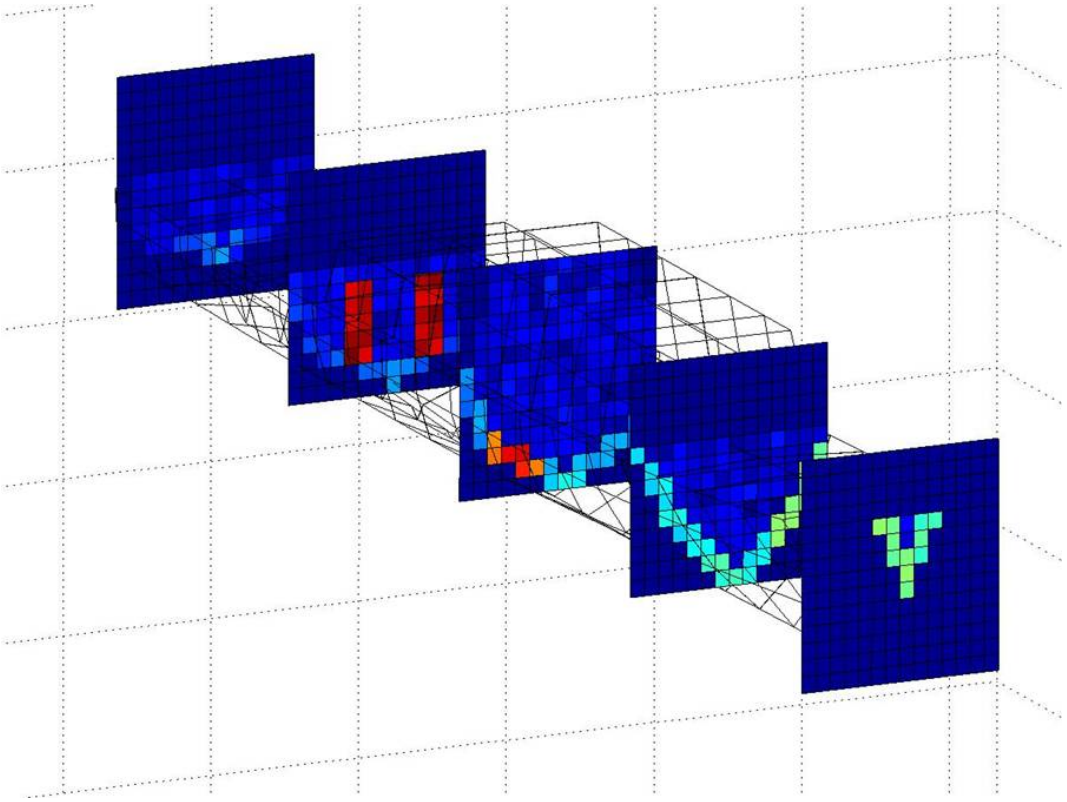

Рис. 10. Результаты восстановления распределения намагниченности по объёму корабля (представлено 5 срезов модуля восстановленной векторной функции $\boldsymbol{M}$).

Типичные размерности, соответствующие реальным приложениям: $N_x = 100$, $N_y = 15$, $N_z = 15$ (рисунок 9). Входные данные симулировали данные реального эксперимента, когда измерения производились 6 триаксиальными сенсорами (расположены друг над другом в два ряда по три сенсора), и каждым из них было сделано 4000 измерений, что соответствует $N_s = 4000$, $N_t = 3$, $N_r = 2$. Данные размерности сеток соответствуют задаче восстановления 67500 неизвестных по 72000 входных данных.

В результате было восстановлено распределение областей намагниченности по объему корабля. На рисунке 10 представлено несколько срезов модуля восстановленной векторной функции $\boldsymbol{M}$. Входные данные были заданы с ошибкой 1,5%.

Тестовые вычисления были выполнены с использованием Суперкомпьютерного комплекса Московского Университета (SKIF MSU, T-Platforms T60, Intel Quadcore 3Ghz, Infiniband DDR). Для написания параллельной версии программ для решения поставленной задачи использовалась библиотека MPI (Message Passing Interface).

Время вычислений примерно составило 29 часов при использо-

вании 200 процессоров. Столь длительное время вычислений связано с применением регуляризирующих алгоритмов, которые требуют повторных нахождений минимума функционала Тихонова для каждого значения параметра регуляризации α.

В ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ приведено описание программного комплекса и его многопроцессорной реализации. Предложены алгоритмы использования многопроцессорных систем для решения двумерной и трёхмерной задач. Рассмотрены особенности их численной реализации.

Особое внимание уделено алгоритмам распараллеливания функционала Тихонова $F^\alpha[M]$ и его градиента $\operatorname{grad} F^\alpha[M]$, на которые приходятся основные вычисления при решении задачи минимизации. Из формул (11), (12), (13) и (14) для функционала и его градиента видно, что они состоят из несвязанных между собой групп слагаемых (по j_1, j_2, j_3 и i_1, i_2, i_3 соответственно). Это дает возможность применения многопроцессорных систем. Задачу можно распараллелить, т.е. переписать программу таким образом, чтобы независимые части программы выполнялись на разных процессорах [2, 4, 6, 8, 9].

Обоснована эффективность предложенных алгоритмов распараллеливания. Показано, что при сетках большой размерности (что соответствует потребностям при решении современных прикладных задач) доля распараллеливаемых вычислений стремится к 100%, что, согласно закону Амдала, доказывает очень высокую эффективность предложенных алгоритмов распараллеливания.

В ЗАКЛЮЧЕНИИ приведены основные полученные результаты:

1. Разработаны иерархия моделей и эффективные численные методы решения обратной задачи восстановления параметров намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля.

2. Создан программный комплекс решения обратной задачи восстановления параметров намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля на обычных и многопроцессорных системах.

3. Предложен и реализован в виде комплекса программ алгоритм решения прикладных трёхмерных обратных задач, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной функции, с использованием многопроцессорных систем.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих изданиях

Публикации в изданиях из Перечня ВАК:

[1] Н.А. Евдокимова, Д.В. Лукьяненко, А.Г. Ягола. *Применение многопроцессорных систем для решения двумерных интегральных уравнений Фредгольма I рода типа свертки для векторных функций* // Вычислительные методы и программирование. — 2009. — т. 10. — с. 263–267.

[2] Д.В. Лукьяненко, А.Г. Ягола. *Применение многопроцессорных систем для решения трехмерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода для векторных функций* // Вычислительные методы и программирование. — 2010. — т. 11. — с. 336–343.

Публикации в других научных изданиях:

[3] Н.А. Евдокимова, Д.В. Лукьяненко, А.Г. Ягола. *Применение многопроцессорных систем для решения двумерных интегральных уравнений 1-го рода типа свертки для векторных функций* // В "Обратные задачи в приложениях. Сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции, г. Бирск, 22–23 мая 2006 г. Бирск, Бирская государственная социально-педагогическая академия, 2006. — с. 117–118. — ISBN 5-86607-266-1.

[4] Н.А. Евдокимова, Д.В. Лукьяненко, А.Г. Ягола. *Комплекс программ решения многомерных некорректных задач с использованием многопроцессорных вычислительных систем* // В "Математика. Механика. Информатика. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции 19–22 сентября 2006 года Челябинск, ГОУВПО "Челябинский государственный университет 2006. — с. 47.

[5] D.V. Lukyanenko, Y.H. Pei, A.G. Yagola, Liu Gui-Rong, N.A. Evdokimova. *Numerical methods for solving ill-posed problems with constraints and applications to inversion of the magnetic field* // В "Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики посвященная 75-летию академика М.М. Лаврентьева, 20–25 августа 2007 г., Новоси-

бирск, Россия. Тезисы докладов секции № 3. 2007. — с. 1–2. — http://www.math.nsc.ru/conference/ipmp07/section3.htm

[6] Н.А. Евдокимова, Д.В. Лукьяненко, А.Г. Ягола. *Применение многопроцессорных систем для решения некоторых обратных задач* // В "Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.К. Иванова. Екатеринбург, 1–6 сентября 2008 года Екатеринбург, Изд-во Уральского университета, 2008. — с. 124–125. — ISBN 978-5-7996-02956.

[7] Н.А. Евдокимова, Д.В. Лукьяненко, А.Г. Ягола. *Восстановление электромагнитных полей корабля с использованием многомерных интегральных уравнений* // В "65 лет Южно-Уральскому государственному университету. Секции естественно-научных и гуманитарных наук т. 2, Челябинск, Изд-во ЮУрГУ, 2008. — с. 114–116.

[8] Д.В. Лукьяненко. *Использование многопроцессорных систем для восстановления параметров намагниченности* // В "Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам "Ломоносов–2010". Москва, Россия. Секция "Физика". Сборник тезисов, Том 1, 2010. — с. 139–140.

[9] D.V. Lukyanenko. *Using parallel computing for solving multidimensional ill-posed problems* // The Second International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications, A workshop at the Institute of Geology and Geophysics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing, China, July 12 – July 15, 2010. — P. 23.